UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

1. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1918

QA1
M88
v.1-3

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

1. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1918

66 F2950
QA1
M88
V.1-2

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Landau, E., Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie 1
Jolles, S., Die Ermittlung hyperbolischer und elliptischer linearer Strahlenkongruenzen aus zwei Paar reziproker Polaren für eine Fläche II. Ordnung 25
Perron, O., Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei großen Werten der unabhängig Variabeln 27
Pick, G., Über positive harmonische Funktionen 44
Blaschke, W., Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises 52
Hilb, E., Zur Theorie der Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen 58
Fejér, L., Über die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung 70
Horn, J., Zur Theorie der nichtlinearen Differenzengleichungen 80
Hahn, H., Über das Interpolationsproblem 115
Pólya, G., Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome 143
Szász, O., Über harmonische Funktionen und *L*-Formen 149
Szász, O., Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe 163
Schur, I., Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen 184
Carleman, T., Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik 208
Landau, E., Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie (Zweite Abhandlung) 213
Hamel, G., Über das infinitäre Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn die charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat 220
Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze 229
Blumenthal, O., Über trigonometrische Polynome mit einer Minimumseigenschaft 285
Jolles, S., Eine besondere metrische Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes 303
Carathéodory, C., Über die Fourierschen Koeffizienten der nach Riemann integrierbaren Funktionen 309
Courant, R., Beweis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt 321
Winternitz, A., Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs 329
Szegö, G., Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi . 341
Hecke, E., Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen 357
Schur, I., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten 377
Bohr, H., Über streckentreue und konforme Abbildung 403
Sturm, R., Einfacherer Beweis für die acht Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung 421
Sturm, R., Die doppelte Bedingung für eine Rotationsfläche zweiten Grades . 425
Szász, O., Berichtigung 428

Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Erstes Kapitel.

Zwei Behauptungen von Tschebyschef.

§ 1.

Die erste Behauptung.

Tschebyschef sagte im Jahre 1853 in einem damals gedruckten riefe an Fuss (5 in der Numerierung des Literaturverzeichnisses meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*), er sei im Be-itze eines Beweises des Satzes

I: *Die Summe der für $c > 0$ konvergenten Reihe*

$$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - e^{-13c} - e^{-17c} + e^{-19c} + e^{-23c} - \dots$$

wo den Primzahlen $4k+1$ das negative, den Primzahlen $4k+3$ das positive Zeichen entspricht) strebt für $c \to 0$ gegen $+\infty$.

Publiziert hat Tschebyschef seinen vermeintlichen Beweis nie; aber r hat 25 Jahre später (6) die obige Mitteilung in ähnlichem Zusammen-ange wiederholt.

Ich habe schon vor 10 Jahren (33, S. 156) in Zweifel gezogen, daß r im Besitze eines (richtigen) Beweises gewesen sei. Jetzt habe ich ge-unden und werde es nachher beweisen, daß aus der Richtigkeit von I olgen würde:

II: *Die Reihe*

$$1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{11^s} + \dots,$$

wo $\chi(n)$ den Nicht-Hauptcharakter modulo 4 bezeichnet, ist in der Halb-

ebene $\sigma > \frac{1}{2}$ von Null verschieden, so daß zufolge der bekannten Malmsténschen Funktionalgleichung (vgl. z. B. Handbuch, S. 497)

$$L(1-s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\,L(s)$$

für die in der Halbebene $\sigma > 0$ durch (1) definierte ganze Funktion $L($ alle ihre unendlich vielen von $-1, -3, -5, \ldots$ verschiedenen Wurzel auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen.

Damit wird Tschebyschefs Behauptung I natürlich weder bewiese noch widerlegt sein; aber die Tatsache, daß sie das Korollar II von der Tie der — analogen — unbewiesenen Riemannschen Vermutung über di Zetafunktion ($\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, also auch für $0 \leqq \sigma < \frac{1}{2}$) mit sich zieh erhöht für Ungläubige die Wahrscheinlichkeit, daß Tschebyschef sic geirrt hat, und für Gläubige den Wunsch, aus seinen Papieren den Bewe von I rekonstruiert zu sehen. (In meiner Arbeit 21 *Über einen Satz vo Tschebyschef*, die von einer anderen in 5 ohne Beweis von Tschebysche ausgesprochenen, durch Herrn Phragmén (1) als richtig festgestellte Behauptung handelt, hatte ich analog II aus je einer falsch bewiesene Behauptung von Cesàro, Herrn Pellet und Herrn Torelli gefolgert.)

Tschebyschefs Behauptung I besagt offenbar

$$(2) \qquad g(c) = -\sum_p \chi(p) e^{-pc} \to \infty \quad \text{für} \quad c \to 0,$$

d. h.

$$\sum_p \chi(p)\, x^p \to -\infty \quad \text{für} \quad x \to 1$$

bei Annäherung von links.

§ 2.

Hilfssatz.

Voraussetzung: *Es sei $q > 0$, $f(x)$ für $0 < x \leqq q$ stetig und $\geqq$ Es sei das (bei $x = 0$ uneigentliche) Integral*

$$(3) \qquad \int_0^q x^{s-1} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_\varepsilon^q x^{s-1} f(x)\,dx$$

für $s > \eta$ konvergent (vorhanden), also für $\sigma > \eta$ konvergent, also fü $\sigma > \eta + \delta$, $\delta > 0$ gleichmäßig konvergent und (da $\int_\varepsilon^q$ offenbar bei jede festen positiven $\varepsilon < q$ eine ganze Funktion von s ist) für $\sigma > \eta$ eine r guläre Funktion $\varphi(s)$ von s. Diese Funktion $\varphi(s)$ sei für die (reellen) der Strecke $\varkappa < s \leqq \eta$ regulär, wo $\varkappa$ eine gewisse Zahl $< \eta$ ist.

Behauptung: *Das Integral* (3) *konvergiert für* $s > \varkappa$; $\varphi(s)$ *ist also (wegen der eo ipso gleichmäßigen Konvergenz von* (3) *für* $\sigma > \varkappa + \delta$, $\delta > 0$) *in der Halbebene* $\sigma > \varkappa$ *regulär.*

Vorbemerkung: Der Hilfssatz folgt zwar durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$,

$$\int_0^q x^{s-1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) y^{-s-1}\,dy$$

aus meinem Satz auf S. 548 der Arbeit **21**, d. i. aus dem Satz X''' meiner Arbeit **27**; doch ist der direkte Beweis durch meine damalige Methode nur wenige Zeilen lang und soll daher ausgeführt werden.

Beweis: Es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < q \leqq 1$ angenommen werden. Wäre die Behauptung falsch, so bezeichne ich mit λ die untere Grenze der reellen s, für die (3) konvergiert; es wäre $\varkappa < \lambda \leqq \eta$. Da (3) für $s > \lambda$ konvergiert, konvergiert es für $\sigma > \lambda + \delta$ $\delta > 0$ gleichmäßig, so daß $\varphi(s)$ für $\sigma > \lambda$ regulär ist, durch (3) dargestellt wird und beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiierbar ist. Da $= \lambda$ nach Voraussetzung regulär wäre, so wäre der Konvergenzradius der n der Umgebung von $s = \lambda + 1$ gültigen Potenzreihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(\lambda+1)}{n!}(s-\lambda-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-\lambda-1)^n}{n!} \int_0^q x^\lambda \log^n x\, f(x)\,dx$$

größer als 1; bei passender Wahl eines $\Delta > 0$ konvergierte diese Potenzreihe also in $s = \lambda - \Delta$; dies ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Delta-1)^n}{n!} \int_0^q x^\lambda \log^n x\, f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta+1)^n}{n!} \int_0^q x^\lambda (-\log x)^n f(x)\,dx.$$

Wegen $f(x) \geqq 0$ ist für alle $n \geqq 0$ und alle x der Strecke $0 < x \leqq q$

$$\frac{(\Delta+1)^n}{n!} x^\lambda (-\log x)^n f(x) \geqq 0,$$

also die Summation mit der Integration vertauschbar. Es würde also das Integral

$$x^\lambda f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta+1)^n}{n!} (-\log x)^n\,dx = \int_0^q x^\lambda f(x) e^{-(\Delta+1)\log x}\,dx = \int_0^q x^{\lambda-\Delta-1} f(x)\,dx$$

konvergieren, entgegen der Definition von λ.

§ 3.

Schluß von I auf II.

Für $s > 0$ ist

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx;$$

für $s > 0$ und jede Primzahl p ist also

$$\frac{\Gamma(s)}{p^s} = \frac{1}{p^s} \int_0^\infty (px)^{s-1} e^{-px} p\, dx = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-px} dx.$$

Für $s > 1$ ist demnach, wenn $\chi(n)$ den Nicht-Hauptcharakter modulo bezeichnet,

$$\Gamma(s) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_p \int_0^\infty x^{s-1} \chi(p) e^{-px} dx = \int_0^\infty x^{s-1} \sum_p \chi(p) e^{-px} dx.$$

(Denn die Summation ist mit der Integration vertauschbar, weil die Majorante

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\zeta(s)$$

konvergiert.) Also wäre, wenn $g(x)$ die Bedeutung aus (2) hat,

$$-\Gamma(s) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \int_0^\infty x^{s-1} g(x) dx.$$

Es sei q irgendeine positive Zahl. Da

$$\int_q^\infty x^{s-1} g(x) dx$$

eine ganze Funktion von s ist (weil das Integral $\int_q^\omega$ gleichmäßig für $\sigma \leqq$ gegen einen Grenzwert strebt, wenn ω unendlich wird), ist für $\sigma > 1$

$$\int_0^q x^{s-1} g(x) dx = -\Gamma(s) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + R_1(s),$$

wo $R_1(s)$ ganz ist.

Nun ist für $\sigma > 1$

$$L(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}};$$

in ebenda regulärer Zweig des Logarithmus hiervon ist

$$\log L(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m p^{ms}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p,\, m \\ m>1}} \frac{\chi(p^m)}{m p^{ms}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + R_2(s),$$

wo $R_2(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär ist; für $\sigma > 1$ ist also

$$\int_0^q x^{s-1} g(x)\, dx = -\Gamma(s) \log L(s) + R_3(s), \tag{4}$$

wo $R_3(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär ist. Nun ist für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ die Funktion $L(s)$ positiv, also die rechte Seite von (4) regulär. Die für $\sigma > 1$ durch

$$\int_0^q x^{s-1} g(x)\, dx \tag{5}$$

definierte Funktion ist also für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär.

Es sei nun I erfüllt, d. h.

$$\lim_{x=0} g(x) = \infty;$$

oder es sei nur

$$\liminf_{x=0} g(x) > 0$$

oder auch nur bei passender Wahl von $q > 0$ für $0 < x \leqq q$

$$g(x) \geqq 0.$$

Nach dem Hilfssatz des § 2, auf $f(x) = g(x)$, $\eta = 1$, $\varkappa = \frac{1}{2}$ angewendet, ist die für $\sigma > 1$ durch (5) definierte Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, also nach (4) ebenda $\log L(s)$ regulär,

$$L(s) \neq 0,$$

q. e. d.

§ 4.

Weitere Folgerungen aus I.

Aus I folgte II, und aus II würde nach S. 866—867 des *Handbuchs* folgen:

III: *Die Reihe*

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

konvergiert für $\sigma > \frac{1}{2}$; *d. h. für jedes* $\delta > 0$ *ist*

$$P(x) = \sum_{p \leqq x} \chi(p) = O(x^{\frac{1}{2}+\delta}).$$

Folgendes ist sehr bemerkenswert. Tschebyschef interpretiert (6) seine Behauptung I populär so: Es gibt viel mehr Primzahlen $4k+3$ als $4k+1$. Und aus I folgt nun im Gegenteil, daß die Differenz beider Anzahlen bis x absolut genommen viel kleiner {nämlich $O(x^{\frac{1}{2}+\delta})$} ist, als bisher bekannt war, nämlich $O(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}})$; d. h. daß beide Anzahlen viel näher, als bekannt war, aneinander liegen.

Ich behaupte schärfer, daß aus I folgen würde:

IV: *Es ist*

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x). \tag{6}$$

Vorbemerkung: Ein Beweis wäre, da II aus I folgen würde, nach dem Paradigma des § 94 meines *Handbuchs* möglich [wo ich die zuerst von Herrn von Koch, später anders von Herrn Holmgren bewiesene Tatsache begründet habe, daß aus der Riemannschen Vermutung

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

folgt]. Doch will ich von II aus für (6) eine vereinfachte Beweisanordnung vollständig ausführen und überlasse dem Leser, nach dem neuen Paradigma sich die entsprechende Beweisführung des von Kochschen Satzes zu überlegen.

Beweis: Es ist für $\sigma > 1$ (*Handbuch*, S. 420)

$$-\frac{L'(s)}{L(s)} = \sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)\log p}{p^{ms}},$$

also für $x > 1$ (*Handbuch*, S. 181)

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2}\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{p,m}\chi(p^m)\log p \int_{2-\infty i}^{2+\infty i}\left(\frac{x}{p^m}\right)^s \frac{1}{s^2}\,ds$$

$$= \sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m)\log p \log\frac{x}{p^m}. \tag{7}$$

Es sei $T > 0$ nicht Ordinate einer Wurzel von $L(s)$. Es ist (*Handbuch*, S. 512)

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = b - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

wo $\varrho = \beta + \gamma i$ die „nicht trivialen" Wurzeln bezeichnet und $\sum_{\varrho}$ absolut kon-

rgiert. Wird $\sum_{\varrho}$ in $\sum_{\varrho}' + \sum_{\varrho}''$ geteilt, wo $|T-\gamma| \geqq 1$ in $\sum'$, $|T-\gamma| < 1$ $\sum''$ ist, so ist in

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = b - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \sum_{\varrho}'\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right) + \sum_{\varrho}''\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

ır $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig bei wachsendem T nach S. 520

$$\sum_{\varrho}'\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right) = O(\log T)$$

nd nach S. 334

$$b - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} = O(\log T);$$

rner ist, da $\sum''$ nach S. 519 nur $O(\log T)$ Glieder hat,

$$\sum_{\varrho}''\frac{1}{\varrho} = O\left(\frac{\log T}{T}\right) = O(\log T);$$

emnach ist bei „wurzelfrei" wachsendem T für $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig

)
$$\frac{L'(s)}{L(s)} = \sum_{\varrho}''\frac{1}{s-\varrho} + O(\log T).$$

Ich wende nun den Cauchyschen Satz auf

$$\int \frac{x^s}{s^2}\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds \qquad (x>1)$$

nd das bei -1 durch einen kleinen Halbkreis nach links ausgebuchtete echteck mit den Ecken $2 \pm Ti$, $-1 \pm Ti$ an, wo T, also auch $-T$ wurzelfrei" ist.

1. Die Residuensumme darin ist

$$\frac{1}{x} + a_0 + a_1 \log x + \sum_{|\Im\varrho|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho^2}.$$

2. Das Integral über die Horizontalseiten strebt, wenn T „wurzelfrei" as Unendliche rückt, gegen 0; dies braucht nur für die obere gezeigt zu erden. Wegen (8) und der gleichmäßigen Abschätzung

$$\frac{x^s}{s^2} = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

enügt es

$$\sum_{\varrho}'' \int \frac{x^s}{s^2} \frac{1}{s-\varrho} ds \to 0$$

zu zeigen, und dies folgt daraus, daß $\sum''$ nur $O(\log T)$ Glieder hat, und daß für $T > \frac{3}{2}$ jedes dieser Integrale, wenn der Weg im Falle $T-1 < \gamma <$ durch den Halbkreis nach oben, im Falle $T < \gamma < T+1$ durch den Halbkreis nach unten ersetzt wird, absolut $\leqq$ Weglänge · Maximum des absoluten Betrages des Integranden $\leqq \frac{3}{2}\pi \frac{x^2}{\left(T-\frac{3}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1}$ ist.

3. Das Integral

$$\int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds$$

(wo der Weg bei -1 nach links ausgebuchtet ist) konvergiert, da für $\sigma = -1$ nach S. 516

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = O(\log t)$$

ist und $\int_1^\infty \frac{\log t}{t^2} dt$ konvergiert. Aus dem gleichen Grunde ist

$$\left| \int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds \right| \leqq x^{-1} \int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \left| \frac{1}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} \right| |ds| = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der Cauchysche Satz mit darauffolgendem $\lim_{T=\infty}$ ergibt also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds = \frac{1}{x} + a_0 + a_1 \log x + \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + \int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds$$

$$= a_0 + a_1 \log x + \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{9}$$

wo $\sum$ absolut konvergiert.

Aus (7) und (9) folgt

$$\sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \log \frac{x}{p^m} = -a_0 - a_1 \log x - \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{10}$$

Wird nun

$$\sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p = Q(x)$$

gesetzt, so ist

$$\int_1^x \frac{Q(y)}{y}\,dy = \int_1^x \frac{dy}{y} \sum_{p^m \leqq y} \chi(p^m) \log p = \sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \int_{p^m}^x \frac{dy}{y}$$

$$= \sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \log \frac{x}{p^m},$$

also gleich der rechten Seite von (10). Folglich ist, wenn dies auch für $x+1$ statt x aufgeschrieben und subtrahiert wird,

$$\int_x^{x+1} \frac{Q(y)}{y}\,dy = -a_0 - a_1 \log(x+1) - \sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) + a_0 + a_1 \log x$$

$$+ \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) = -\sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho - x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

also, weil bei ganzem x das Integral

$$= Q(x) \int_x^{x+1} \frac{dy}{y} = Q(x) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

ist, für ganzzahlig wachsendes x

$$Q(x) = -\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho - x^\varrho}{\varrho^2} + O(1).$$

Nun wäre in $\varrho = \beta + \gamma i$ nach II stets $\beta = \frac{1}{2}$, also einerseits

$$|(x+1)^\varrho - x^\varrho| \leqq (x+1)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} < (2x)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} < 3x^{\frac{1}{2}},$$

andererseits

$$|(x+1)^\varrho - x^\varrho| = |\varrho \int_x^{x+1} u^{\varrho-1}\,du| < |\varrho| x^{-\frac{1}{2}};$$

folglich wäre bei ganzzahlig wachsendem x

$$\sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho - x^\varrho}{\varrho^2} = O \sum_{|\Im\varrho| \leqq x} \frac{|\varrho| x^{-\frac{1}{2}}}{|\varrho|^2} + O \sum_{|\Im\varrho| > x} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{|\varrho|^2}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} O \sum_{\Im\varrho| \leqq x} \frac{1}{|\varrho|} + x^{\frac{1}{2}} O \sum_{|\Im\varrho| > x} \frac{1}{|\varrho|^2} = x^{-\frac{1}{2}} O \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n} + x^{\frac{1}{2}} O \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$= O(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 x) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \frac{\log x}{x}\right) = O(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 x),$$

$$Q(x) = O(\sqrt{x} \log^2 x),$$

$$R(x) = \sum_{p \leqq x} \chi(p) \log p = Q(x) - \sum_{\substack{p^m \leqq x \\ m > 1}} \chi(p^m) \log p = Q(x) + O \sum_{\substack{p^m \leqq x \\ m > 1}} \log p$$

$$= O(\sqrt{x} \log^2 x),$$

$$P(x) = \sum_{p \leqq x} \chi(p) = \sum_{n=2}^{x} \frac{R(n) - R(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{x} R(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) + \frac{R(x)}{\log(x+1)}$$

$$= O \sum_{n=2}^{x} \sqrt{n} \log^2 n \frac{1}{n \log^2 n} + O(\sqrt{x} \log x) = O \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\sqrt{n}} + O(\sqrt{x} \log x)$$

$$= O(x^{\frac{1}{2}} \log x).$$

Damit ist (6) für ganzzahlig wachsendes x, also auch für stetig wachsendes x bewiesen

§ 5.

Die zweite Tschebyschefsche Behauptung.

Tschebyschef sagte in dem Brief (5) vom Jahre 1853 weiter, er besitze einen Beweis des Satzes — ich muß zur Vermeidung von Mißverständnissen wörtlich zitieren —

V: *La série*

(11) $f(3) - f(5) + f(7) + f(11) - f(13) - f(17) + f(19) + f(23) - \ldots,$

où $f(x)$ est une fonction constamment décroissante, ne peut être convergente, à moins que la limite du produit $f(x) \cdot x^{\frac{1}{2}}$, pour $x = \infty$, ne soit zéro.

Es wird also

$$f(3) > f(5) > f(7) > \ldots$$

vorausgesetzt, ferner die Konvergenz von (11), so daß $f(p)$ gegen 0 strebt, also beständig > 0 ist. Behauptet wird, wenn $f(x)$ für alle $x \geqq 3$ so definiert ist, daß es monoton abnimmt:

(12) $$f(x) = o(x^{-\frac{1}{2}});$$

vielleicht meint Tschebyschef auch nur, daß im Falle der Existenz des Grenzwertes $\lim_{x=\infty} x^{\frac{1}{2}} f(x)$ dieser 0 ist. Bei keiner der beiden Interpretationen vermag ich den Satz V zu beweisen noch zu widerlegen; natürlich ist

$$f(p) = o(p^{-\frac{1}{2}})$$

für wachsende Primzahl p mit (12) identisch; denn liegt x zwischen den beiden konsekutiven Primzahlen $p_n \leqq x$ und $p_{n+1} > x$, so folgt, weil nach

ner anderen Tschebyschefschen Arbeit (4, vgl. S. 92 des *Handbuchs*)

3) $$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 2$$

t, bei wachsendem x (es ist n eine Funktion von x)

$$f(x) \leqq f(p_n) = o\left(p_n^{-\frac{1}{2}}\right) = o\left(p_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\right) = o\left(x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Genau so, wie ich aus I eine Folgerung III in umgekehrter Richtung og („Es gibt in schärferem Sinne als bekannt etwa ebenso viele Primahlen $4k+1$ als $4k+3$"), werde ich jetzt aus I einen Satz über (11) n umgekehrter Richtung wie V (hinreichende statt notwendiger Konvergenzedingung) folgern, nämlich

VI: Voraussetzung: *Es sei*

$$f(3) > f(5) > f(7) > \cdots$$

nd für irgendein $\delta > 0$

$$f(p) = O\left(\frac{1}{p^{\frac{1}{2}+\delta}}\right),$$

lso nach (13), *wenn* $f(x)$ *irgendwie so interpoliert wird, daß es für* $x \geqq 3$ *eständig abnimmt,*

4) $$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}\right).$$

Denn $f(x) \leqq f(p_n) = O\left(\frac{1}{p_n^{\frac{1}{2}+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{p_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}\right).$

Behauptung: *Die Reihe*

$$\sum_p \chi(p) f(p)$$

onvergiert.

Beweis: Aus I folgte III; es gibt also ein $c_1 = c_1(\delta)$ derart, daß ir alle $x \geqq 1$

$$|P(x)| = \left|\sum_{p \leqq x} \chi(p)\right| < c_1 x^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}$$

st. Nach (14) gibt es ein $c_2 = c_2(\delta)$ derart, daß für alle $x \geqq 3$

$$0 < f(x) < \frac{c_2}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

t.

Für ganze v, w mit $w \geqq v \geqq 3$ ist also

$$\sum_{v \leqq p \leqq w} \chi(p) f(p) = \sum_{n=v}^{w} \{P(n) - P(n-1)\} f(n)$$

$$= \sum_{n=v}^{w} P(n) \{f(n) - f(n+1)\} - P(v-1) f(v) + P(w) f(w+1),$$

also wegen der Monotonie des $f(x)$

$$\left|\sum_{v \leqq p \leqq w} \chi(p) f(p)\right| < c_1 \sum_{n=v}^{w} n^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} \{f(n) - f(n+1)\} + c_1 v^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} \frac{c_2}{v^{\frac{1}{2}+\delta}} + c_1 w^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} \frac{c_2}{w^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

$$= c_1 \sum_{n=v}^{w} f(n) \left\{n^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} - (n-1)^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right\} + c_1 f(v) (v-1)^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} - c_1 f(w+1) w^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}$$

$$+ \frac{c_1 c_2}{v^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{c_1 c_2}{w^{\frac{\delta}{2}}}$$

$$< c_1 c_2 \sum_{n=v}^{w} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} \left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right) \int_{n-1}^{n} u^{-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} du + c_1 \frac{c_2}{v^{\frac{1}{2}+\delta}} v^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} + \frac{c_1 c_2}{v^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{c_1 c_2}{w^{\frac{\delta}{2}}}$$

$$< c_1 c_2 \left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right) \sum_{n=v}^{w} \int_{n-1}^{n} \frac{u^{-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}}{u^{\frac{1}{2}+\delta}} du + \frac{3 c_1 c_2}{v^{\frac{\delta}{2}}} < c_1 c_2 \left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right) \int_{v-1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{\delta}{2}}} + \frac{3 c_1 c_2}{v^{\frac{\delta}{2}}},$$

was von w frei ist und für $v \to \infty$ gegen 0 strebt.

Zweites Kapitel.

Eine Vermutung von Herrn Lerch.

§ 6.

Widerlegung der Lerchschen Vermutung.

Herr Lerch hat in der Nr. 3 seiner Arbeit 17 Schlüsse aus folgender Annahme gezogen; er betont selbst ausdrücklich, daß sie eine heuristische ist, und sagt, daß sie wahrscheinlich richtig sei.

Es sei D eine sog. Fundamentaldiskriminante (d. h. eine ganze positive Zahl > 1 oder eine ganze negative Zahl, $\equiv 0$ oder $1 \pmod 4$, durch kein ungerades Primzahlquadrat teilbar und im Falle $D \equiv 0 \pmod 4$ von der Gestalt $D \equiv 8$ oder $12 \pmod{16}$). Es sei $\left(\frac{D}{n}\right)$ das Jacobi-Kroneckersche Symbol (das bekanntlich für zu D nicht teilerfremde n Null ist, sonst ± 1

und für $n > 0$ einen reellen Charakter $\chi(n)$ modulo $|D|$ darstellt). Bekanntlich ist (Herr Lerch schreibt $P(D, s)$ für dies $L(s)$)

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

für $\sigma > 0$ konvergent und definiert eine ganze Funktion von s (*Handbuch*, S. 475). Bekanntlich ist für $\sigma > 1$

$$L(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p^s}} \qquad (\textit{Handbuch}, \text{ S. 458}),$$

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\sum_{p,\,m} \left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{ms}} \quad (\textit{Handbuch}, \text{ S. 420}),$$

15)
$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p^s - \left(\frac{D}{p}\right)}.$$

Das Lerchsche Postulat lautet nun:

VII: *Es ist*

16)
$$L\left(\tfrac{1}{2}\right) \neq 0$$

und (15) *für* $s = \frac{1}{2}$ *gültig, d. h.*

$$\frac{L'\left(\frac{1}{2}\right)}{L\left(\frac{1}{2}\right)} = -\sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p} - \left(\frac{D}{p}\right)}.$$

Ich werde zeigen, daß dies Postulat für jedes einzelne D falsch ist, ja sogar, daß für jedes einzelne D die Reihe

17)
$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p} - \left(\frac{D}{p}\right)}$$

divergiert (mag (16) gelten oder nicht).

Wäre (17) konvergent, so wäre wegen

$$\left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{\sqrt{n} - \left(\frac{D}{n}\right)} = \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{\sqrt{n}} + \left(\frac{D}{n}\right)^2 \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

die Reihe

$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} + \left(\frac{D}{p}\right)^2 \frac{\log p}{p}\right)$$

konvergent, also $\left(\text{da } \left(\frac{D}{p}\right)^2 \text{ bis auf endlich viele } p \text{ gleich 1 ist}\right)$, die Reihe

18)
$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} + \frac{\log p}{p}\right) = a$$

konvergent (was auch Herr Lerch benutzt). Nach dem Analogon zum Abelschen Stetigkeitssatz (über Potenzreihen) für Dirichletsche Reihen (*Handbuch*, S. 107) wäre also

$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} + \frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{p^s} = f(s) \tag{19}$$

für $s > 0$ konvergent und bei $s \to 0$

$$f(s) \to a. \tag{20}$$

Für $s > 0$ wäre also

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}}$$

konvergent; es konvergierte also

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^s}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$; daher wäre für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^s} + \sum_{\substack{p,\,m \\ m>1}} \left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{ms}} = -\frac{L'(s)}{L(s)}$$

regulär, also für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$L(s) \neq 0.$$

Für $s > 0$ wäre nun

$$-\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} = \sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} + \sum_{\substack{p,\,m \\ m>1}} \left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{m(s+\frac{1}{2})}}$$

$$= \sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} + \sum_p \left(\frac{D}{p}\right)^2 \frac{\log p}{p^{2s+1}} + \varphi_1(s)$$

wo $\varphi_1(s)$ für $3(\sigma + \frac{1}{2}) > 1$, d. h. $\sigma > -\frac{1}{6}$ regulär ist, also sicher (wie auch nachher $\varphi_2(s)$, $\varphi_3(s)$, $\varphi_4(s)$, $\varphi_5(s)$) für abnehmendes $s \to 0$ einen Limes hat. Demnach wäre für $s > 0$

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} = -\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} - \sum_p \frac{\log p}{p^{2s+1}} + \varphi_2(s)$$

$$= -\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} + \varphi_3(s). \tag{21}$$

Nach (19) und (20) wäre aber für $s > 0$

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} = -\sum_p \frac{\log p}{p^{s+1}} + f(s) = \frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} + \varphi_4(s),$$

$$-\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} - \frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} = \varphi_5(s). \tag{22}$$

Wenn nun $s = \frac{1}{2}$ keine Nullstelle von $L(s)$ ist, so hat die linke Seite von (22) in $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$; wenn $s = \frac{1}{2}$ Nullstelle $v$ter Ordnung von $L(s)$ ist, hat die linke Seite von (22) in $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-v - \frac{1}{2} + 1 = -v + \frac{1}{2}$. Niemals also existierte ein (endlicher!) Grenzwert von $\varphi_5(s)$, wenn s zu 0 abnimmt.

§ 7.

Beziehungen zu Cesàro.

Herr Lerch hatte aus dem Postulat VII wegen (18) geschlossen:

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = -\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} + a + o(1),$$

so daß nach Herrn Mertens' Relation (*Handbuch*, S. 99)

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \tag{23}$$

sich

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = -\log x + O(1) \tag{24}$$

ergäbe (übrigens nach Herrn de la Vallée Poussins schärferer Relation (*Handbuch*, S. 198)

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + E + o(1) \tag{25}$$

sogar

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = -\log x + a_1 + o(1), \tag{26}$$

wo a_1 nur von D abhinge).

Hierzu bemerkt Herr Lerch (aus dem Tschechischen übersetzt): „Mit diesen Ergebnissen scheinen die ebenfalls nicht fest begründeten Betrachtungen im Einklange zu stehen, welche Herr Ern. Cesàro in seiner Arbeit ... (12) veröffentlichte; dieselben beziehen sich auf den Fall $D = -4$ und beschäftigen sich mit etwas anderen Ausdrücken, als deren Quelle die Formel (24) dienen kann."

Hierzu bemerke ich, daß die betreffende, bei Cesàro falsch begründete Formel (von der ich nicht weiß, ob sie richtig oder falsch ist)

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{-4}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{p}} = -\frac{1}{2} \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{p} + a_2 + o(1) \tag{27}$$

mit (24) nicht in Einklang, sondern in Widerspruch steht. Denn aus (23) und (24) folgt

$$\sum_{p \leqq x} \left(\left(\frac{D}{p} \right) \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p} \right) \log p = O(1),$$

so daß nach einem bekannten Reihensatz (vgl. *Handbuch*, S. 107)

$$\sum_{p} \left(\left(\frac{D}{p} \right) \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p} \right)$$

konvergiert, also a fortiori

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p} \right) \frac{1}{\sqrt{p}} = - \sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} + O(1) \tag{28}$$

ist. (27) und (28) vertragen sich nicht, da nach Herrn Mertens (vgl. *Handbuch*, S. 102)

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \log \log x + O(1),$$

also

$$\sum_{p \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{p} = \log \log x + O(1)$$

ist, so daß für $D = -4$ nach (27) und (28)

$$-\tfrac{1}{2} \log \log x + O(1) = - \log \log x + O(1),$$

$$\tfrac{1}{2} \log \log x = O(1)$$

wäre.

Im Einklang mit Cesàro steht somit unter allen denkbaren Vermutungen der Gestalt

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{-4}{p} \right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = A \log x + O(1)$$

[siehe (24)] lediglich die Möglichkeit $A = -\frac{1}{2}$. Auch mit der Wirklichkeit kann, sogar für jede einzelne Fundamentaldiskriminante D, eine Formel

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p} \right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = A \log x + O(1) \tag{29}$$

höchstens dann in Einklang stehen, wenn $A = -v - \frac{1}{2}$ ist, wo $v \geqq 0$ die Vielfachheit der etwaigen Wurzel $s = \frac{1}{2}$ von $L(s)$ bezeichnet. Denn aus (23) und (29) folgt

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p} \right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = A \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} + O(1),$$

$$\sum_{p \leqq x} \left(\left(\frac{D}{p} \right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} - A \frac{\log p}{p} \right) = O(1);$$

) konvergiert die Dirichletsche Reihe

$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} - A\frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{p^s}$$

$s > 0$ und ist dort beschränkt. Für $s > 0$ ist [siehe (21)] diese nktion

$$= -\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} + A\frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} + \varphi(s),$$

$\varphi(s)$ für abnehmendes $s \to 0$ einen Limes hat. Daher ist

$$-\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} + A\frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)}$$

Punkte $s = 0$ regulär, also

$$-v - \tfrac{1}{2} - A = 0.$$

Also kann sicher die von Herrn Lerch in der Konsequenz (26) aus I mit $A = -1$ postulierte Gleichung

$$\sum_{p \leqq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = A\log x + B + o(1)$$

chstens mit $A = -v - \frac{1}{2}$ bestehen.

Ich werde aber — bereits mit klassischen Mitteln — zeigen [ohne eine noch schärferen Resultaten führende Methode von Herrn Littlewood *ur la distribution des nombres premiers*, Comptes rendus hebdomadaires s séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 158 (1914), S. 1869 bis 72) heranzuziehen]: Auch jene modifizierte Vermutung

$$\sum_{p \leqq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = -(v+\tfrac{1}{2})\log x + B + o(1)$$

für jedes D (und jedes dazu gewählte $B = B(D)$) falsch.

Aus (30) und (25) folgt

$$\sum_{p \leqq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} + \sum_{p \leqq \sqrt{x}}\left(\frac{D}{p}\right)^2\frac{\log p}{p} + v\sum_{p \leqq x}\frac{\log p}{p} = -(v+\tfrac{1}{2})\log x + B + o(1)$$

$$+ B_1 + \log(\sqrt{x}) + E + o(1) + v\log x + vE + o(1) = B_2 + o(1);$$

gen der absoluten Konvergenz von

$$\sum_{\substack{p,m \\ m>2}}\left(\frac{D}{p}\right)^m\frac{\log p}{p^{\frac{m}{2}}} + v\sum_{\substack{p,m \\ m>1}}\frac{\log p}{p^m}$$

re also

$$\sum_{\substack{p,m \\ p^m \leqq x}}\left(\frac{D}{p}\right)^m\frac{\log p}{p^{\frac{m}{2}}} + v\sum_{\substack{p,m \\ p^m \leqq x}}\frac{\log p}{p^m} = B_3 + o(1).$$

Die Dirichletsche Reihe

$$-\frac{L'(s)}{L(s)}-v\frac{\zeta'(s+\frac{1}{2})}{\zeta(s+\frac{1}{2})}=\sum_{p,m}\left(\frac{D}{p}\right)^m\frac{\log p}{p^{ms}}+v\sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{m(s+\frac{1}{2})}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$$

(nach wachsenden n geordnet) würde also für $s=\frac{1}{2}$ konvergieren; also hätt
$L(s)$ für $\sigma>\frac{1}{2}$ keine Wurzel (das könnte wahr sein), also sicher für $\sigma=$
Wurzeln, also $-\frac{L'(s)}{L(s)}-v\frac{\zeta'(s+\frac{1}{2})}{\zeta(s+\frac{1}{2})}$ auf $\sigma=\frac{1}{2}$ Pole. Dies verträgt sich nic
mit dem (nur geläufige Schlüsse zusammenhängend formulierenden)

Hilfssatz: *Ist eine Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$$

für $s=s_0=\sigma_0+t_0 i$ *konvergent, so besitzt die für* $\sigma>\sigma_0$ *durch sie d*
finierte Funktion $k(s)$ *auf der Geraden* $\sigma=\sigma_0$ *keinen Pol.*

Beweis: Wird für $N=1, 2, \cdots$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{c_n}{n^{s_0}}=\delta_N$$

gesetzt, so ist

$$\delta_N\to 0 \tag{31}$$

und für jedes $t_1\gtrless 0$ und $\varepsilon>0$

$$k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{s_0}}\frac{1}{n^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n-\delta_{n+1}}{n^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}}$$

$$=\delta_1-\sum_{n=2}^{\infty}\delta_n\left(\frac{1}{(n-1)^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}}-\frac{1}{n^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}}\right)$$

$$=\delta_1-(\varepsilon+(t_1-t_0)i)\sum_{n=2}^{\infty}\delta_n\int_{n-1}^{n}\frac{du}{u^{1+\varepsilon+(t_1-t_0)i}},$$

$$|\varepsilon k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon)|\leqq\varepsilon|\delta_1|+\varepsilon\left|\varepsilon+(t_1-t_0)i\right|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\delta_n|}{(n-1)^{1+\varepsilon}},$$

hierin wegen (31) bei $\varepsilon\to 0$

$$\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\delta_n|}{(n-1)^{1+\varepsilon}}\to 0,$$

also

$$\varepsilon k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon)\to 0,$$

$$k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon)=o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

so daß $k(s)$ in $s=\sigma_0+t_1 i$ keinen Pol haben kann.

Drittes Kapitel.

Eine Vermutung von Stieltjes.

§ 8.

Widerlegung einer Vermutung von Stieltjes.

Aus dem letzten Hilfssatz folgt sofort die Unrichtigkeit der Vermutung
on Stieltjes (4, Bd. 1, S. 163):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\sqrt{n}}$$

onvergiere.

Denn es wäre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

r $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, also $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ (Riemannsche Vermutung);
so wären auf $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Pole von $\frac{1}{\zeta(s)}$ gelegen, entgegen dem
ilfssatz.

Übrigens sagt Stieltjes, daß er die obige Vermutung nicht beweisen
önne, während er bekanntlich im Besitze eines Beweises von

2) $$M(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) = O(\sqrt{x})$$

i sein behauptete. Ob (32) richtig ist, weiß man bekanntlich nicht.
2) besagt mehr als die Riemannsche Vermutung, da aus (32) wegen

3) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^s} = s \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \frac{M(u)}{u^{s+1}} du \quad (\sigma > \tfrac{1}{2}),$$

$$\frac{1}{\zeta(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon)} = O\int_1^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}\, du}{u^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

e Einfachheit aller Wurzeln von $\zeta(s)$ folgen würde.

Übrigens ergibt sich ebenso rasch, daß

4) $$M(x) = o(\sqrt{x})$$

lsch ist; denn für $\sigma > \frac{1}{2}$ würde dann (33) gelten, also

$$\frac{1}{\zeta(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon)} = o\int_1^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}\, du}{u^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

in.

Herr Mertens (8, S. 780) hatte auf analogem Wege nicht (34) widerlegt, sondern nur die Möglichkeit von

$$M(x) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\delta} x}\right) \tag{35}$$

(d. h. irgendeiner Formel

$$M(x) = O(G(x))$$

mit $G(x) = o(\sqrt{x})$ und konvergentem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$), indem aus (35) wegen

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mu(n)}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}} = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}}$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} M(n)\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}} - \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+t_1 i}}\right) + \frac{M(x)}{([x]+1)^{\frac{1}{2}+t_1 i}},$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}} - \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+t_1 i}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

die (auf Grund der Nichtexistenz des Limes von rechts bei Annäherung an einen Pol unmögliche) Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ auf der ganzen Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ folgen würde.

Analog hatte Herr von Koch (2, S. 1245 bis 1246, und *Contribution à la theorie des nombres premiers*, Acta Mathematica, Bd. 33 (1910 {S. 293 bis 320}, S. 295) nur (unter Benutzung einer Mitteilung von Herrn Phragmén) die Unmöglichkeit von

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqq x} \log p = x + O\left(x^{\frac{1}{2}-\delta}\right), \qquad \delta > 0$$

konstatiert, während schon durch analoge Schlüsse wie soeben bei $M(x)$ sogar

$$\psi(x) = x + o\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \tag{36}$$

sich als unmöglich herausstellt, weil $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, also im Falle (36) für $\sigma = \frac{1}{2}$ Pole besitzt und wegen der für $\sigma > 1$, unter der Annahme (36) sogar für $\sigma > \frac{1}{2}$ gültigen Identität

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(u) - u}{u^{s+1}}\, du$$

bei jedem $t_1 \gtrless 0$

$$-\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon\right)} = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

lgen würde. (Übrigens hat Herr Littlewood in der schon oben ge-nnten Note unter Benutzung einer längeren Reihe scharfsinniger Kunst-iffe sogar u. a. bewiesen:

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{\frac{1}{2}}} = -\infty, \qquad \limsup_{x=\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty.)$$

Viertes Kapitel.

Eine Behauptung von Herrn Torelli.

§ 9.

Widerlegung einer Behauptung von Herrn Torelli.

Es sei $\chi(n)$ ein Nicht-Hauptcharakter der Gruppe der zu k teiler-emden Restklassen. Wie ich schon auf S. 532 meiner Arbeit 21 hervor-hoben habe, hat Herr Torelli falsch bewiesen, daß

7) $$\prod_p \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}$$

r $s>0$ gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert, d. h. daß

8) $$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{2p^{2s}}+\ldots+\frac{\chi(p^m)}{mp^{ms}}+\ldots\right)$$

r $0<s<1$ konvergiert.

Ich habe aber dort diese Behauptung selbst nicht widerlegt, sondern ır betont, daß aus ihr die Konvergenz von

9) $$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

r $\sigma>\frac{1}{2}$, also ebenda

0) $$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}+0$$

lgen würde.

Ich füge hinzu, daß die Torellische Behauptung über (37), (38) nicht llgemein richtig ist; schärfer: 1. daß sie sogar für jedes einzelne k und des zugehörige $\chi(n)$ falsch ist; 2. daß sie sogar für jedes k, χ und jedes nzelne s der Strecke $0<s<\frac{1}{2}$ falsch ist.

1. Um nur zu zeigen, daß (38) für kein k, χ auf der ganzen Strecke $<s<1$ konvergieren kann, verfahre ich folgendermaßen: Wenn (38) für $<s<1$ konvergiert, konvergiert (39) für $\frac{1}{2}<s<1$, also für $\sigma>\frac{1}{2}$, also

(38) für $\sigma > \frac{1}{2}$, so daß ebenda (40) gilt. $L(s)$ hätte also unendlich viel Wurzeln auf $\sigma = \frac{1}{2}$.

Weil (38) für $0 < s < 1$ konvergieren würde, konvergierte

$$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi^2(p)}{2p^{2s}} \right)$$

für $\frac{1}{3} < s < 1$. Es werde ϑ auf der Strecke $\frac{1}{3} < \vartheta < \frac{1}{2}$ so gewählt, daß die dem Charakter χ^2 entsprechende Funktion $L_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2} + \vartheta$ keine Wurzel hat. (Das geht sicher, da $L_2(s)$ nur abzählbar viele Wurzeln hat.) Aus der Konvergenz von

$$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^\vartheta} + \frac{\chi^2(p)}{2p^{2\vartheta}} \right) = \sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2p^\vartheta} \right) \frac{1}{p^\vartheta}$$

folgt, daß

$$\sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2p^\vartheta} \right) \frac{1}{p^s} = \Psi(s)$$

für $\sigma > \vartheta$ konvergiert und regulär ist, also für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär ist.

Für $\sigma > 1$ ist nun

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \log L(s) - \tfrac{1}{2} \sum_p \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}} + \psi_1(s),$$

wo $\psi_1(s)$ (desgl. nachher $\psi_2(s), \ldots, \psi_5(s)$) in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär ist

$$\sum_p \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}} = \log L_2(2s) + \psi_2(s),$$

$$\sum_p \frac{\chi^2(p)}{2p^{s+\vartheta}} = \tfrac{1}{2} \log L_2(s+\vartheta) + \psi_3(s),$$

also

$$\Psi(s) \quad \log L(s) - \tfrac{1}{2} \log L_2(2s) + \tfrac{1}{2} \log L_2(s+\vartheta) + \psi_4(s),$$

$$\log L(s) - \tfrac{1}{2} \log L_2(2s) + \tfrac{1}{2} \log L_2(s+\vartheta) = \psi_5(s).$$

Aber auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ ist $L_2(s+\vartheta)$ regulär und $\neq 0$; auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$, exkl. $s = \frac{1}{2}$, ist $L_2(2s)$ (*Handbuch*, S. 459) regulär und $\neq 0$. $L(s)$ könnte also auf dieser Geraden nicht unendlich viele Nullstellen haben.

2. Es werde für ein k, χ die Reihe (38) in einem Punkte $s = \Theta$ mit $0 < \Theta < \frac{1}{2}$ konvergent angenommen. Das führt folgendermaßen zu einem Widerspruch. Ich setze $\left[\frac{1}{\Theta} \right] = q$. Dann würde wegen $(q+1)\Theta > 1$ die Reihe

$$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^\Theta} + \frac{\chi^2(p)}{2p^{2\Theta}} + \ldots + \frac{\chi^q(p)}{qp^{q\Theta}} \right) = \sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2p^\Theta} + \ldots + \frac{\chi^q(p)}{qp^{(q-1)\Theta}} \right) \frac{1}{p^\Theta}$$

konvergieren, also

$$\sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2\,p^{\Theta}} + \ldots + \frac{\chi^q(p)}{q\,p^{(q-1)\Theta}}\right)\frac{1}{p^s} = \Omega(s)$$

$\sigma > \Theta$ konvergieren, also für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär sein.

Für $\sigma > 1$ ist nun

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \log L(s) - \frac{1}{2}\log L_2(2s) + \omega_1(s),$$

$\omega_1(s)$ (desgl. nachher $\omega_2(s), \ldots, \omega_{q+1}(s)$) in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regu- ist,

$$\sum_p \frac{\chi^2(p)}{2\,p^{s+\Theta}} = \frac{1}{2}\log L_2(s+\Theta) + \omega_2(s),$$

d, wenn $L_3(s), \ldots, L_q(s)$ die den Charakteren $\chi^3, \ldots \chi^q$ entsprechenden nktionen sind,

$$\sum_p \frac{\chi^3(p)}{3\,p^{s+2\Theta}} = \frac{1}{3}\log L_3(s+2\Theta) + \omega_3(s),$$

. . . . . .

$$\sum_p \frac{\chi^q(p)}{q\,p^{s+(q-1)\Theta}} = \frac{1}{q}\log L_q(s+(q-1)\Theta) + \omega_q(s),$$

o

$$s) = \log L(s) - \frac{1}{2}\log L_2(2s) + \frac{1}{2}\log L_2(s+\Theta) + \ldots + \frac{1}{q}\log L_q(s+(q-1)\Theta) + \omega_{q+1}(s).$$

Der Widerspruch ist also da, wenn ich in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ einen ht reellen Punkt s_0 finden kann, wo zwar $L(s)$ verschwindet, aber ine der Funktionen $L_2(s+\Theta), \ldots, L_q(s+(q-1)\Theta)$ verschwindet.

Nun hat $L(s)$ bekanntlich (*Handbuch*, S. 532 bis 533) im Rechteck $\leqq \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ für genügend großes T mehr als $\frac{1}{2\cdot 3{,}2}\,T\log T$ Wurzeln.

er nach einem Satze von Herrn Bohr und mir (*Ein Satz über Dirichlet- he Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen*, ndiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 37 (1914), S. 269 bis 272) t jede der Funktionen $L_2(s+\Theta), \ldots, L_q(s+(q-1)\Theta)$ dort bei wachsen- m T nur $O(T)$ Wurzeln. Es gibt also ein s_0 gewünschter Art.

Göttingen, den 8. Juli 1917.

(Eingegangen am 9. Juli 1917.)

Nachtrag während der Drucklegung (26. 8. 1917).

Heute erhielt ich das soeben erschienene Heft 2 des Bandes 41 d
Acta Mathematica. Von der darin enthaltenen hochbedeutsamen Arb
der Herren Hardy und Littlewood *Contributions to the theory of t*
Riemann Zeta-function and the theory of the distribution of primes (S. 1
bis 196) beschäftigt sich der Abschnitt 2. 3 *On an assertion of Tschebysch*
(S. 141 bis 151) mit der ersten Tschebyschefschen Behauptung I mein
gegenwärtigen Abhandlung. Ich lerne zu meiner Freude von den Herr
Hardy und Littlewood, daß aus der Richtigkeit von II die Richtigke
von I folgen würde, durch eine längere, kräftige Hilfsmittel heranziehen
Beweiskette. Und ich habe, ohne es zu kennen, ein Desideratum d
Herren Hardy und Littlewood erfüllt, indem ich oben bewiesen habe, d
umgekehrt II aus I folgt. Denn sie sagen im Abschnitt 1. 2 der Einleitu
(S. 122): *There seems to be little doubt that, if this assumption* (II) *is fals*
then Tschebyschef's assertion (I) *is also false, but this we have n*
succeeded in proving rigorously[1]). *The difficulties which have debarre*
us from a proof are of the same nature as those which have prevented u
from deducing the inequalities . . . from our explicit formula for the fun
tion . . . Und sie bemerken im Textabschnitt selbst (S. 148): *We have th*
established the truth of Tschebyschef's assertion, under the assumptio
of the truth of the analogue of the Riemann hypothesis. The nature o
the proof makes it seem almost certain that the assertion must be fal
if the hypothesis is false, as the term . . . must then be overwhelmed b
oscillatory terms of higher order. But, as we explained in 1. 2, w
have been unable to find a rigorous proof.

Ich füge noch hinzu, daß aus meinem in § 3 bewiesenen Satz „a
$g(x) \geqq 0$ für $0 < x \leqq q$ folgt II“ in Verbindung mit dem Hardy
Littlewoodschen Satz „aus II folgt $g(x) \to \infty$“ die sehr überraschend
Tatsache sich ergibt: *Wenn* $\liminf_{x=\infty} g(x)$ *endlich ist, so ist* $\liminf_{x=\infty} g(x) \leqq 0$

[1]) In der Voranzeige dieses Abschnitts, welche unter gleichem Titel in de
Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 14 (1915), Records o
Proceedings at Meetings, S. XV bis XVI, erschien — ich erfuhr ihre Existenz aus de
oben genannten Arbeit der Herren Hardy und Littlewood und konnte mir in
zwischen eine Abschrift verschaffen — war schon dasselbe Desideratum mit ähn
lichen Worten formuliert. (16. 9. 1917.)

Die Ermittlung hyperbolischer und elliptischer linearer Strahlenkongruenzen aus zwei Paar reziproker Polaren für eine Fläche II. Ordnung

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Bestimmen vier windschiefe Strahlen p, q, r, s eine sie verbindende neare Kongruenz K_1^1, so bestimmen sie auch einen F^2-Büschel, für dessen lächen sowohl p, q und r, s als auch die übrigen ∞^2 Strahlen von K_1^1 paarweise reziprok polar sind[1]). Der geschart involutorische Raum Σ_g von K_1^1 ist olarinvariant für jede Fläche des Büschels und also auch jede Fläche des üschels invariant für die involutorische Kollineation von Σ_g. Die vier trahlen p, q, r, s gehören keiner Regelschar II. Ordnung an, somit liegen on den ∞^2 Paaren reziprok polarer Kongruenzstrahlen überhaupt keine wei in einer Regelschar II. Ordnung, und die Flächen des F^2-Büschels önnen beidscharig involutorische Regelflächen oder reelle strahlenlose der imaginäre Flächen II. Ordnung sein[2]). Der F^2-Büschel umfaßt nur ann reelle und imaginäre Flächen, wenn durch die vier Strahlen p, q, r, s ne hyperbolische lineare Kongruenz geht[3]). Somit schließen wir:

Bestimmen vier windschiefe Strahlen p, q, r, s eine sie verbindende neare Kongruenz und sind p, q und r, s reziproke Polaren für eine elle strahlenlose oder imaginäre Fläche II. Ordnung, so ist die Kongruenz hyperbolisch.

Die Strahlen p, q und r, s seien nun reziproke Polaren für eine Regelche II. Ordnung R^2.

Schneiden die vier Strahlen p, q, r, s die Fläche R^2 in reellen Punkten, nd gehören die durch p, q und r, s getroffenen Strahlenpaare in jeder egelschar von R^2 zu einer hyperbolischen oder in jeder Regelschar zu

[1]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz. urnal für Mathematik 134 (1907), Nr. 12.

[2]) a. a. O., Nr. 13.

[3]) a. a. O., Nr. 14.

einer elliptischen Involution, so ist die p, q, r, s verbindende lineare Strahlenkongruenz K_1^1 hyperbolisch. Sie ist elliptisch, wenn jene Strahlenpaare in der einen Regelschar eine hyperbolische, in der andern eine elliptische Involution bestimmen[4]).

Wie entscheiden wir aber, ob die lineare Kongruenz K_1^1 hyperbolisch oder elliptisch ist, sobald eins der Strahlenpaare — etwa p, q — oder jedes beider Strahlenpaare p, q und r, s mit der Regelfläche R^2 keine reellen Punkte gemein hat?

Die Regelfläche R^2 ist beidscharig involutorisch in dem geschart involutorischen Raume Σ_g von K_1^1 enthalten. Ist eine der Regelscharen von R^2 elliptisch involutorisch, so schneidet eine beliebige Ebene ε eines Strahles e von K_1^1 die involutorischen Regelscharen der Fläche in zwei Punktinvolutionen eines Kegelschnittes, die zwei reelle einander zugeordnete Punkte gemein haben. Beide Punkte sind auch in Σ_g einander zugeordnet und liegen also auf dem Strahle e. Folglich gilt:

„Ist in einem geschart involutorischen Raume Σ_g eine Regelschar einer beidscharig involutorischen Regelfläche R^2 elliptisch involutorisch, so schneiden alle Doppelstrahlen von Σ_g die Fläche R^2 in reellen Punkten".

In einer beidscharig involutorischen Regelfläche eines elliptisch geschart involutorischen Raumes ist stets eine Regelschar elliptisch involutorisch. Somit gehören die vier Strahlen p, q, r, s zu einer hyperbolischen Kongruenz, wenn sie nicht alle die Fläche R^2 in reellen Punkten schneiden. Zusammengefaßt ergibt sich also:

Bestimmen vier windschiefe Strahlen p, q, r, s eine sie verbindende lineare Kongruenz und sind p, q und r, s reziproke Polaren für eine Regelfläche II. Ordnung R^2, so ist die lineare Kongruenz:

hyperbolisch, wenn die vier Strahlen p, q, r, s die Fläche R^2 in reellen Punkten schneiden, und die durch p, q und r, s getroffenen Strahlenpaare in jeder Schar der Fläche entweder zu einer hyperbolischen oder in jeder Schar zu einer elliptischen Involution gehören, oder wenn von den vier Strahlen p, q, r, s zwei oder alle vier mit der Fläche konjugiert imaginäre Punkte gemein haben

elliptisch, wenn alle vier Strahlen die Fläche R^2 in reellen Punkten schneiden, aber die durch p, q und r, s getroffenen Strahlenpaare in der einen Regelschar von R^2 zu einer hyperbolischen, in der andern zu einer elliptischen Involution gehören.

Berlin-Halensee, den 18. Mai 1917.

[4]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, Nr. 108.

(Eingegangen am 25. Juli 1917.)

Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei großen Werten der unabhängig Variabeln.

Von

Oskar Perron in Heidelberg (z. Z. im Felde).

§ 1.

Formulierung der Aufgabe.

Wenn die Koeffizienten der linearen homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)\, y = 0$$

r $x \geqq x_0$ stetig sind und für $x \to \infty$ gewissen Grenzwerten zustreben:

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

e beliebige komplexe Zahlen sein dürfen, so hängt das infinitäre Verlten der Integrale für $x \to \infty$ ab von den Wurzeln der „charakteristischen eichung"

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Ein sehr allgemeines Theorem in dieser Richtung ist[1])

Satz 1. *Zu jeder Wurzel ϱ der charakteristischen Gleichung gibt es i Integral y, welches den folgenden Bedingungen genügt:*

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n)}|}{e^{(r+\varepsilon)x}} = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n-1)}|}{e^{(r-\varepsilon)x}} = \infty.$$

ıbei ist r der reelle Teil von ϱ, und ε darf eine beliebig kleine positive ıhl sein.

---

[1]) Vgl. Satz 8 meiner Arbeit, Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die ıbhängig Variable reell ist. Zweite Mitteilung, Journal für die reine und angendte Mathematik 143 (1913), S. 25—50.

Wenn ϱ die einzige Wurzel mit dem reellen Teil r ist, wenn also die a. a. O. erwähnte zu ϱ gehörige Klasse *nur ein* Integral enthält, läßt sich das infinitäre Verhalten dieses Integrals noch viel genauer angeben. Wir wollen nämlich in der vorliegenden Arbeit den folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Ist ϱ_0 eine einfache Wurzel der charakteristischen Gleichung, deren reeller Teil von dem reellen Teil jeder anderen Wurzel verschieden ist, so gibt es Integrale y, welche den folgenden Bedingungen genügen:*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \varrho_0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y''}{y} = \varrho_0^2, \ldots, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(n)}}{y} = \varrho_0^n.$$

Sind noch k Wurzeln vorhanden, deren reeller Teil größer als der von ϱ_0 ist, so gibt es genau $n-k$ linear unabhängige Integrale dieser Art.

Für den Fall, daß ϱ_0 die Wurzel mit dem größten reellen Teil ist, also für $k=0$, ist der Satz bereits a. a. O. bewiesen (vgl. Satz 5). Für den allgemeinen Fall haben wir zum Beweis zwei Sätze nötig, die auch an sich Interesse verdienen und die wir zunächst vorausschicken. Der erste bezieht sich auf ein System von n linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung und lautet:

Satz 3. *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine n-reihige Matrix, und s eine reelle Zahl, die größer ist als der reelle Teil einer jeden Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|A - E\varrho| \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Dann gibt es eine positive Zahl η von solcher Beschaffenheit, daß für jede Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$y_\lambda' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda\mu}(x)\, y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n),$$

sofern die Koeffizienten $f_{\lambda\mu}(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig sind und den Bedingungen

$$|f_{\lambda\mu}(x) - a_{\lambda\mu}| \leqq \eta$$

genügen, die folgenden Ungleichungen statthaben:

$$|y_\lambda(x)| \leqq G \cdot (|y_1(x_0)| + |y_2(x_0)| + \ldots + |y_n(x_0)|) \cdot e^{sx}$$

$$\text{für } x \geqq x_0; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n.$$

ıbei bedeutet G eine positive Zahl, die weder von x noch von den nfangswerten $y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)$ abhängt.

Der zweite Satz, den wir nötig haben, bezieht sich auf eine *inhomogene* eare Differentialgleichung; er lautet:

Satz 4. *Die Koeffizienten der Differentialgleichung*

$$y^{(m)} + \omega_1(x)\, y^{(m-1)} + \ldots + \omega_m(x)\, y = u(x)$$

gen für $x \geqq x_0$ stetig sein und außerdem den folgenden Bedingungen nügen:

$$\lim_{x=\infty} \omega_\lambda(x) = c_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, m),$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{u'(x)}{u(x)} = \sigma .$$

erner habe jede Wurzel der Gleichung

$$\varrho^m + c_1 \varrho^{m-1} + \ldots + c_m = 0$$

nen größeren reellen Teil als die Zahl σ. Dann hat die Differentialeichung ein und nur ein Integral y, für welches die folgenden Beziehungen ten:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \sigma, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y''}{y} = \sigma^2, \ \ldots, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(m)}}{y} = \sigma^m .$$

§ 2.

Beweis zu Satz 3.

Dieser Satz ist eine leichte Erweiterung eines Teiles von dem a. a. O. tgeteilten Satz 1; der folgende Beweis unterscheidet sich nur wenig von n damaligen.

Bekanntlich gibt es eine Matrix B, durch welche die Matrix A in Form:

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} \varrho_1, & c_{12}, & \cdots, & c_{1n} \\ 0, & \varrho_2, & \cdots, & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \cdots, & \varrho_n \end{pmatrix}$$

nsformiert wird, wo $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln der charakteristischen eichung sind, und die $c_{\lambda\mu}$ gewisse Zahlen, auf deren Werte es nicht anmmt. Wir bezeichnen mit b_1 bzw. b_2 den größten absoluten Betrag, : unter den Elementen der Matrix B bzw. B^{-1} vorkommt; ferner setzen wir

$$\operatorname*{Max}_{\lambda,\,\mu} |c_{\lambda\mu}| = c .$$

Bedeutet dann F die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} f_{11}(x), \ldots, f_{1n}(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}(x), \ldots, f_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

so folgt aus den Voraussetzungen des Satz 3 sogleich:

$$B^{-1}FB = \begin{pmatrix} \varrho_1 + \varphi_{11}(x), & c_{12} + \varphi_{12}(x), \ldots, & c_{1n} + \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varrho_2 + \varphi_{22}(x), \ldots, & c_{2n} + \varphi_{2n}(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x), \ldots, & \varrho_n + \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

wobei die $\varphi_{\lambda\mu}(x)$ für $x \geqq x_0$ stetige Funktionen sind, die den Ungleichungen genügen:

$$|\varphi_{\lambda\mu}(x)| \leqq M\eta \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n); \tag{5}$$

M ist dabei eine von x und η unabhängige Zahl; man kann z. B. $M = n^2 b_1 b_2$ wählen.

Das Differentialgleichungssystem des Satz 3 läßt sich symbolisch in der Form schreiben:

$$(y_1', \ldots, y_n') = F(y_1, \ldots, y_n). \tag{6}$$

Durch die lineare Transformation

$$(y_1, \ldots, y_n) = B(z_1, \ldots, z_n), \tag{7}$$

geht es über in folgendes:

$$(z_1', \ldots, z_n') = B^{-1}FB(z_1, \ldots, z_n), \tag{8}$$

oder nach (4) in unsymbolischer Form:

$$z_\lambda' = \varrho_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu=\lambda+1}^{n} c_{\lambda\mu} z_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda\mu}(x) z_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Nach den Voraussetzungen des Satz 3 läßt sich, wenn dort nur η klein genug gewählt wird, gewiß eine Zahl α zwischen 0 und 1 angeben, für welche

$$s > \Re(\varrho_\lambda) + cn\alpha + nM\eta\alpha^{1-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

ist. Bedeutet dann $y_1, \cdots, y_n$ irgendein Integralsystem von (6), ferner $z_1, \cdots, z_n$ das vermöge (7) transformierte Integralsystem von (9), so kann man eine Zahl C bestimmen derart, daß die Ungleichungen

$$|z_\lambda| \leqq C\alpha^\lambda e^{sx} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

an der Stelle $x = x_0$ gelten. Insbesondere wird das durch die Zahl

$$C = \alpha^{-n} e^{-sx_0} b_2 (|y_1(x_0)| + \ldots + |y_n(x_0)|) \tag{12}$$

leistet. Denn aus (7) folgt:

$$(z_1, \ldots, z_n) = B^{-1}(y_1, \ldots, y_n),$$

so

$$|z_\lambda| \leqq b_2(|y_1| + \ldots + |y_n|) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n),$$

d speziell für $x = x_0$ mit Benutzung von (12):

$$|z_\lambda(x_0)| \leqq C\alpha^n e^{sx_0} \leqq C\alpha^\lambda e^{sx_0}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nun wollen wir zeigen, daß die Ungleichungen (11) auch für $x > x_0$ uernd bestehen bleiben. In der Tat, nehmen wir an, das wäre nicht der ll, so sei x_1 die untere Grenze derjenigen Werte $x(> x_0)$, für welche (11) ht gilt. An der Stelle $x = x_1$ ist dann für $\lambda = 1, 2, \cdots, n$ und einen stimmten Index k

$$\left.\begin{aligned} &|z_\lambda| \leqq C\alpha^\lambda e^{sx}, \\ &|z_k| = C\alpha^k e^{sx}, \\ &\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_k|^2 \geqq \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}(C\alpha^k e^{sx})^2 = C^2\alpha^{2k} s\, e^{2sx} \end{aligned}\right\} \text{für } x = x_1.$$

un folgt aber, wenn $\bar{z}_k$ die zu z_k konjugiert komplexe Größe bezeichnet, s (9), indem man speziell $\lambda = k$ setzt, dann mit $\bar{z}_k$ multipliziert, und den llen Teil nimmt:

$$\frac{d}{dx}|z_k|^2 = \Re(\bar{z}_k z_k') = \Re(\varrho_k)|z_k|^2 + \sum_{\mu=k+1}^{n} \Re(c_{k\mu} z_\mu \bar{z}_k) + \sum_{\mu=1}^{n} \Re(\varphi_{k\mu} z_\mu \bar{z}_k).$$

so ist gewiß auch mit Rücksicht auf (2) und (5)

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_k|^2 - \Re(\varrho_k)|z_k|^2 \leqq c\sum_{\mu=k+1}^{n}|z_\mu z_k| + M\eta\sum_{\mu=1}^{n}|z_\mu z_k|.$$

her für $x = x_1$ wegen (13) um so mehr

$$C^2\alpha^{2k} s\, e^{2sx} - \Re(\varrho_k) C^2\alpha^{2k} e^{2sx} \leqq c\sum_{\mu=k+1}^{n} C^2\alpha^{\mu+k} e^{2sx} + M\eta\sum_{\mu=1}^{n} C^2\alpha^{\mu+k} e^{2sx}$$
$$\leqq cnC^2\alpha^{1+2k} e^{2sx} + M\eta n C^2\alpha^{1+k} e^{2sx},$$

r nach Division[2]) durch $C^2\alpha^{2k} e^{2sx}$:

$$s - \Re(\varrho_k) \leqq cn\alpha + M\eta n\alpha^{1-k}.$$

---

[2]) Dazu muß $C \neq 0$, oder also nach (12)

$$|y_1(x_0)| + |y_2(x_0)| + \cdots + |y_n(x_0)| > 0$$

, so daß das triviale System identisch verschwindender Integrale zunächst aus- hließen ist. Bei der Formulierung des Satz 3 darf es aber offenbar wieder lassen werden.

Das widerspricht aber der Ungleichung (10), und damit ist die Gültigkeit von (11) für $x > x_0$ nachgewiesen. Wegen $\alpha < 1$ ist um so mehr

$$|z_\lambda| \leqq C e^{\alpha x} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (7) folgt nun:

$$|y_\lambda| \leqq b_1 (|z_1| + \ldots + |z_n|),$$

so daß nach der vorigen Ungleichung auch

$$|y_\lambda| \leqq n b_1 C e^{\alpha x}$$

ist für $x \geqq x_0$. Setzt man hier für C den Wert aus (12) ein, so ist Satz 3 bewiesen.

§ 3.

Beweis zu Satz 4.

Sei $y_1, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(m)} + \omega_1(x) y^{(m-1)} + \ldots + \omega_m(x) y = 0, \tag{14}$$

wo die $\omega_\lambda(x)$ die in Satz 4 auftretenden Koeffizienten sind, also

$$\lim_{x=\infty} \omega_\lambda(x) = c_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m). \tag{15}$$

Ferner bezeichnen wir mit $F_{\lambda\mu}(x, t)$ für $x \geqq x_0$, $t \geqq 0$ die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y_\nu(x+t) F_{\lambda 0}(x,t) + y'_\nu(x+t) F_{\lambda 1}(x,t) + \ldots \\ + y_\nu^{(m-1)}(x+t) F_{\lambda, m-1}(x,t) = y_\nu^{(\lambda)}(x) \end{aligned} \tag{16}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, m; \quad \lambda = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Durch Auflösung ergibt sich:

$$F_{\lambda\mu}(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x+t) & y'_1(x+t) & \ldots & y_1^{(\lambda)}(x) & \ldots & y_1^{(m-1)}(x+t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m(x+t) & y'_m(x+t) & \ldots & y_m^{(\lambda)}(x) & \ldots & y_m^{(m-1)}(x+t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x+t) & y'_1(x+t) & \ldots & y_1^{(\mu)}(x+t) & \ldots & y_1^{(m-1)}(x+t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m(x+t) & y'_m(x+t) & \ldots & y_m^{(\mu)}(x+t) & \ldots & y_m^{(m-1)}(x+t) \end{vmatrix}} \tag{17}$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Differenziiert man (16) nach t und berücksichtigt, daß y_ν der Differentialgleichung (14) genügt, so erhält man:

$$(x+t)\left[\frac{\partial}{\partial t}F_{\lambda 0}(x,t)-\omega_m(x+t)F_{\lambda,\,m-1}(x,t)\right]$$

$$y_\nu'(x+t)\left[\frac{\partial}{\partial t}F_{\lambda 1}(x,t)+F_{\lambda 0}(x,t)-\omega_{m-1}(x+t)F_{\lambda,\,m-1}(x,t)\right]+\ldots$$

$$y_\nu^{(m-1)}(x+t)\left[\frac{\partial}{\partial t}F_{\lambda,\,m-1}(x,t)+F_{\lambda,\,m-2}(x,t)-\omega_1(x+t)F_{\lambda,\,m-1}(x,t)\right]=0\,.$$

dies für $\nu=1,2,\ldots,m$ gilt, und die Determinante des Systems (als onskische Determinante) bekanntlich nicht verschwindet, müssen die igen Klammern verschwinden, so daß die $F_{\lambda\mu}(x,t)$ als Funktionen von lem folgenden System linearer Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}F_{\lambda 0}(x,t)= & \omega_m(x+t)F_{\lambda,\,m-1}(x,t),\\ \dfrac{\partial}{\partial t}F_{\lambda 1}(x,t)=-F_{\lambda,0}(x,t)+\omega_{m-1}(x+t)F_{\lambda,\,m-1}(x,t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial}{\partial t}F_{\lambda,\,m-1}(x,t)=-F_{\lambda,\,m-2}(x,t)+\omega_1(x+t)F_{\lambda,\,m-1}(x,t),\end{cases}$$

$$(\lambda=0,1,\ldots,m-1).$$

Anfangsbedingungen sind nach (17):

$$F_{\lambda\mu}(x,0)=\begin{cases}0 & \text{für } \mu\neq\lambda,\\ 1 & \text{für } \mu=\lambda.\end{cases}$$

Wegen (15) ist für genügend große Werte von x, etwa für $x\geqq x_1$, System (18) für $t\geqq 0$ von der in Satz 3 vorkommenden Art; nur ist durch m und x durch t ersetzt. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\begin{vmatrix}0-\varrho & 0\ldots\ldots 0 & 0 & c_m\\ -1 & 0-\varrho\ldots. 0 & 0 & c_{m-1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0\ldots. -1 & 0-\varrho & c_2\\ 0 & 0\ldots\ldots 0 & -1 & c_1-\varrho\end{vmatrix}=0,$$

r ausgerechnet:

$$\varrho^m-c_1\varrho^{m-1}+c_2\varrho^{m-2}-\ldots+(-1)^m c_m=0\,.$$

zeichnet man ihre Wurzeln mit

$$-\tau_1,\ -\tau_2,\ldots,-\tau_m,$$

ist nach den Voraussetzungen des Satz 4: $\Re(\tau_\lambda)>\Re(\sigma)$. Man kann also e reelle Zahl s angeben derart, daß die Ungleichungen

$$\Re(-\sigma)>s>\Re(-\tau_\lambda)\qquad(\lambda=1,2,\ldots,m)$$

gelten. Aus Satz 3, angewandt auf das System (18), folgt dann:

$$|F_{\lambda\mu}(x,t)| \leqq G\cdot(|F_{\lambda 0}(x,0)|+|F_{\lambda 1}(x,0)|+\ldots+|F_{\lambda,m-1}(x,0)|)\cdot e^{\varepsilon t},$$

wo die Zahl G von x und t nicht abhängt; oder also nach (19):

$$|F_{\lambda\mu}(x,t)| \leqq G\cdot e^{\varepsilon t} \qquad (\text{für } x \geqq x_1,\ t \geqq 0). \tag{21}$$

In der Folge benötigen wir noch eine zweite Abschätzung der Funktion $F_{\lambda\mu}(x,t)$. Um sie zu erhalten, bezeichnen wir mit $G_{\lambda\mu}(t)$ die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} G'_{\lambda 0}(t) = c_m\, G_{\lambda,m-1}(t), \\ G'_{\lambda 1}(t) = -G_{\lambda 0}(t) + c_{m-1}\, G_{\lambda,m-1}(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G'_{\lambda,m-1}(t) = -G_{\lambda,m-2}(t) + c_1\, G_{\lambda,m-1}(t), \\ \qquad (\lambda = 0,1,\ldots,m-1), \end{cases} \tag{22}$$

wobei die Anfangsbedingungen die folgenden sein sollen:

$$G_{\lambda\mu}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \lambda, \\ 1 & \text{für } \mu = \lambda. \end{cases} \tag{23}$$

Analog zu (21) ist dann sicher

$$|G_{\lambda\mu}(t)| \leqq G\cdot e^{\varepsilon t} \qquad (\text{für } t \geqq 0). \tag{24}$$

Der Vergleich von (22) und (23) mit (18) und (19) führt aber weiter sofort zu der Vermutung

$$\lim_{x=\infty} F_{\lambda\mu}(x,t) = G_{\lambda\mu}(t) \qquad (\lambda,\mu = 0,1,\ldots,m-1), \tag{25}$$

deren Richtigkeit wir jetzt in der Tat beweisen wollen. Dazu setzen wir

$$F_{\lambda\mu}(x,t) = G_{\lambda\mu}(t) + h_{\lambda\mu}(x,t) \qquad (\lambda,\mu = 0,1,\ldots,m-1). \tag{26}$$

Aus (18) und (22) ergibt sich dann für $h_{\lambda\mu}(x,t)$ das System von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} h_{\lambda 0}(x,t) = \omega_m(x+t)\, h_{\lambda,m-1}(x,t) - 0 \\ \qquad\qquad + [\omega_m(x+t) - c_m]\, G_{\lambda,m-1}(t), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} h_{\lambda 1}(x,t) = \omega_{m-1}(x+t)\, h_{\lambda,m-1}(x,t) - h_{\lambda 0}(x,t) \\ \qquad\qquad + [\omega_{m-1}(x+t) - c_{m-1}]\, G_{\lambda,m-1}(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial t} h_{\lambda,m-1}(x,t) = \omega_1(x+t)\, h_{\lambda,m-1}(x,t) - h_{\lambda,m-2}(x,t) \\ \qquad\qquad + [\omega_1(x+t) - c_1]\, G_{\lambda,m-1}(t), \\ \qquad (\lambda = 0,1,\ldots,m-1) \end{cases} \tag{27}$$

den Anfangsbedingungen

$$h_{\lambda\mu}(x,0)=0 \qquad (\lambda,\mu=0,1,\ldots,m-1).$$

Nun folgt aus (15), wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, genügend große Werte von x, sagen wir für $x \geqq x_\varepsilon$, und für $t \geqq 0$

$$\begin{cases} |\omega_\lambda(x+t)-c_\lambda| \leqq \varepsilon \\ |\omega_\lambda(x+t)| \leqq K \end{cases} \qquad (\lambda=1,2,\ldots,m),$$

K eine Konstante ist. Bestimmt man daher die Funktion $H_\lambda(t)$ so, daß

$$\begin{cases} H_\lambda'(t)=K\cdot H_\lambda(t)+H_\lambda(t)+\varepsilon|G_{\lambda,m-1}(t)| \\ H_\lambda(0)=0 \end{cases} \qquad (\lambda=0,1,\ldots,m-1)$$

so ergibt ein Vergleich mit (27) und (28):

$$|h_{\lambda\mu}(x,t)| \leqq H_\lambda(t) \qquad \text{für } x \geqq x_\varepsilon,\ t \geqq 0.$$
$$(\lambda,\mu=0,1,\ldots,m-1)$$

Um das in aller Strenge nachzuweisen, integrieren wir (27) nach t von s t; es ergibt sich:

$$x,t)=\int_0^t \omega_{m-\mu}(x+t)\,h_{\lambda,m-1}(x,t)\,dt-\int_0^t h_{\lambda,\mu-1}(x,t)\,dt$$

$$+\int_0^t [\omega_{m-\mu}(x+t)-c_{m-\mu}]\,G_{\lambda,m-1}(t)\,dt \qquad (\lambda,\mu=0,1,\ldots,m-1),$$

ei $h_{\lambda,-1}(x,t)=0$ zu setzen ist. Mit Berücksichtigung von (29) folgt ıus:

$$(x,t)| \leqq K\int_0^t |h_{\lambda,m-1}(x,t)|\,dt+\int_0^t |h_{\lambda,\mu-1}(x,t)|\,dt+\varepsilon\int_0^t |G_{\lambda,m-1}(t)|\,dt,$$

wenn man

$$\operatorname*{Max}_{\mu=0}^{m-1}|h_{\lambda\mu}(x,t)|=\Psi_\lambda(x,t) \qquad (\lambda=0,1,\ldots,m-1)$$

, auch:

$$\Psi_\lambda(x,t) \leqq K\int_0^t \Psi_\lambda(x,t)\,dt+\int_0^t \Psi_\lambda(x,t)\,dt+\varepsilon\int_0^t |G_{\lambda,m-1}(t)|\,dt,$$

wegen (28):

$$\Psi_\lambda(x,0)=0.$$

Integriert man ebenso die Gleichung (30) von 0 bis t, und subtrahiert o entstehende Gleichung von (33), so kommt:

$$\Psi_\lambda(x,t)-H_\lambda(t) \leqq (K+1)\int_0^t [\Psi_\lambda(x,t)-H_\lambda(t)]\,dt \quad (\lambda=0,1,\ldots,m-1).$$

Nun hat die Funktion

$$\Psi_\lambda(x,t)-H_\lambda(t)$$

für $t=0$ den Wert 0, und wir wollen zeigen, daß sie für $t>0$ dauern $\leqq 0$ bleibt. Wäre das nicht der Fall, so sei t_0 die untere Grenze derjenigen Werte $t\,(\geqq 0)$, für welche die Funktion (36) positiv wird. Nach (35) ist dann für $t>t_0$

$$\Psi_\lambda(x,t)-H_\lambda(t)\leqq(K+1)\int_{t_0}^{t}[\Psi_\lambda(x,t)-H_\lambda(t)]\,dt. \tag{37}$$

Ist γ eine beliebig kleine positive Zahl, so hat die Funktion (36) im Intervall $(t_0, t_0+\gamma)$ ein Maximum M, welches größer als Null ist. Wird dieses etwa an der Stelle $t_0+\gamma_0$ erreicht, so folgt aus (37) für $t=t_0+\gamma_0$:

$$M\leqq(K+1)\,M\,\gamma_0\leqq(K+1)\,M\,\gamma.$$

Das ist aber wegen $M>0$ ein Widerspruch, wenn nur γ klein genug gewählt wurde. Somit ist die Funktion (36) in der Tat stets $\leqq 0$, und damit ist auch Ungleichung (31) bewiesen.

Für $H_\lambda(t)$ findet man durch Integration der Differentialgleichung (36)

$$H_\lambda(t)=\varepsilon P_\lambda(t),$$

wo $P_\lambda(t)$ eine Funktion von t allein ist, unabhängig von ε und auch von x. Somit ergibt sich aus (31):

$$|h_{\lambda\mu}(x,t)|\leqq\varepsilon P_\lambda(t) \qquad \text{für } x\geqq x_\varepsilon,\ t\geqq 0. \tag{38}$$
$$(\lambda,\mu=0,1,\ldots,m=1)$$

Diese Formel enthält in Verbindung mit (26) die angekündigte zweite Abschätzung von $F_{\lambda\mu}(x,t)$. Da ε beliebig klein sein darf, ergibt sich aus ihr zugleich die Richtigkeit der Formel (25).

§ 4.

Fortsetzung des Beweises zu Satz 4.

Ist $u(x)$ die in Satz 4 auftretende Funktion, und setzt man

$$\frac{u'(x)}{u(x)}=\sigma+v(x), \tag{39}$$

so hat $v(x)$ für $x\to\infty$ den Grenzwert Null. Da die Zahl $-\Re(\sigma+\varepsilon)$ nach (20) positiv ist, wird also für genügend große Werte von x, etwa für $x\geqq x_2$

$$|v(x)|\leqq-\tfrac{1}{2}\Re(\sigma+\varepsilon) \qquad (\text{für } x\geqq x_2) \tag{40}$$

sein. Aus (39) folgt dann durch Integration für $x\geqq x_2$:

$$|u(x)|=|u(x_2)\,e^{\sigma(x-x_2)+\int_{x_2}^{x}v(x)\,dx}|\leqq|u(x_2)|\,e^{\frac{1}{2}\Re(\sigma+\varepsilon)\cdot(x-x_2)}.$$

rnach und nach (21) haben die Integrale

$$\Psi_{\lambda\mu}(x) = \int_0^\infty F_{\lambda\mu}(x,t)\,u(x+t)\,dt \qquad (\lambda,\mu = 0,1,\ldots,m-1)$$

en Sinn, sofern nur x mindestens gleich der größeren der beiden Zahlen und x_2 ist. Statt (41) kann man schreiben:

$$\Psi_{\lambda\mu}(x) = \int_x^\infty F_{\lambda\mu}(x,t-x)\,u(t)\,dt,$$

r, indem man für $F_{\lambda\mu}$ den Wert aus (17) einsetzt:

$$\begin{cases} \Psi_{\lambda\mu}(x) = \int_x^\infty \Delta_{\lambda\mu}(x,t)u(t)\,dt, \\ \Delta_{\lambda\mu}(x,t) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1(t), & y_1'(t), & \ldots, & y_1^{(\lambda)}(x), & \ldots, & y_1^{(m-1)}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_m(t), & y_m'(t), & \ldots, & y_m^{(\lambda)}(x), & \ldots, & y_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t), & y_1'(t), & \ldots, & y_1^{(\mu)}(t), & \ldots, & y_1^{(m-1)}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_m(t), & y_m'(t), & \ldots, & y_m^{(\mu)}(t), & \ldots, & y_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}} \\ \qquad\qquad (\lambda,\mu = 0,1,\ldots,m-1). \end{cases}$$

Definiert man jetzt auch Funktionen $\Psi_{m\mu}(x)$ dadurch, daß man die ichung (42) auch für $\lambda = m$ gelten läßt, so folgt aus (42), weil y_μ der ferentialgleichung (14) genügt, sofort:

$$\Psi_{m\mu}(x) + \omega_1(x)\,\Psi_{m-1,\mu}(x) + \ldots + \omega_m(x)\Psi_{0\mu}(x) = 0.$$

ner erhält man aus (42) durch Differentiation[3]):

$$\Psi'_{\lambda\mu}(x) = \Psi_{\lambda+1,\mu}(x) - \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \mu, \\ u(x) & \text{für } \lambda = \mu; \end{cases}$$

insbesondere für $\mu = m-1$:

$$\Psi'_{\lambda,\,m-1}(x) = \Psi_{\lambda+1,\,m-1}(x) \qquad (\lambda = 0,1,\ldots,m-2),$$

$$\Psi'_{m-1,\,m-1}(x) = \Psi_{m,\,m-1}(x) - u(x).$$

raus ergibt sich:

$$\begin{cases} \Psi_{\lambda,\,m-1}(x) = \Psi^{(\lambda)}_{0,\,m-1}(x) \qquad (\lambda = 0,1,\ldots,m-1) \\ \Psi_{m,\,m-1}(x) = \Psi^{(m)}_{0,\,m-1}(x) + u(x), \end{cases}$$

wenn man das in (43) für $\mu = m-1$ einsetzt:

$$\Psi^{(m)}_{0,\,m-1}(x) + \omega_1(x)\,\Psi^{(m-1)}_{0,\,m-1}(x) + \ldots + \omega_m(x)\,\Psi_{0,\,m-1}(x) = -u(x).$$

[3]) Dabei ist es nicht nötig, unter dem Integralzeichen zu differenzieren; vielmehr n man die Zählerdeterminante in (42) nach den Elementen der $(\lambda+1)$ten Kolonne wickeln und dann diese Elemente vor das Integralzeichen ziehen.

Das besagt aber, daß die Funktion

$$y = -\Psi_{0,m-1}(x) \tag{47}$$

ein Integral der in Satz 4 auftretenden inhomogenen Differentialgleichung ist. Wir wollen zeigen, daß es die dort behaupteten Eigenschaften hat. Zu dem Zweck bemerken wir zunächst, daß nach (47) und (45)

$$y^{(\lambda)} = -\Psi_{\lambda,m-1}(x) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{48}$$

$$y^{(m)} = -\Psi_{m,m-1}(x) + u(x) \tag{49}$$

ist. Nunmehr bilden wir den Quotienten

$$\frac{\Psi_{\lambda\mu}(x)}{u(x)} = \int_0^\infty F_{\lambda\mu}(x,t)\frac{u(x+t)}{u(x)}\,dt \qquad (\lambda,\mu = 0,1,\ldots,m-1) \tag{50}$$

und untersuchen seinen Grenzwert für $x \to \infty$. Aus (39) folgt:

$$\frac{u(x+t)}{u(x)} = e^{\sigma t + \int_x^{x+t} v(\xi)\,d\xi}, \tag{51}$$

und daraus sogleich, weil $\lim_{x=\infty} v(x) = 0$ ist:

$$\lim_{x=\infty}\frac{u(x+t)}{u(x)} = e^{\sigma t}. \tag{52}$$

Ferner ist nach (25)

$$\lim_{x=\infty} F_{\lambda\mu}(x,t) = G_{\lambda\mu}(t),$$

und das führt ohne weiteres zu der Vermutung:

$$\lim_{x=\infty}\int_0^\infty F_{\lambda\mu}(x,t)\frac{u(x+t)}{u(x)}\,dt = \int_0^\infty G_{\lambda\mu}(t)\,e^{\sigma t}\,dt. \tag{53}$$

Um diese in aller Strenge zu bestätigen, bemerken wir zunächst, daß das rechts stehende Integral wegen (24) und (20) gewiß existiert. Sodann setzen wir

$$\int_0^\infty\left[F_{\lambda\mu}(x,t)\frac{u(x+t)}{u(x)} - G_{\lambda\mu}(t)\,e^{\sigma t}\right]dt = \int_0^z + \int_z^\infty \tag{54}$$

und behalten uns die geeignete Wahl der positiven Zahl z noch vor. Für genügend große Werte von x ist nach (51) und (40)

$$\left|\frac{u(x+t)}{u(x)}\right| \leqq e^{\frac{1}{2}\Re(\sigma-\varepsilon)t}.$$

rücksichtigt man außerdem die Abschätzungen (21) und (24), so ergibt
n für das zweite auf der rechten Seite von (54) auftretende Integral:

$$\left|\int_z^\infty\right| \leqq \int_z^\infty \left[G\cdot e^{\frac{1}{2}\Re(\sigma+s)t} + G\cdot e^{\Re(\sigma+s)t}\right]dt < 2G\int_z^\infty e^{\frac{1}{2}\Re(\sigma+s)t}\,dt$$

$$= \frac{4G}{-\Re(\sigma+s)}\,e^{\frac{1}{2}\Re(\sigma+s)z}$$

In dem Integral $\int_0^z$ dagegen schätzen wir den Integranden auf andere
ise ab. Mit Hilfe von (26) und (51) ergibt sich:

$$\left|F_{\lambda\mu}(x,t)\frac{u(x+t)}{u(x)} - G_{\lambda\mu}(t)e^{\sigma t}\right|$$

$$= \left|G_{\lambda\mu}(t)\left(\frac{u(x+t)}{u(x)} - e^{\sigma t}\right) + h_{\lambda\mu}(x,t)\frac{u(x+t)}{u(x)}\right|$$

$$\leqq \left|G_{\lambda\mu}(t)e^{\sigma t}\right|\cdot\left|e^{\int_x^{x+t} v(\xi)\,d\xi} - 1\right| + \left|h_{\lambda\mu}(x,t)\,e^{\sigma t}\cdot e^{\int_x^{x+t} v(\xi)\,d\xi}\right|.$$

gen $\lim_{x=\infty} v(x) = 0$ ist aber, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl
eutet, für genügend große x, etwa für $x \geqq x'_\varepsilon$, und für $0 \leqq t \leqq z$:

$$\left|e^{\int_x^{x+t} v(\xi)\,d\xi} - 1\right| \leqq e^{\varepsilon t} - 1 \leqq e^{\varepsilon z} - 1.$$

raus und aus (38) folgt schließlich, wenn x mindestens gleich der
ßeren der Zahlen x_ε und x'_ε ist,

$$\left|F_{\lambda\mu}(x,t)\frac{u(x+t)}{u(x)} - G_{\lambda\mu}(t)e^{\sigma t}\right|$$

$$\leqq \left|G_{\lambda\mu}(t)\,e^{\sigma t}\right|\cdot(e^{\varepsilon z} - 1) + \varepsilon P_\lambda(t)\cdot\left|e^{\sigma t}\right|\cdot e^{\varepsilon z}.$$

o endlich:

$$\int_0^z \left[F_{\lambda\mu}(x,t)\frac{u(x+t)}{u(x)} - G_{\lambda\mu}(t)\,e^{\sigma t}\right]dt \leqq (e^{\varepsilon z} - 1)Q_{\lambda\mu}(z) + \varepsilon e^{\varepsilon z}R_\lambda(z),$$

die Funktionen $Q_{\lambda\mu}(z)$ und $R_\lambda(z)$ von ε und x nicht abhängen.
Zusammenfassend ergibt sich für das Integral (54) die folgende Ab-
ätzung:

$$\left|\int_0^\infty\right| \leqq (e^{\varepsilon z} - 1)Q_{\lambda\mu}(z) + \varepsilon e^{\varepsilon z}R_\lambda(z) + \frac{4G}{-\Re(\sigma+s)}\,e^{\frac{1}{2}\Re(\sigma+s)z}$$

hlt man hier zuerst z beliebig groß, so daß der letzte Term beliebig

klein wird, und dann ε beliebig klein, wozu nur eine Vergrößerung von x (aber nicht von z) nötig ist, so wird die ganze rechte Seite beliebig klein, und damit ist Formel (53) bewiesen.

Nach (50) kann man an Stelle von (53) auch schreiben:

$$(55)\quad \lim_{x=\infty} \frac{\Psi_{\lambda\mu}(x)}{u(x)} = \int_0^\infty G_{\lambda\mu}(t)\, e^{\sigma t} dt = J_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

wo das Zeichen $J_{\lambda\mu}$ nur als Abkürzung für das vorstehende Integral gebraucht ist. Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\sigma J_{\lambda\mu} = -G_{\lambda\mu}(0) - \int_0^\infty G'_{\lambda\mu}(t)\, e^{\sigma t} dt,$$

also mit Rücksicht auf (22):

$$\begin{aligned}\sigma J_{\lambda\mu} &= -G_{\lambda\mu}(0) + \int_0^\infty [G_{\lambda,\,\mu-1}(t) - c_{m-\mu}\, G_{\lambda,\,m-1}(t)]\, e^{\sigma t} dt \\ &= -G_{\lambda\mu}(0) + J_{\lambda,\,\mu-1} - c_{m-\mu} J_{\lambda,\,m-1},\end{aligned}$$

wobei $J_{\lambda,-1} = 0$ zu setzen ist. Für $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$ erhält man also der Reihe nach:

$$\begin{array}{lll} \sigma J_{\lambda 0} &= -G_{\lambda 0}(0) + 0 - c_m J_{\lambda,\,m-1}, & 1 \\ \sigma J_{\lambda 1} &= -G_{\lambda 1}(0) + J_{\lambda 0} - c_{m-1} J_{\lambda,\,m-1}, & \sigma \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sigma J_{\lambda,\,m-1} &= -G_{\lambda,\,m-1}(0) + J_{\lambda,\,m-2} - c_1 J_{\lambda,\,m-1} & \sigma^{m-1} \end{array}$$

Wenn man diese Gleichungen mit den beigeschriebenen Faktoren multipliziert und dann addiert, ergibt sich bei Berücksichtigung von (23):

$$(\sigma^m + c_1 \sigma^{m-1} + \ldots + c_m) \cdot J_{\lambda,\,m-1} = -\sigma^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Setzt man hier für das J-Symbol den Grenzwert (55) ein und berücksichtigt noch (48), so kommt:

$$(56)\quad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(\lambda)}(x)}{u(x)} = \frac{\sigma^\lambda}{\sigma^m + c_1 \sigma^{m-1} + \ldots + c_m} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Schließlich folgt hieraus auch für $y^{(m)}(x)$, weil ja y der Differentialgleichung des Satz 4 genügt:

$$(57)\quad \begin{aligned}\lim_{x=\infty} \frac{y^{(m)}(x)}{u(x)} &= 1 - \frac{c_1 \sigma^{m-1} + c_2 \sigma^{m-2} + \ldots + c_m}{\sigma^m + c_1 \sigma^{m-1} + \ldots + c_m} \\ &= \frac{\sigma^m}{\sigma^m + c_1 \sigma^{m-1} + \ldots + c_m}.\end{aligned}$$

Aus (56) und (57) ergibt sich aber sogleich:

$$(58)\quad \lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \sigma, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y''}{y} = \sigma^2, \ldots, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(m)}}{y} = \sigma^m.$$

Damit ist der wesentliche Teil von Satz 4 bewiesen. Es bleibt noch zu zeigen, daß es außer dem Integral

$$y = - \Psi_{0,\, m-1}(x)$$

kein weiteres gibt, das den Gleichungen (58) Genüge leistet. Nun hat jedes andere Integral die Form

$$y = - \Psi_{0,\, m-1}(x) + Y(x), \tag{59}$$

wo $Y(x)$ der homogenen Gleichung (14) genügt. Da für das Integral $- \Psi_{0,\, m-1}(x)$ die Gleichungen (58) gelten, schließt man leicht:

$$\lim_{x=\infty} \frac{|\Psi_{0,\, m-1}| + |\Psi'_{0,\, m-1}| + \ldots + |\Psi^{(m-1)}_{0,\, m-1}|}{e^{\Re(\sigma+\varepsilon)x}} = 0$$

für jede positive Zahl ε. Würden nun für das Integral (59) ebenfalls die Gleichungen (58) gelten, so hätte man entsprechend:

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(m-1)}|}{e^{\Re(\sigma+\varepsilon)x}} = 0,$$

und hieraus würde in Verbindung mit der vorigen Gleichung folgen:

$$\lim_{x=\infty} \frac{|Y| + |Y'| + \ldots + |Y^{(m-1)}|}{e^{\Re(\sigma+\varepsilon)x}} = 0.$$

Aber diese Gleichung ist, da Y der homogenen Gleichung (14) genügt, nach a. a. O. Satz 4 falsch, wenn nur ε genügend klein ist. Denn nach Voraussetzung ist $\Re(\sigma)$ kleiner als der reelle Teil einer jeden Wurzel der charakteristischen Gleichung von (14); der obige Grenzwert ist also nach dem genannten Satz für hinreichend kleine Werte von ε nicht 0, sondern ∞.

§ 5.

Beweis zu Satz 2.

Nunmehr sind wir imstande, auch den Satz 2 zu beweisen. Dazu zerlegen wir das Polynom

$$f(\varrho) \equiv \varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \ldots + a_n \tag{60}$$

derart in zwei Faktoren

$$f(\varrho) = \varphi(\varrho)\omega(\varrho), \tag{61}$$

$$\begin{cases} \varphi(\varrho) = \varrho^{n-k} + b_1 \varrho^{n-k-1} + \ldots + b_{n-k}, \\ \omega(\varrho) = \varrho^k + c_1 \varrho^{k-1} + \ldots + c_k, \end{cases} \tag{62}$$

daß $\varphi(\varrho)$ die Wurzel ϱ_0 hat und außerdem alle diejenigen, deren reeller Teil kleiner als der von ϱ_0 ist, während $\omega(\varrho)$ alle die Wurzeln von $f(\varrho)$

hat, deren reeller Teil größer als der von ϱ_0 ist. Nach dem a. a. O. aufgestellten Satz 7 läßt sich dann die Differentialgleichung des Satz 2, d. i.

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0 \tag{63}$$

auf die Form

$$u^{(n-k)} + \varphi_1(x)u^{(n-k-1)} + \ldots + \varphi_{n-k}(x)u = 0 \tag{64}$$

bringen, wobei u die Bedeutung

$$u = y^{(k)} + \omega_1(x)y^{(k-1)} + \ldots + \omega_k(x)y \tag{65}$$

hat, und die Koeffizienten $\varphi_\lambda(x)$, $\omega_\mu(x)$ folgendes Verhalten zeigen:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x=\infty} \varphi_\lambda(x) = b_\lambda, & \lim\limits_{x=\infty} \omega_\mu(x) = c_\mu, \\ \lim\limits_{x=\infty} \omega_\mu'(x) = 0, \ \ldots, & \lim\limits_{x=\infty} \omega_\mu^{(n-k)}(x) = 0. \end{cases} \tag{66}$$

Die Differentialgleichung (64) hat die Eigenschaft, daß ihre charakteristische Gleichung, nämlich die Gleichung $\varphi(\varrho) = 0$, die Wurzel ϱ_0 hat, während alle anderen Wurzeln einen kleineren reellen Teil besitzen. Nach dem a. a. O. aufgestellten Satz 5 hat also Gleichung (64) ein Integral u, für welches

$$\lim_{x=\infty} \frac{u'}{u} = \varrho_0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{u''}{u} = \varrho_0^2, \quad \ldots, \quad \lim_{x=\infty} \frac{u^{(n-k)}}{u} = \varrho_0^{n-k} \tag{67}$$

ist. Setzt man nun in (65) für u ein solches Integral ein, so hat diese Gleichung (65) nach dem vorhin bewiesenen Satz 4 ein Integral y, für welches die Beziehungen

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \varrho_0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y''}{y} = \varrho_0^2, \quad \ldots, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(k)}}{y} = \varrho_0^k \tag{68}$$

gelten, und augenscheinlich ist y auch ein Integral der Gleichung (63). Aus (65) und (66) folgt dann

$$\lim_{x=\infty} \frac{u}{y} = \varrho_0^k + c_1\varrho_0^{k-1} + \ldots + c_k. \tag{69}$$

Indem man (65) wiederholt differenziiert und die Gleichungen (66), (67), (68), (69) berücksichtigt, findet man unschwer:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y^{(k+1)}}{y} = \varrho_0^{k+1}, \quad \ldots, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(n)}}{y} = \varrho_0^n. \tag{70}$$

Mit y haben wir hiernach ein Integral von der in Satz 2 behaupteten Art gefunden. Wir bezeichnen es mit Y_1.

Ist nun τ eine Zahl, die kleiner ist als der reelle Teil von ϱ_0, aber größer als der reelle Teil von jeder andern Wurzel der Gleichung $\varphi(\varrho) = 0$,

so hat die Gleichung (63) nach dem a. a. O. aufgestellten Satz 8 noch $n-k-1$ Integrale, für welche

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y|+|y'|+\ldots+|y^{(n)}|}{e^{\tau' x}} = 0$$

ist. Jedes Integral der Form $Y_1 + y$, wo y von der letzten Art ist, hat ebenfalls die Eigenschaft des Satz 2. Denn man erkennt leicht:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y^{(\lambda)}}{Y_1} = 0 \qquad \text{für} \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, n,$$

und also:

$$\lim_{x=\infty} \frac{Y_1^{(\lambda)} + y^{(\lambda)}}{Y_1 + y} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{Y_1^{(\lambda)}}{Y_1} + \frac{y^{(\lambda)}}{Y_1}}{1 + \frac{y}{Y_1}} = \frac{\varrho_0^{\lambda} + 0}{1 + 0} = \varrho_0^{\lambda}.$$

Es gibt daher mindestens $n-k$ linear unabhängige derartige Integrale.

Anderseits gibt es aber auch nicht mehr als $n-k$. Denn für jedes andere Integral ist nach dem erwähnten Satz 8, wenn τ' größer ist als der reelle Teil von ϱ_0, aber kleiner als der reelle Teil einer jeden Wurzel von $\omega(\varrho)$,

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y|+|y'|+\ldots+|y^{(n-1)}|}{e^{\tau' x}} = \infty,$$

während für ein Integral von der Art des Satz 2 dieser Grenzwert offenbar Null sein muß. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 17. August 1917.)

Über positive harmonische Funktionen.

Von

Georg Pick in Prag.

In einer früher erschienenen Mitteilung habe ich eine Eigenschaft der ersten Glieder der Entwicklung positiver harmonischer Funktionen des Raums dargelegt[1]). Von dieser Eigenschaft ausgehend kann man, wie im folgenden gezeigt wird, eine charakteristische *Beziehung zwischen den Werten einer solchen Funktion an zwei verschiedenen Stellen* herleiten. Es wird dabei ein Transformationsgesetz für harmonische Funktionen verwendet, das in dieser Form wohl bisher nicht ausdrücklich formuliert worden ist. Sodann bildet die von mir vielfach für die Behandlung ähnlicher Probleme herangezogene Methode der kreisgeometrischen Maßbestimmung auch hier ein wesentliches Hilfsmittel der Untersuchung. Für den erwähnten Satz über die ersten Entwicklungsglieder wird zuvor ein neuer Beweis gegeben.

Es mag daran erinnert werden, daß unter einer positiven harmonischen Funktion im dreidimensionalen (ganz ähnlich im n-dimensionalen) Raum eine im Inneren der Einheitskugel[2]) positive, reguläre, der Laplaceschen Gleichung genügende Funktion der rechtwinkeligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 verstanden sein soll.

Man kann den zu beweisenden Satz als das Analogon des sogenannten Schwarzschen Lemmas auffassen. Es ist dazu nötig, dieses Lemma selbst in kreisgeometrischer Verallgemeinerung zugrunde zu legen[3]).

§ 1.

Abschätzung des Gradienten einer positiven harmonischen Funktion für den Koordinatenanfangspunkt.

Es sei

$$u = u_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots$$

[1]) S. Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver. 23 (1915), S. 329—332.

[2]) Es wird im folgenden auch die allgemeinere Annahme berücksichtigt, daß die geforderten Eigenschaften innerhalb einer beliebigen Kugel zutreffen.

[3]) Vgl. hierzu G. Pick, Math. Annalen 77 (1915), S. 1—6.

eine positive harmonische Funktion. Die Werte a_1, a_2, a_3 sind die Koordinaten des Gradienten von u im Nullpunkt. Wie an anderer Stelle gezeigt wurde, ist

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leqq 9u_0^2,$$

oder, wenn wir den Gradienten kurz mit $\mathfrak{a}$, seinen Absolutbetrag mit $|\mathfrak{a}|$ bezeichnen, und bedenken, daß nach Voraussetzung $u_0 > 0$ ist,

$$|\mathfrak{a}| \leqq 3u_0. \tag{1}$$

Man kann diesen Satz kurz so beweisen. Es sei $\varrho < 1$ beliebig positiv gewählt, dK_ϱ das Element der Kugel um den Nullpunkt K_ϱ mit dem Radius ϱ, u_ϱ der Wert von u, beides im Punkte x_1, x_2, x_3 der Kugel. Bildet man mittels Integration über die gesamte Oberfläche K_ϱ den Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{4\pi\varrho^2}{3} Q(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \int_{K_\varrho} u_\varrho [(\xi_0 + x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)^2 + (x_2\xi_3 - x_3\xi_2)^2 \\ &\quad + (x_3\xi_1 - x_1\xi_3)^2 + (x_1\xi_2 - x_2\xi_1)^2] dK_\varrho \\ &= \int_{K_\varrho} u_\varrho [\xi_0^2 + 2x_1\xi_0\xi_1 + 2x_2\xi_0\xi_2 + 2x_3\xi_0\xi_3 \\ &\quad + \varrho^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)] dK_\varrho \\ &= 4\pi\varrho^2 [u_0\xi_0^2 + u_0\varrho^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)] \\ &\quad + \frac{8\pi\varrho^4}{3}(a_1\xi_0\xi_1 + a_2\xi_0\xi_2 + a_3\xi_0\xi_3),\end{aligned}$$

so erkennt man an seiner ersten Darstellung, daß er stets positiv ist. Die quadratische Form

$$\begin{aligned}Q(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 3u_0\xi_0^2 + 3u_0\varrho^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \\ &\quad + 2\varrho^2\xi_0(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)\end{aligned}$$

ist also positiv, und daher ihre Diskriminante

$$\begin{vmatrix} 3u_0, & \varrho^2 a_1, & \varrho^2 a_2, & \varrho^2 a_3 \\ \varrho^2 a_1, & 3\varrho^2 u_0, & 0, & 0 \\ \varrho^2 a_2, & 0, & 3\varrho^2 u_0, & 0 \\ \varrho^2 a_3, & 0, & 0, & 3\varrho^2 u_0 \end{vmatrix} = 9\varrho^6 u_0^2 (9u_0^2 - \varrho^2 a_1^2 - \varrho^2 a_2^2 - \varrho^2 a_3^2) > 0,$$

woraus das Behauptete für $\varrho \to 1$ unmittelbar hervorgeht.

§ 2.

Zur Transformation harmonischer Funktionen.

Ist $u(\mathfrak{x})$ eine harmonische Funktion von x_1, x_2, x_3, oder, wie wir auch sagen wollen, des Vektors $\mathfrak{x}$ mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, so ist bekanntlich

$$u^*(\mathfrak{y}) = |\mathfrak{x}| \cdot u(\mathfrak{x})$$

eine harmonische Funktion von $\mathfrak{y}$, wenn $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x}$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|^2}$$

zusammenhängt[4]). Aufgelöst lautet diese Transformationsformel

$$u(\mathfrak{x}) = |\mathfrak{y}| \cdot u^*(\mathfrak{y}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{y}}{|\mathfrak{y}|^2}.$$

Man beweist sie ohne Mühe durch Transformation der Laplaceschen Gleichung durch reziproke Radien.

Es sei nun $K(\mathfrak{x})$ ein beliebiges Kugelpolynom, also ein Ausdruck von der Form

$$K(\mathfrak{x}) = h(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2k_1x_1 + 2k_2x_2 + 2k_3x_3 + l.$$

Transformiert man durch reziproke Radien wie oben, so ergibt sich

$$K(\mathfrak{x}) = \frac{K^*(\mathfrak{y})}{|\mathfrak{y}|^2},$$

wo $K^*(\mathfrak{y})$ wieder ein Kugelpolynom bezeichnet. Kombiniert man diese Formel mit der früheren für die Transformation der harmonischen Funktionen, so erhält man

$$u(\mathfrak{x}) \cdot \sqrt{K(\mathfrak{x})} = u^*(\mathfrak{y}) \cdot \sqrt{K^*(\mathfrak{y})}.$$

Der Ausdruck $u(\mathfrak{x})\sqrt{K(\mathfrak{x})}$ geht also bei Inversion an der Einheitskugel in einen ebenso gebildeten über, oder, wie wir kürzer sagen, er ist gegenüber solcher Inversion invariant. Es ist aber einleuchtend, daß der Ausdruck auch bei beliebigen (direkten oder indirekten) Ähnlichkeitstransformationen invariant ist. Denn bei diesen behält ja $u(\mathfrak{x})$ an sich und $K(\mathfrak{x})$ desgleichen seine Eigenschaft als harmonische Funktion, bzw. als Kugelpolynom. Da sich nun aus der Inversion an der Einheitskugel und Ähnlichkeitstransformationen sämtliche konforme Raumtransformationen, d. h. Kugelverwandtschaften, zusammensetzen lassen, folgt: *der Ausdruck* $u(\mathfrak{x})\sqrt{K(\mathfrak{x})}$ *ist gegenüber beliebigen konformen Raumtransformationen invariant*[5]).

Wegen späterer Anwendung erinnern wir an folgende Tatsache. Es sei eine beliebige Kugel, d. h. ein von einer Kugeloberfläche oder einer Ebene begrenzter endlicher oder unendlicher Raumteil, und ein innerer Punkt derselben gegeben. Dann gibt es stets eine konforme Raumtransformation,

---

[4]) Wir bedienen uns bekannter Bezeichnungen. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zwei beliebige Vektoren, so ist $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ihr inneres Produkt, und es wird $|\mathfrak{x}| = \sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}$ der absolute Betrag von $\mathfrak{x}$ genannt, also $|\mathfrak{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ usw.

[5]) Man kann diese Transformationsregel auch aus der Darbouxschen Theorie des Potentials ableiten, worauf ich nachträglich von befreundeter Seite aufmerksam gemacht wurde.

elche die Kugel in das Innere der Einheitskugel und den Punkt in den ullpunkt überführt (wobei noch eine beliebige Ebene samt Richtung in ihr urch den Punkt einer bestimmten Ebene samt Richtung in ihr durch den ullpunkt zugeordnet werden kann).

§ 3.

Der Satz aus § 1 in kreisgeometrischer Verallgemeinerung.

In bezug auf die Einheitskugel als Maßfläche soll jetzt innerhalb der inheitskugel kreisgeometrisch gemessen werden. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zwei (als Endunkte dieser Vektoren vom Nullpunkt aus gegebene) Punkte, so ist als re *Pseudodistanz* der Logarithmus des Doppelverhältnisses zu betrachten, elches sie mit den beiden Punkten bestimmen, in denen der sie verbinende Orthogonalkreis der Einheitskugel diese Kugel schneidet. Kreise olcher Art wollen wir *Orthokreise*, Bogen derselben *Orthobogen* nennen. ie Pseudodistanz soll mit $\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ bezeichnet werden. Es seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die beiden enannten Schnittpunkte, und zwar so bezeichnet, daß $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ in dieser rdnung auf dem Orthokreis aufeinanderfolgen. Dann soll sein:

2) $$\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \log(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q});$$

ie Zahl ist stets positiv. Man hat

3) $$\mathfrak{Tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) - 2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + (\mathfrak{y}\mathfrak{y})}{1 - 2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})},$$

ie durch Umrechnung leicht festzustellen ist. Der Maßbestimmung entpricht auch ein *Pseudobogenelement*, das man aus (2) oder (3) durch Zusammenrücken von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sich verschaffen kann. Mit $d\sigma$ wollen wir das urch das Inkrement $d\mathfrak{x}$ bei $\mathfrak{x}$ definierte Pseudobogenelement bezeichnen; an erhält

4) $$d\sigma = \frac{2|d\mathfrak{x}|}{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})}.$$

us (3) erhält man, wenn man $\mathfrak{y}$ mit dem Nullpunkt zusammenfallen läßt,

$$\mathfrak{Tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{0\mathfrak{x}} = (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$$

der

$$\mathfrak{Tg}\tfrac{1}{2}\widehat{0\mathfrak{x}} = |\mathfrak{x}|$$

nd aus (4) für $\mathfrak{x} = 0$

$$d\sigma = 2|d\mathfrak{x}|.$$

Gehen wir nun auf den Satz von § 1 zurück. Im Anfangspunkt ist

$$du = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = (a\,d\mathfrak{x}).$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $d\mathfrak{x}$ etwa mit ϑ, so hat man

$$du = |\mathfrak{a}| \cdot |d\mathfrak{x}| \cdot \cos\vartheta,$$

und hieraus folgt

$$-|\mathfrak{a}| \cdot |d\mathfrak{x}| \leqq du \leqq |\mathfrak{a}| \cdot |d\mathfrak{x}|.$$

Nun ist im Anfangspunkt, wie wir sahen,

$$|d\mathfrak{x}| = \tfrac{1}{2} d\sigma,$$

ferner nach § 1

$$|\mathfrak{a}| \leqq 3u_0,$$

so daß sich ergibt

$$-\tfrac{3}{2} d\sigma \leqq \frac{du}{u_0} \leqq \tfrac{3}{2} d\sigma.$$

Wir können auch schreiben

$$-\tfrac{3}{2} d\sigma \leqq d \log u \leqq \tfrac{3}{2} d\sigma.$$

Andrerseits folgt aus

$$d \log \sqrt{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})} = -\frac{(\mathfrak{x} d\mathfrak{x})}{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})}$$

für den Anfangspunkt der Koordinaten

$$d \log \sqrt{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})} = 0,$$

und durch Kombination mit der früheren Ungleichung

$$-\tfrac{3}{2} d\sigma \leqq d \log \left[u \sqrt{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\right] \leqq \tfrac{3}{2} d\sigma,$$

gültig für den Nullpunkt. Aber diese Formel enthält nur invariante Ausdrücke und ist also leicht zu transformieren. Wir üben auf sie eine beliebige konforme Transformation aus. Die Einheitskugel wird in eine beliebige Kugel übergehen, ihr Polynom $1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$, von einem positiven Faktor (vgl. § 2) abgesehen, in das Polynom der neuen Kugel $K(\mathfrak{x})$. Das Pseudobogenelement $d\sigma$, gemessen an der Einheitskugel, verwandelt sich in $d\sigma$, gemessen an $K(\mathfrak{x})$, das Produkt $u\sqrt{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})}$ geht nach § 2 in $u\sqrt{K(\mathfrak{x})}$ über, der Nullpunkt verwandelt sich dabei in einen beliebigen Punkt, $K(\mathfrak{x})$ bekommt positives Vorzeichen, weil $[1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})]_{\mathfrak{x}=0} = 1$ positiv ist. (Vgl. auch die Schlußbemerkung in § 2.)

Wir erhalten also folgendes Ergebnis: *Es sei $K(\mathfrak{x})$ ein beliebiges Kugelpolynom, $u(\mathfrak{x})$ eine harmonische Funktion, die im Gebiet $K(\mathfrak{x}) > 0$ regulär und positiv ist. Dann ist in diesem Gebiet überall*

$$(5) \qquad -\tfrac{3}{2} d\sigma \leqq d \log \left[u \sqrt{K(\mathfrak{x})}\right] \leqq \tfrac{3}{2} d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ in bezug auf $K(\mathfrak{x}) = 0$ als Maßfläche zu messen ist.

§ 4.

Integration der gefundenen Beziehung.

Integriert man die Relation (5) längs des Orthobogens, der die beiden unkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ verbindet, so ergibt sich

$$-\tfrac{3}{2}\,\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} \leqq \log\frac{u(\mathfrak{x})\sqrt{K(\mathfrak{x})}}{u(\mathfrak{y})\sqrt{K(\mathfrak{y})}} \leqq \tfrac{3}{2}\,\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}},$$

enn $d\sigma$, längs eines Orthobogens integriert, gibt die Pseudodistanz seiner ndpunkte. Geht man in der erhaltenen Formel von den Logarithmen zu en Zahlen über, so ergibt sich

$$e^{-\frac{3}{2}\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}} \leqq \frac{u(\mathfrak{x})\sqrt{K(\mathfrak{x})}}{u(\mathfrak{y})\sqrt{K(\mathfrak{y})}} \leqq e^{\frac{3}{2}\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}}.$$

ie Bedeutung dieser Formel ist die. Sie enthält eine Abschätzung des Verältnisses der Werte von u an zwei verschiedenen Stellen, wenn die Pseudostanz der Stellen als bekannt vorausgesetzt wird.

Eine besonders einfache Gestalt erhält der in (6) formulierte Satz, wenn an die Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und die Kugel K geeignet speziell wählt, aber so, daß e Annahme dem allgemeinen Fall durch konforme Transformation äquialent ist. Wir wählen als Maßfläche wieder die Einheitskugel, also

$$K(\mathfrak{x}) = 1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$$

nd legen $\mathfrak{y}$ in den Nullpunkt, während $\mathfrak{x}$ beliebig bleibt. Setzen wir zur bkürzung

$$|\mathfrak{x}| = \varrho,$$

daß also $\mathfrak{x}$ auf der Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ liegt, so gibt sich mit Hilfe der in § 3 mitgeteilten Formeln

$$e^{\widehat{\mathfrak{x}0}} = \frac{1+\varrho}{1-\varrho},$$

so

$$\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{-\frac{3}{2}} \leqq \frac{u(\mathfrak{x})\sqrt{1-\varrho^2}}{u(0)} \leqq \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{\frac{3}{2}}$$

der

$$\frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^2} \leqq \frac{u(\mathfrak{x})}{u(0)} \leqq \frac{1+\varrho}{(1-\varrho)^2}.$$

iese Formel gibt Schranken für die Werte einer positiven harmonischen unktion, wenn der Nullwert gegeben ist.

§ 5.

Existenz der Funktionen zu vorgeschriebenen Werten.

Wir wollen Funktionswerte $u(\mathfrak{x})$, welche die Bedingung (6) bzw. (7) erfüllen, zulässige Werte nennen. Es fragt sich, ob jeder zulässige Wert an einer gegebenen Stelle $\mathfrak{x}$ auch wirklich von einer harmonischen Funktion der betrachteten Art angenommen wird. Bei der Entscheidung dieser Frage dürfen wir uns auf die Relation (7) beschränken, auf deren Voraussetzungen man ja stets durch konforme Transformation reduzieren kann. Zunächst ist nun klar, daß der Ausdruck

$$P(\mathfrak{x}) = P(0)\frac{1-(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}{(\mathfrak{x}-\mathfrak{e},\ \mathfrak{x}-\mathfrak{e})^{3/2}} = P(0)\frac{1-|\mathfrak{x}|^2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{e}|^3},$$

in dem $\mathfrak{e}$ einen beliebigen Punkt der Einheitskugel bedeutet, eine positive harmonische Funktion darstellt. Daß er im Innern der Einheitskugel positiv ist, sieht man unmittelbar, daß er der Laplaceschen Gleichung genügt prüft man leicht direkt, ist übrigens bekannt, da $P(\mathfrak{x})$ im wesentlichen den Kern der Poissonschen Integraldarstellung ist. Nun hat man für $\varrho < 1$

$$P(\mathfrak{e}\varrho) = P(0)\frac{1-\varrho^2}{(1-\varrho)^3} = P(0)\frac{1+\varrho}{(1-\varrho)^2}$$

und

$$P(-\mathfrak{e}\varrho) = P(0)\frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho)^3} = P(0)\frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^2}$$

und sieht also, daß diese Funktion zunächst die beiden extremen Werte von (7) in beliebig vorgeschriebenen Punkten $\mathfrak{x}$ (nämlich $\mathfrak{e}\varrho$ oder $-\mathfrak{e}\varrho$) verwirklicht. Nimmt man auf der Kugel vom Radius ϱ Koordinaten mit $\mathfrak{e}\varrho$ und $-\mathfrak{e}\varrho$ als Pole an, so hat $P(\mathfrak{x})$ längs eines Parallelkreises immer konstanten Wert, und nimmt andrerseits wegen der Stetigkeit auf der Kugel alle mit (7) verträglichen Werte an. Um also zu bewirken, daß $P(\mathfrak{x})$ in einem vorgeschriebenen Punkt der Kugel einen gegebenen zulässigen Wert annimmt, braucht man offenbar nur den Pol des Koordinatensystems, das heißt den Einheitsvektor $\mathfrak{e}$, entsprechend zu wählen.

Die Funktionenklasse

$$P(\mathfrak{x}) = P(0)\frac{1-(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}{[1-2(\mathfrak{x}\mathfrak{e})+(\mathfrak{x}\mathfrak{x})]^{3/2}}$$

hat also die ausgezeichnete Eigenschaft, alle mit (7) verträglichen Wertzuordnungen zu verwirklichen.

§ 6.

Die analogen Sätze im Raum von beliebig vielen Dimensionen.

Die entwickelten Beziehungen lassen sich genau in der gleichen Weise für den n-dimensionalen Raum durchführen. Es wird genügen, für die wichtigsten der früheren Relationen die verallgemeinerte Form hier anzugeben.

Wie in § 1 beweist man die Formel

$$|\mathfrak{a}| \leqq n u_0 \tag{1*}$$

für den Gradienten einer positiven harmonischen Funktion im Anfangspunkt der Koordinaten, und analog wie in § 2 ergibt sich, daß der Ausdruck

$$u(\mathfrak{x})\, K(\mathfrak{x})^{\frac{n-2}{2}},$$

worin $u(\mathfrak{x})$ eine harmonische Funktion, $K(\mathfrak{x})$ ein „Kugelpolynom" des n-dimensionalen Raums bedeutet, gegenüber konformen Transformationen dieses Raums invariant ist. Die Formeln (2), (3), (4) erleiden keine Veränderungen; was unter den darin vorkommenden Zeichen zu verstehen ist, bedarf wohl keiner Erläuterung. Es ergibt sich mittels (1*) nach dem früheren Verfahren

$$\frac{1}{2} n d\sigma \leqq d \log \left[u(\mathfrak{x})\, K(\mathfrak{x})^{\frac{n-2}{2}} \right] \leqq \frac{1}{2} n d\sigma. \tag{5*}$$

Integration ergibt wieder

$$e^{-\frac{n}{2}\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}} \leqq \frac{u(\mathfrak{x})\, K(\mathfrak{x})^{\frac{n-2}{2}}}{u(\mathfrak{y})\, K(\mathfrak{y})^{\frac{n-2}{2}}} \leqq e^{\frac{n}{2}\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}}. \tag{6*}$$

$K(\mathfrak{x}) = 0$ ist die der Maßbestimmung zugrunde liegende Kugelmannigfaltigkeit. Spezialisiert man analog wie in § 4, so folgt

$$\frac{1 - |\mathfrak{x}|}{(1 + |\mathfrak{x}|)^{n-1}} \leqq \frac{u(\mathfrak{x})}{u(0)} \leqq \frac{1 + |\mathfrak{x}|}{(1 - |\mathfrak{x}|)^{n-1}} \tag{7*}$$

für eine positive harmonische Funktion $u(\mathfrak{x})$.

Auch hier werden alle mit (7*) verträglichen Wertzuordnungen schon durch die eine Funktionsklasse

$$P(\mathfrak{x}) = P(0)\, \frac{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})}{(\mathfrak{x} - \mathfrak{e},\ \mathfrak{x} - \mathfrak{e})^{\frac{n}{2}}} = P(0)\, \frac{1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})}{\left[1 - 2(\mathfrak{x}\mathfrak{e}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{x})\right]^{\frac{n}{2}}}$$

verwirklicht.

Wien, August 1917.

(Eingegangen am 11. September 1917.)

Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises.

Von

Wilhelm Blaschke in Königsberg i. Pr.

Mit 2 Figuren im Text.

Es sei $\mathfrak{B}$ eine konvexe Punktmenge in der Ebene oder kurz ein „Eibereich", F sein Flächeninhalt und E die mittlere Entfernung aller Punktpaare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ des Bereichs:

$$E = \frac{1}{F^2} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} |\mathfrak{p}\mathfrak{q}| \cdot dF_{\mathfrak{p}} \cdot dF_{\mathfrak{q}}.$$

Wir wollen den Satz beweisen:

(A) *Unter allen Eibereichen gegebenen Flächeninhalts F liefern die Kreisscheiben den kleinsten Wert für die mittlere Entfernung E der Punktpaare des Bereichs.*

Oder etwas schärfer gefaßt:

(B) *Zwischen den Integralinvarianten E und F eines Eibereichs $\mathfrak{B}$ gilt die Beziehung*

$$3^4 \cdot 5^2 \cdot \pi^3 \cdot E^2 - 2^{14} \cdot F \geqq 0$$

und es ist dann und nur dann

$$3^4 \cdot 5^2 \cdot \pi^3 \cdot E^2 - 2^{14} \cdot F = 0,$$

wenn der Bereich $\mathfrak{B}$ eine Kreisscheibe ist.

So einleuchtend die Richtigkeit der Behauptung (A) ist, so anschaulich läßt sie sich auch beweisen mittels eines auf J. Steiner zurückgehenden, vielfach verwendbaren Verfahrens, das ich *„Symmetrisierung"* zu nennen pflege, und mittels eines durch unbegrenzt wiederholte Symmetrisierungen entstehenden konvergenten unendlichen Prozesses[1]).

Die Symmetrisierung eines Eibereichs $\mathfrak{B}$ geht folgendermaßen vor sich. Man denkt sich jede Sehne von $\mathfrak{B}$ parallel zu einer vorgeschriebenen Rich-

---

[1]) Wegen der Anwendungen der Symmetrisierung verweise ich auf mein Büchlein, Kreis und Kugel, Leipzig bei Veit & Co. 1916, und auf meine Mitteilungen über affine Geometrie in den Leipziger Berichten 68 (1916) und 69 (1917).

ung („Lotrichtung") so weit auf ihrer Geraden verschoben, bis ihr Mittel-unkt auf eine gegebene wagrechte Gerade $\mathfrak{S}$ zu liegen kommt (Fig. 1). Die o verschobenen Sehnen erfüllen den „symmetrisierten" zur Geraden $\mathfrak{S}$ sym-netrischen Bereich $\mathfrak{B}^*$. Schon Steiner hat bemerkt, daß $\mathfrak{B}^*$ wieder konvex nd zu $\mathfrak{B}$ flächengleich ist. Wir wollen diese Symmetrisierung hier als punkt-veise Zuordnung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ auffassen, indem wir jedem Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{B}$ len Punkt $\mathfrak{p}^*$ derselben Lotrechten in $\mathfrak{B}^*$ zuordnen, der auf der lotrechten ehne dieselben Strecken abschneidet.

Nun soll gezeigt werden:

(C) *Zwischen den Integralinvarianten E und E^* von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ be-teht die Beziehung $E \geqq E^*$ und es ist nur in dem trivialen Falle $E = E^*$, laß schon $\mathfrak{B}$ eine wagrechte Symmetrieachse hat.*

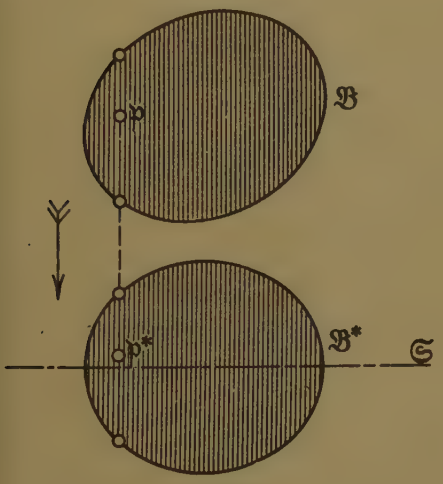

Fig. 1.

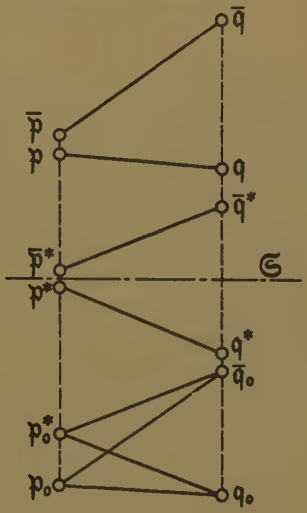

Fig. 2.

Es seien $\mathfrak{p}^*$ und $\mathfrak{q}^*$ zwei Punkte von $\mathfrak{B}^*$; $\bar{\mathfrak{p}}^*$ und $\bar{\mathfrak{q}}^*$, die zur Achse $\mathfrak{S}$ ymmetrischen Punkte von $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$; $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$ die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{B}$. Dann besteht zwischen den absolut genommenen Verbindungs-trecken dieser Punkte die Beziehung

$$1) \qquad |\mathfrak{p}\mathfrak{q}| + |\bar{\mathfrak{p}}\,\bar{\mathfrak{q}}| \geqq |\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*| + |\bar{\mathfrak{p}}^*\bar{\mathfrak{q}}^*|.$$

Verschiebt man nämlich jede der vier Strecken $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$, $\bar{\mathfrak{p}}\,\bar{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*$, $\bar{\mathfrak{p}}^*\bar{\mathfrak{q}}^*$ arallel zu sich selbst etwa in lotrechter Richtung nach $\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{p}_0\bar{\mathfrak{q}}_0$, $\mathfrak{p}_0^*\,\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{p}_0^*\,\bar{\mathfrak{q}}_0$ (Fig. 2), so erkennt man, daß die beiden Strecken links in (1) Seiten es Dreiecks $\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{q}_0\,\bar{\mathfrak{q}}_0$ und die beiden Strecken auf der rechten Seite von (1) eiten des Dreiecks $\mathfrak{p}_0^*\,\mathfrak{q}_0\,\bar{\mathfrak{q}}_0$ sind. Die beiden Dreiecke haben aber ihre rundlinien $\mathfrak{q}_0\,\bar{\mathfrak{q}}_0$ gemein und gleiche Höhe, also hat das gleichschenklige

$\mathfrak{p}_0^* \mathfrak{q}_0 \bar{\mathfrak{q}}_0$ wirklich den kleineren Umfang, was gerade durch die Beziehung (1) ausgedrückt wird. Das Gleichheitszeichen gilt darin nur dann, wenn die beiden Dreiecke zusammenfallen, und das tritt ein, wenn die lotrechten Sehnen von $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ihre Mitten auf einer wagrechten haben.

Nun finden wir in leichtverständlicher Bezeichnungsweise, wenn wir beachten, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ durch die Symmetrisierung auf einander flächentreu bezogen sind,

$$(2) \qquad 2EF^2 = \iint_{\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}} |\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}| \cdot dF_{\mathfrak{p}} \cdot dF_{\mathfrak{q}} + \iint_{\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}} |\bar{\mathfrak{p}}\,\bar{\mathfrak{q}}| \cdot dF_{\bar{\mathfrak{p}}} \cdot dF_{\bar{\mathfrak{q}}}$$

$$= \iint_{\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}} \{|\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}| + |\bar{\mathfrak{p}}\,\bar{\mathfrak{q}}|\} \cdot dF_{\mathfrak{p}} \cdot dF_{\mathfrak{q}}$$

und ebenso

$$(3) \qquad 2E^*F^2 = \iint_{\mathfrak{B}^*\,\mathfrak{B}^*} \{|\mathfrak{p}^*\,\mathfrak{q}^*| + |\bar{\mathfrak{p}}^*\,\bar{\mathfrak{q}}^*|\} \cdot dF_{\mathfrak{p}^*} \cdot dF_{\mathfrak{q}^*}.$$

In der Tat ist z. B.

$$dF_{\mathfrak{p}^*} = dF_{\bar{\mathfrak{p}}^*}$$

wegen der Symmetrie von $\mathfrak{B}^*$ an $\mathfrak{S}$ und anderseits ist

$$dF_{\mathfrak{p}} = dF_{\mathfrak{p}^*}, \qquad dF_{\mathfrak{p}} = dF_{\bar{\mathfrak{p}}},$$

da die Symmetrisierung flächentreu ist. Aus (2) und (3) folgt jetzt wegen (1) das gewünschte Ergebnis $E \geqq E^*$. Wegen der Stetigkeit der Integranden ist nur dann $E = E^*$, wenn für alle Punktpaare $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{B}$ in (1) das Gleichheitszeichen gilt, wenn also die Mitten aller lotrechten Sehnen von $\mathfrak{B}$ derselben Wagrechten angehören. Damit ist unsere Behauptung (C) erwiesen[2]).

Jetzt erkennt man aber sofort:

(D) *Hat unsere Minimumaufgabe überhaupt Lösungen, so sicher keine anderen als Kreise.*

Bei jedem nicht kreisförmigen Eibereich $\mathfrak{B}$ gibt es nämlich, wie man leicht sieht, Richtungen, zu denen $\mathfrak{B}$ keine parallele Symmetrieachse hat. Man kann also durch Symmetrisierung von $\mathfrak{B}$ erreichen, daß bei festem F die Größe E heruntergedrückt wird.

Um aber auch die Existenzfrage mit zu erledigen, kann man so vorgehen. Man symmetrisiert den beliebigen Ausgangsbereich $\mathfrak{B}$ zuerst an einer Geraden $\mathfrak{S}_1$ nach $\mathfrak{B}_1$. Dann den so entstandenen symmetrischen Bereich $\mathfrak{B}_1$ an einer zweiten Geraden $\mathfrak{S}_2$ nach $\mathfrak{B}_2$. Dabei sollen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ einen Winkel einschließen, der zum vollen Winkel 2π in einem irrationalen Verhältnis steht. Hierauf symmetrisiere man $\mathfrak{B}_2$ wieder an $\mathfrak{S}_1$ nach $\mathfrak{B}_3$ usf. Durch abwechselndes Symmetrisieren an $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ erhält man eine Folge

---

[2]) Ein ähnlicher Steiner nachgebildeter Schluß bei L. Bieberbach, Über eine Extremaleigenschaft des Kreises, Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver. 24 (1915) S. 247—250.

on flächengleichen Eibereichen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3 \ldots$, die, wie ich gezeigt habe[3]), egen den flächengleichen Kreis $\mathfrak{K}$ um den Schnittpunkt der Achsen $\mathfrak{S}_1$ nd $\mathfrak{S}_2$ konvergieren.

Nun kann man einsehen, daß das Integral E die Stetigkeitseigenschaft at, daß aus

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_n = \mathfrak{K}$$

ür die zugehörigen E folgt

$$\lim_{n\to\infty} E_n = E_{\mathfrak{K}}.$$

Nämlich so. Ist ein Bereich $\mathfrak{B}$ in einem zweiten $\mathfrak{B}'$ enthalten ($\mathfrak{B} < \mathfrak{B}'$), so ilt für die zugehörigen Integrale EF^2 und $E'F'^2$

$$EF^2 < E'F'^2,$$

denn bei der Berechnung des zu $\mathfrak{B}'$ gehörigen Integrals

$$\text{5)} \qquad \iint |pq|\, dF_p\, dF_q$$

kommen zu den Elementen von $\mathfrak{B}$ noch weitere positive Elemente hinzu. Da nun für hinlänglich großes n wegen $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{K}$ der Bereich $\mathfrak{B}_n$ „zwischen" zwei zu $\mathfrak{K}$ konzentrischen beliebig benachbarten Kreisen ($\mathfrak{K}' < \mathfrak{K} < \mathfrak{K}''$) ge- legen ist: $\mathfrak{K}' < \mathfrak{B}_n < \mathfrak{K}''$, so haben wir einerseits

$$E'F'^2 < E_{\mathfrak{K}}F^2 < E''F''^2$$

und anderseits

$$E'F'^2 < E_nF^2 < E''F''^2.$$

Da aber bei einem Kreise das Integral EF^2 der fünften Potenz des Halbmessers proportional ist, so unterscheiden sich die äußeren Glieder unserer Ungleichheiten um beliebig wenig. Also strebt in der Tat

$$E_nF^2 \to E_{\mathfrak{K}}F^2 \quad \text{oder} \quad E_n \to E_{\mathfrak{K}}.$$

Somit haben wir für $c > 0$

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} cE^2 - F &\geqq cE_1^2 - F \geqq cE_2^2 - F \geqq \cdots \\ &\geqq \lim_{n\to\infty} (cE_n^2 - F) = cE_{\mathfrak{K}}^2 - F. \end{aligned}$$

Für den Kreis $\mathfrak{K}$ ist aber, wenn r den Halbmesser bedeutet, $F = \pi r^2$ und

$$\text{(7)} \qquad E_{\mathfrak{K}} = \frac{2^7}{3^2 \cdot 5 \cdot \pi} r^4)^{4}.$$

Setzt man also

$$c = \frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot \pi^3}{2^{14}},$$

---

[3]) Man sehe: Kreis und Kugel, S. 86 f.

[4]) Vgl. etwa E. Czuber, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, Leipzig 1884, S. 197. Dort findet man auch das vierfache Integral EF^2 auf ein Doppelintegral zurückgeführt auf S. 204 und 158.

so folgt $$cE_2^2 - F = 0$$

und aus (6) das gewünschte Ergebnis

$$3^4 \cdot 5^2 \cdot \pi^3 \cdot E^2 - 2^{14} \cdot F \geqq 0. \tag{8}$$

Damit ist die in (B) behauptete Ungleichheit nachgewiesen. Daß die Gleichheit nur für den Kreis stimmen kann, folgt aus unserm Satz (C).

Die ganze hier vorgetragene Schlußweise läßt sich ohne Mühe auf die räumliche Geometrie (auch auf mehrfach ausgedehnte Euklidische Räume) übertragen und man kommt so zur entsprechenden isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel, ohne daß dabei neue Schwierigkeiten zu überwinden wären. Auch kann man in dem Integral (5), um dessen Extreme es sich handelt, statt der Entfernung $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}| = r$ eine Funktion $f(r)$ einführen, die für $r \geqq 0$ mit ihrer ersten und zweiten Ableitung positiv ist. Es bleibt dann die angewandte Überlegung in Gültigkeit, da in diesem Falle

$$2f\left(\frac{r+\bar{r}}{2}\right) < f(r) + f(\bar{r}) \tag{9}$$

ist. Hingegen scheint es leider nicht möglich zu sein, auf diese einfache Art ein Problem von Liapounoff zu erledigen. Ich meine die Frage nach den Gleichgewichtsfiguren einer (ruhenden) homogenen und gravitierenden Flüssigkeit ohne Einwirkung äußerer Kräfte[5]). Es ist das (für den räumlichen Fall) das Variationsproblem mit $f(r) = 1 : r$.

Das hier mitgeteilte Beweisverfahren führt bei einer geeigneten Abänderung auch zur Erkenntnis, daß es außer dem gefundenen „absoluten" Extrem keine weiteren „relativen" Extreme gibt, d. h. Extreme in bezug auf eine genügend enge Umgebung. Ferner kann man schließlich noch die Beschränkung auf *konvexe* Vergleichsbereiche fallen lassen, wenn man ähnlich verfährt wie kürzlich W. Groß beim Beweis der isoperimetrischen Haupteigenschaft der Kugel[6]).

Die geometrischen Mittelwerte führen noch zu manch anderen bemerkenswerten Variationsproblemen, die noch wenig beachtet zu sein scheinen. Beispielsweise sei noch kurz auf eine isoperimetrische Eigenschaft der Ellipse hingewiesen.

Mit $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}|$ werde der absolut genommene Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ bezeichnet, das im Eibereich $\mathfrak{B}$ liegen soll. Wir bilden das sechsfache Integral

$$G = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} |\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}| \cdot dF_{\mathfrak{p}} \cdot dF_{\mathfrak{q}} \cdot dF_{\mathfrak{r}}, \tag{10}$$

---

[5]) Man vergleiche den Bericht bei H. Poincaré, Figures d'equilibre d'une masse fluide, Paris 1902, S. 13—24.

[6]) Monatshefte für Mathematik und Physik, 28 (1917), S. 77—97.

wobei alle drei Doppelintegrale über alle Flächenelemente unseres Bereichs $\mathfrak{B}$ zu erstrecken sind. Dann gilt:

(E) *Unter allen Eibereichen $\mathfrak{B}$ von vorgeschriebenem Flächeninhalt F liefern nur die von Ellipsen umschlossenen den kleinsten Wert von G, also auch den kleinsten Wert von $G:F^3$, der mittleren Dreiecksfläche in $\mathfrak{B}$.*

Der Beweis gelingt ganz ähnlich dem eben durchgeführten mittels Steiners Symmetrisierung. Man zeigt dazu wieder, daß beim Symmetrisieren sich G monoton ändert. Ich werde dies und den entsprechenden räumlichen Lehrsatz an anderer Stelle ausführlich auseinandersetzen[7]).

Zum Abschluß sei noch eine weitere Extremeigenschaft des Kreises erwähnt, die man wieder mittels der Symmetrisierung bestätigen kann, die sich aber auch auf einen Satz von Brunn und Minkowski über Eikörper zurückführen läßt. Es sei nämlich $\mathfrak{B}$ ein Eibereich, xy die Mittelpunktskoordinaten einer ganz in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Kreisscheibe und $r > 0$ ihr Halbmesser. Dann lautet unser Satz so:

(F) *Das über alle Kreise in einem Eibereich $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral*

$$\iiint_{\mathfrak{B}} dx\, dy\, dr$$

erreicht bei gegebenem Flächeninhalt von $\mathfrak{B}$ nur dann seinen Größtwert, wenn $\mathfrak{B}$ eine Kreisscheibe ist.

Königsberg, im September 1917.

---

[7]) Über affine Geometrie XI: Lösung des Vierpunktproblems von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Berichte der mathematisch-physischen Klasse der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 69 (1917).

(Eingegangen am 11. September 1917.)

Zur Theorie der Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

In der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

sei k^2 ein Parameter, der so bestimmt werden soll, daß (1) eine Lösung besitzt, die innerhalb eines Kreises, der den Radius zwei und den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt hat, zweimal stetig differentiierbar ist und in jedem Punkte der Peripherie dieses Kreises denselben Wert annimmt wie in dem entsprechenden Punkte, der auf demselben Radiusvektor und der Peripherie des konzentrischen Kreises vom Radius eins liegt.

Es entsteht dann die Aufgabe, eine willkürlich vorgegebene Funktion nach diesen Lösungen zu entwickeln, eine Aufgabe, deren Lösung mannigfaltige physikalische Anwendungen zuläßt, wie etwa auf die Theorie der Kapillarwellen, der Wärmeleitung u. a.

Sind r und φ Polarkoordinaten, so setzen wir versuchsweise

$$u = R(r)\,\Phi(\varphi), \tag{2}$$

dann ist

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2\,\Phi = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0. \tag{3b}$$

Aus der Forderung, daß u eine stetige Funktion innerhalb des größeren Kreises sein soll, ergibt sich, daß ν eine ganze Zahl sein muß und daß für R dasjenige Integral von (3b) zu wählen ist, das für $r = 0$ regulär ist. Der Parameter k^2 ist dann so zu bestimmen, daß dieses Integral von (3b) für $r = 1$ und $r = 2$ gleiche Werte annimmt. Da (3a) auf die gewöhnliche Fouriersche Reihe führt, so wollen wir uns auf das ein

imensionale Entwicklungsproblem beschränken, das sich an (3b) anschließt, vobei wir von der zu entwickelnden willkürlichen Funktion $f(r)$ verlangen, aß sie für $0 \leqq r \leqq 2$ den Dirichletschen Bedingungen genügt, daß ferner

4a) $$f(1) = f(2)$$

4b) $$f(0) = 0$$

st. Von der Bedingung (4b) kann abgesehen werden, wenn $\nu = 0$ ist.

Man könnte natürlich für die Eigenfunktionen statt der (4a) entsprechenden Bedingung eine lineare homogene Relation für die Werte der Funktion und ihrer ersten Ableitung in beliebig vielen Punkten vorschreiben; vie uns die Durchführung des gewählten Beispieles zeigen wird, erhält nan für die durch diese Punkte begrenzte Teilintervalle unendlich viele Entwicklungen von $f(r)$ nach den Eigenfunktionen von (3b); man kann aber durch Heranziehung der Nullentwicklungen es so einrichten, daß man für das ganze Intervall $0 \leqq r \leqq 2$ eine und dieselbe Entwicklung erhält, und zwar ist diese Entwicklung die einzige, die allenfalls gliedweise integriert werden kann.

Da durch die Singularität in $r = 0$ eine kleine Komplikation hereinkommt so wollen wir im § 1 zunächst von der Differentialgleichung

5) $$\frac{d^2y}{dx^2} + [k^2 + q(x)]y = 0$$

ausgehen, in welcher $q(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2$ eine endliche und stetige Funktion sein soll. Für $x = 0$ verlangen wir

6) $$y(0) = 0.$$

§ 1.

a) Aufstellung der Greenschen Funktion.

Es seien $u(k^2; x)$ und $v(k^2; x)$ Integrale von (5), für welche

7) $$u(k^2; 0) = 0, \qquad \left[\frac{d}{dx} u(k^2; x)\right]_{x=0} = u'(k^2; 0) = 1,$$
$$v(k^2; 0) = 1, \qquad v'(k^2; 0) = 0$$

ist. Wir setzen

8) $$u(k^2; x)\, v(k^2; \xi) - u(k^2; \xi)\, v(k^2; x) = u_\xi(k^2; x),$$

dann genügt $u_\xi(k^2; x)$ der Differentialgleichung (5) und es ist

9) $$u_\xi(k^2; \xi) = 0, \quad u'_\xi(k^2; \xi) = 1.$$

Die zweite Gleichung (9) folgt aus der bekannten Gleichung

$$u'(k^2; x)\, v(k^2; x) - u(k^2; x)\, v'(k^2; x) = \text{const.}$$

Speziell brauchen wir im folgenden die Integrale $u_2(k^2; x)$ und $u_1(k^2; x)$, die aus dem durch (8) definierten $u_\xi(k^2; x)$ hervorgehen, indem man $\xi = 2$ bzw. $\xi = 1$ setzt.

Als Greensche Funktion $G(k^2; x, \xi)$ von (5) definieren wir dann eine Lösung von (5), die für $x = 0$ verschwindet, für $x = 1$ und für $x = 2$ gleiche Werte annimmt und für welche

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} G(k^2; x, \xi)\right]_{x=\xi-0} - \left[\frac{\partial}{\partial x} G(k^2; x, \xi)\right]_{x=\xi+0} = -1$$

ist. Es ergibt sich

$$G(k^2; x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{u(k^2; x)[u_2(k^2; \xi) - u_1(k^2; \xi)]}{u(k^2; 2) - u(k^2; 1)}, \\ \qquad 0 \leqq \xi \leqq 1, \quad 0 \leqq x \leqq \xi, \\ \dfrac{u(k^2; \xi)[u_2(k^2; x) - u_1(k^2; x)]}{u(k^2; 2) - u(k^2; 1)}, \\ \qquad 0 \leqq \xi \leqq 1, \quad \xi \leqq x \leqq 2, \\ \dfrac{u(k^2; x)\, u_2(k^2; \xi)}{u(k^2; 2) - u(k^2; 1)}, \\ \qquad 1 \leqq \xi \leqq 2, \quad 0 \leqq x \leqq \xi, \\ \dfrac{u(k^2; \xi)\, u_2(k^2; x) - u(k^2; 1)\, u_\xi(k^2; x)}{u(k^2; 2) - u(k^2; 1)}, \\ \qquad 1 \leqq \xi \leqq 2, \quad \xi \leqq x \leqq 2. \end{cases} \tag{11}$$

b) Reihenentwicklung einer willkürlichen Funktion.

Es sei $f(x)$ eine willkürlich vorgegebene Funktion von x, die für $0 \leqq x \leqq 2$ den Dirichletschen Bedingungen genügt und für die außerdem

$$f(0) = 0, \tag{12a}$$

$$f(1) = f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(2 - 0) = f(2) \tag{12b}$$

ist. Für große Werte von $|k^2|$ hat man dann[1]) asymptotisch ($\sim$)

$$u(k^2; x) \sim \frac{\sin kx}{k}, \quad v(k^2; x) \sim \cos kx, \quad u_\xi(k^2; x) \sim \frac{\sin k(x - \xi)}{k}. \tag{13}$$

Um die gewünschte Reihenentwicklung zu erhalten, wenden wir das bekannte Cauchysche Verfahren[2]) an. Sei $k = s + it$, dann legen wir in der komplexen k-Ebene eine Folge von Quadraten Q_m $(m = 1, 2, \ldots)$,

[1]) Vgl. E. Hilb, Math. Annalen 71 (1911), S. 82; A. Kneser, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver. 24 (1915), S. 36.

[2]) E. Picard, Traité d'Analyse, II. Bd. (1905), S. 179—192; G. D. Birkhoff, American M. S. Trans. 9 (1908), S. 373; E. Hilb, Math. Annalen 78 (1917), S. 139.

eren Seiten der s- und der t-Achse parallel sind und durch die Punkte $= \pm \frac{2m+1}{4}\pi$, $t = 0$ gehen. Dann ist unter Benutzung von (13)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^x \frac{u_2(k^2; x) - u_1(k^2; x)}{u(k^2; 2) - u(k^2; 1)} u(k^2; \xi) f(\xi)\, k\, d\xi\, dk \\
&= \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^x \frac{\sin k(x-2) - \sin k(x-1)}{\sin 2k - \sin k} \sin k\xi f(\xi)\, d\xi\, dk \\
&= \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^x \frac{1}{2 \sin 2k} [\cos k(x-2-\xi) - \cos k(x-2+\xi) \\
&\qquad - \cos k(x-1-\xi) + \cos k(x-1+\xi)] f(\xi)\, d\xi\, dk \\
&= \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \frac{f(x-0)}{2k}\, dk = \tfrac{1}{2} f(x-0)^3).
\end{aligned}
\right. \quad 14)
$$

Diese Gleichung gilt für $0 < x \leqq 1$; für $x = 0$ hat die linke Seite von (14) den Wert Null. Es ist also

$$
15) \quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^x G(k^2; x, \xi) f(\xi)\, k\, d\xi\, dk = \begin{cases} \tfrac{1}{2} f(x-0), & 0 < x \leqq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}
$$

Analog ergibt sich

$$
16) \quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^1 G(k^2; x, \xi) f(\xi)\, k\, d\xi\, dk = \begin{cases} 0, & 1 < x < 2, \\ \tfrac{1}{2} f(1) = \tfrac{1}{2} f(2), & x = 2. \end{cases}
$$

In der Tat kommt für $x = 2$ nur das Glied

$$
17) \quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^1 \frac{\cos k(2-1+\xi)}{2 \sin 2k} f(\xi)\, d\xi\, dk = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \frac{f(1)}{2k}\, dk = \tfrac{1}{2} f(1)
$$

n Betracht.

---

[3]) In der Tat kommt nach Ausschluß der Achse der reellen k durch einen beebig schmalen Sektor, innerhalb dessen, wie man leicht sieht, der entsprechende estandteil der linken Seite von (14) mit wachsendem m nach 0 konvergiert (vgl. icard l. c. (2) oder Hilb l. c. (2) S. 140) im Nenner bei genügend großem m nur n $2k$ in Betracht; nach Division durch $\sin 2k$ konvergieren dann mit wachsendem alle Glieder des Zählers nach 0, außer dem zu $\cos k(x-2-\xi)$ gehörigen Gliede, as aber auch, außer für die Werte von ξ in der unmittelbaren Nachbarschaft on x, nach 0 konvergiert. Die Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes und des auchyschen Satzes liefert dann das angegebene Resultat.

Ebenso findet man

$$(18)\quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_{x}^{1} G(k^2; x, \xi) f(\xi) k\, d\xi\, dk = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x+0) & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0,\ x = 1. \end{cases}$$

Es folgt daher durch Addition von (15) und (18) bzw. aus (16)

$$(19)\quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_{0}^{1} G(k^2; x, \xi) f(\xi) k\, d\xi\, dk = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2} f(1), & x = 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \\ \frac{1}{2} f(2), & x = 2. \end{cases}$$

Genau so erhält man

$$(20)\quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_{1}^{2} G(k^2; x, \xi) f(\xi) k\, d\xi\, dk = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < 1, \\ \frac{1}{2} f(1), & x = 1, \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & 1 < x < 2, \\ \frac{1}{2} f(2), & x = 2. \end{cases}$$

Die Addition von (19) und (20) ergibt also

$$(21)\quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_{0}^{2} G(k^2; x, \xi) f(\xi) k\, d\xi\, dk = \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \qquad 0 \leqq x \leqq 2.$$

Dabei bedeutet die rechte Seite von (21) für $x = 0$ den Wert $f(0)$, für $x = 2$ den Wert $f(2)$. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß die Gleichung

$$(22)\quad u(k^2, 2) - u(k^2, 1) = 0$$

nur einfache Wurzeln $\pm k_\mu$ besitze, so liefert der Cauchysche Residuensatz unmittelbar die für $0 \leqq x \leqq 2$ gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(23)\quad \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{\mu} C_\mu u(k_\mu^2; x),$$

in der die Summe über alle Wurzeln k_μ von (22) zu erstrecken ist und[4])

$$(24)\quad C_\mu = k_\mu \frac{[v(k_\mu^2; 2) - v(k_\mu^2; 1)] \int_0^1 u(k_\mu^2; \xi) f(\xi) d\xi + \int_1^2 u_2(k_\mu^2; \xi) f(\xi) d\xi}{\left[\frac{d}{dk}[u(k^2, 2) - u(k^2, 1)]\right]_{k = k_\mu}}.$$

[4]) Es verdient hervorgehoben zu werden, daß, wenn $q(x) \equiv 0$ ist, für unendlich viele Wurzeln k_μ der Faktor des Integrals $\int_0^1$ in C_μ den Wert 0 hat.

$$u_2(k_\mu^2;\xi) = u(k_\mu^2;\xi)\,v(k_\mu^2;2) - u(k_\mu^2;2)\,v(k_\mu^2;\xi)$$

t. Zu jeder Wurzel k_μ von (22) existiert eine Wurzel $(-k_\mu)$, welche in 23) genau denselben Summanden liefert wie $+k_\mu$.

Nimmt man umgekehrt an, es existiere eine für $0 \leqq x \leqq 2$ gleichäßig konvergente Reihenentwicklung für $f(x)$ der Form (23), so ergibt ich durch Einsetzen dieser Reihenentwicklung von $f(x)$ sowie von $f(x)$ elbst in die rechte Seite von (24) nach einigen Umformungen unter Zuilfenahme des Greenschen Satzes für C_μ der angegebene Wert, wodurch ewiesen ist, daß es nur eine einzige, für $0 \leqq x \leqq 2$ gleichmäßig konverente Entwicklung von $f(x)$ nach den Funktionen $u(k_\mu^2; x)$ gibt.

§ 2

) Zusammenstellung von Formeln aus der Theorie der Besselschen Funktionen.

Unter Abänderung der Bezeichnungen gehen wir von der Differentialleichung

25) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (\nu \text{ eine ganze Zahl})$$

us. Sie hat die partikulären Integrale

26) $$u(k^2; x) = J^\nu(kx), \quad v(k^2; x) = Y^\nu(kx)$$

nd es ist

27) $$J^\nu(kx)\frac{d}{dx}Y^\nu(kx) - Y^\nu(kx)\frac{d}{dx}J^\nu(kx) = \frac{2}{\pi x}.$$

Wir setzen

28) $$u_\xi(k^2; x) = J^\nu(kx)\,Y^\nu(k\xi) - J^\nu(k\xi)\,Y^\nu(kx),$$

o daß nach (28) und (27)

29) $$u_\xi(k^2;\xi) = 0, \quad \left[\frac{d}{dx}u_\xi(k^2; x)\right]_{x=\xi} = -\frac{2}{\pi\xi}$$

st. Die Funktionen $u_2(k^2; x)$ und $u_1(k^2; x)$ sind dann die entsprechend ormierten Integrale von (25), die für $x = 2$ bzw. $x = 1$ verschwinden. Für große Werte von $|x|$ hat man asymptotisch $(\sim)$

30a) $$J^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right),$$

enn $x = re^{\varphi i}$ und $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}$,

30b) $$J^\nu(x) \sim (-1)^\nu i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{2\nu+1}{4}\pi\right), \text{ wenn } \frac{1}{2}\pi < \varphi \leqq \tfrac{3}{2}\pi.$$

Ferner ist für große Werte von $|k|$ entsprechend der asymptotischen Darstellung des § 1

$$(31) \qquad u_\xi(k^2; x) \sim -\frac{2}{\pi k}\sqrt{\frac{1}{x\xi}}\sin k(x-\xi),$$

wenn ξ und x von Null verschieden sind.

Um $\frac{u_2(k^2; x)}{J^\nu(2k)}$ auch in der Umgebung von $x=0$ bequem asymptotisch darstellen zu können, führt man zweckmäßig die Hankelschen Funktionen

$$(32) \qquad H_1^\nu(kx) = J^\nu(kx) + iY^\nu(kx), \quad H_2^\nu(kx) = J^\nu(kx) - iY^\nu(kx)$$

ein. In der Tat ist

$$(33) \qquad \frac{1}{J^\nu(2k)}\left[J^\nu(kx)Y^\nu(2k) - J^\nu(2k)Y^\nu(kx)\right] = \pm i\left[J^\nu(kx) \pm iY^\nu(kx)\right] \mp i\frac{J^\nu(kx)}{J^\nu(2k)}\left[J^\nu(2k) \pm iY^\nu(2k)\right],$$

also

$$(34a) \qquad \frac{u_2(k^2; x)}{J^\nu(2k)} = iH_1^\nu(kx) - iJ^\nu(kx)\frac{H_1^\nu(2k)}{J^\nu(2k)}$$

oder

$$(34b) \qquad \frac{u_2(k^2; x)}{J^\nu(2k)} = -iH_2^\nu(kx) + iJ^\nu(kx)\frac{H_2^\nu(2k)}{J^\nu(2k)}.$$

Dabei sind die Grenzwerte

$$(35) \qquad \lim_{|x|=\infty}\left[\sqrt{x}e^{-ix}H_1^\nu(x)\right] \text{ und } \lim_{|x|=\infty}\left[\sqrt{x}\,e^{ix}H_2^\nu(x)\right]$$

endlich und von Null verschieden. Ist also $k = re^{i\varphi}$ und $0 \leqq \varphi < \pi$, so wird man die Formel (34a), ist $\pi \leqq \varphi < 2\pi$ die Formel (34b) wählen.

Es ist noch hervorzuheben, daß $u(k^2; x)$ eine eindeutige Funktion von k ist, daß ferner $u_\xi(k^2; x)$ entsprechend der in (29) angegebenen Normierung eine eindeutige Funktion von k^2 ist.

b) Aufstellung der Greenschen Funktion.

Wir definieren die Greensche Funktion $G(k^2; x, \xi)$ genau wie im § 1, nur daß wir verlangen, daß sie für $x=0$ regulär sei; außerdem ist jetzt die linke Seite von (10) noch mit ξ zu multiplizieren.

Es ergibt sich dann

$$36) \quad G(k^2; x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\frac{J^\nu(kx)[u_2(k^2;\xi) - u_1(k^2;\xi)]}{J^\nu(2k) - J^\nu(k)}, \\ \qquad 0 \leqq \xi \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \xi. \\ -\frac{\pi}{2}\frac{J^\nu(k\xi)[u_2(k^2;x) - u_1(k^2;x)]}{J^\nu(2k) - J^\nu(k)}, \\ \qquad 0 \leqq \xi \leqq 1,\ \xi \leqq x \leqq 2, \\ -\frac{\pi}{2}\frac{J^\nu(kx)\,u_2(k^2;\xi)}{J^\nu(2k) - J^\nu(k)}, \\ \qquad 1 \leqq \xi \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq \xi, \\ -\frac{\pi}{2}\frac{J^\nu(k\xi)\,u_2(k^2;x) - J^\nu(k)\,u_\xi(k^2;x)}{J^\nu(2k) - J^\nu(k)}, \\ \qquad 1 \leqq \xi \leqq 2,\ \xi \leqq x \leqq 2. \end{cases}$$

c) Reihenentwicklung einer willkürlichen Funktion.

Es sei $f(x)$ eine willkürlich vorgegebene Funktion, die denselben Bedingungen genüge wie in § 1b, nur für den Fall $\nu = 0$ kann man die Forderung (12a) fallen lassen. Im übrigen gehen wir wie in § 1b vor und legen die Quadrate Q_m so, daß die Nullstellen von $J^\nu(2k) - J^\nu(k)$ und von $J^\nu(2k)$ allein in endlicher Entfernung von den Seiten dieser Quadrate liegen, so daß auf den Seiten $|J^\nu(2k) - J^\nu(k)|$ und $|J^\nu(2k)|$ oberhalb einer endlichen festen Grenze bleibt.

Dann ist, wenn $0 < x \leqq 1$

$$37) \quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^x G(k^2; x, \xi)\, \xi f(\xi) k\, d\xi\, dk$$

$$= \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^x -\frac{\pi}{2}\frac{J^\nu(k\xi)[u_2(k^2;x) - u_1(k^2;x)]}{J^\nu(2k) - J^\nu(k)}\, \xi f(\xi) k\, d\xi\, dk.$$

Sei N eine beliebig große, aber feste Größe, so setzen wir

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^x J^\nu(k\xi)\frac{u_2(k^2;x) - u_1(k^2;x)}{J^\nu(2k) - J^\nu(k)}\, \xi f(\xi)\, d\xi = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{N}{|k|}} - \frac{\pi}{2}\int_{\frac{N}{|k|}}^x.$$

Es ist aber

$$\left| \int_0^{\frac{N}{|k|}} J^\nu(k\xi)\, \xi f(\xi)\, d\xi \right| = \frac{1}{|k^2|} \left| \int_0^N J^\nu\left(\frac{k}{|k|}\zeta\right) \zeta f\left(\frac{\zeta}{|k|}\right) d\zeta \right| < \frac{M}{|k^2|},$$

wobei M eine feste Größe ist. Aus (30a) und (31) folgt dann, wenn auch M_1 eine feste Größe ist,

$$\lim_{m=\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_m}\int_{0}^{\frac{N}{|k|}} G(k^2;x,\xi)\,\xi f(\xi)\,k\,d\xi\,dk\right| \leqq M_1 \lim_{m=\infty}\int_{Q_m}\frac{|dk|}{|k^{\frac{3}{2}}|}=0.$$

Ferner ist nach (30a) bzw. (30b) und (31)

$$\left\{\begin{aligned}
&\lim_{m=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_m}\int_{\frac{N}{|k|}}^{x} G(k^2;x,\xi)\,\xi f(\xi)\,k\,d\xi\,dk\\
&=\lim_{m=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_m}\int_{\frac{N}{|k|}}^{x}\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos\left(k\xi\mp\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\left(\sin k(x-2)-\sqrt{2}\sin k(x-1)\right)}{\cos\left(2k\mp\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)-\sqrt{2}\cos\left(k\mp\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\\
&\qquad\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 1\cdot 2\pi k}{\pi k\xi\cdot 2x\cdot 2}}\,\frac{2}{\pi k}\,\xi f(\xi)\,k\,d\xi\,dk\\
&=\lim_{m=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_m}\int_{\frac{N}{|k|}}^{x}\sqrt{\frac{\xi}{x}}\,\frac{1}{2k}\,\Pi(x,\xi,k)\,f(\xi)\,k\,d\xi\,dk,\\
&\Pi(x,\xi,k)=\frac{\sin\left(k(x-2+\xi)\mp\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\sin\left(k(x-2-\xi)\pm\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}{\cos\left(2k\mp\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\\
&-\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(k(x-1+\xi)\mp\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\sin\left(k(x-1-\xi)\pm\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}{\cos\left(2k\mp\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)},
\end{aligned}\right. \tag{38}$$

demnach

$$\begin{aligned}
&\lim_{m=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_m}\int_{\frac{N}{|k|}}^{x} G(k^2;x,\xi)\,\xi f(\xi)\,k\,d\xi\,dk\\
&=\lim_{m=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_m}\frac{f(x-0)}{2k}\,dk=\tfrac{1}{2}f(x-0),\quad 0<x\leqq 1.
\end{aligned}$$

Dabei lieferte bloß das Glied $\sin\left(k(x-2-\xi)\pm\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)$ einen Beitrag. Für $x=0$ hat stets die linke Seite von (37) den Wert Null. Zusammenfassend ist daher

9) $$\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^x G(k^2; x, \xi)\, \xi f(\xi) k\, d\xi\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x-0), & 0 < x \leqq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Analog ergibt sich

0) $$\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^1 G(k^2; x, \xi)\, \xi f(\xi) k\, d\xi\, dk = \begin{cases} 0, & 1 < x < 2, \\ \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} f(2), & x = 2, \end{cases}$$

1) $$\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_x^1 G(k^2; x, \xi)\, \xi f(\xi) k\, d\xi\, dk = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x+0), & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1. \\ 0. & x = 0, \quad \nu + 0, \\ f(0), & x = 0, \quad \nu = 0. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung ($x = 0$, $\nu = 0$) wird in **d)** abgeleitet.

Man erhält also die (19) entsprechenden Gleichungen und auch ohne eitere Schwierigkeit die zu (20) analogen Gleichungen, so daß schließlich

2) $$\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_x^1 G(k^2; x, \xi)\, \xi f(\xi) k\, d\xi\, dk = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \qquad 0 \leqq x \leqq 2;$$

abei bedeutet die rechte Seite für $x = 0$ und $x = 2$ entsprechend $f(0)$ nd $f(2)$.

Nehmen wir nun an, die Gleichung

3) $$J^\nu(2k) - J^\nu(k) = 0$$

abe nur einfache Wurzeln k_μ, so erhält man

4) $$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sum_\mu C_\mu J^\nu(k_\mu x),$$

obei die Summe über alle Wurzeln k_μ von (43) zu erstrecken ist und

5) $$C_\mu = -\frac{\pi}{2} k_\mu \frac{[Y^\nu(2k_\mu) - Y^\nu(k_\mu)] \int_0^1 J^\nu(k_\mu \xi) \xi f(\xi)\, d\xi + \int_1^2 u_2(k_\mu^2; \xi) \xi f(\xi)\, d\xi}{\left[\frac{d}{dk}[J^\nu(2k) - J^\nu(k)]\right]_{k = k_\mu}},$$

$$u_2(k_\mu^2; \xi) = J^\nu(k_\mu \xi) Y^\nu(2k_\mu) - J^\nu(2k_\mu) Y^\nu(k_\mu \xi)$$

t. Auf den Fall, daß (43) mehrfache Wurzeln hat, braucht nicht näher ngegangen zu werden. Der letzte Satz des § 1 läßt sich auf den vor- egenden Fall unmittelbar übertragen, sofern man nur annimmt, daß die eihe zwar nicht gleichmäßig konvergent, aber entsprechend gliedweise tegrierbar sei.

d) Beweis der letzten Gleichung (41).

Es ist noch

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_m} \int_0^1 G(k^2; x, \xi)\, \xi f(\xi)\, k\, d\xi\, dk$$

zu untersuchen, wenn $\nu = 0$ ist. Es ist aber

$$J^0(k0) = 1 \tag{46}$$

und nach (34a)

$$\frac{\int_0^1 [u_2(k^2; \xi) - u_1(k^2; \xi)]\, \xi f(\xi)\, d\xi}{J^0(2k) - J^0(k)} = \frac{i \int_0^1 H_1^0(k\xi)\, \xi f(\xi)\, d\xi}{1 - \frac{J^0(k)}{J^0(2k)}} \tag{47}$$

$$- \frac{i \int_0^1 H_1^0(2k) J^0(k\xi) f(\xi)\, \xi\, d\xi}{J^0(2k) - J^0(k)} - \frac{i \int_0^1 H_1^0(k\xi)\, \xi f(\xi)\, d\xi}{\frac{J^0(2k)}{J^0(k)} - 1}$$

$$+ \frac{i \int_0^1 H_1^0(k) J^0(k\xi) f(\xi)\, \xi\, d\xi}{J^0(2k) - J^0(k)}.$$

Ist in $k = re^{i\varphi}$ aber $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$, so ist nach (34b) entsprechend H_2^0 einzuführen. Nur das erste Integral liefert für $m = \infty$ einen Beitrag und soll daher allein ausführlicher untersucht werden. Wir setzen wieder

$$\int_0^1 H_1^0(k\xi)\, \xi f(\xi)\, d\xi = \int_0^{\frac{N}{|k|}} + \int_{\frac{N}{|k|}}^1. \tag{48}$$

Es ist

$$\int_0^{\frac{N}{|k|}} H_1^0(k\xi)\, \xi f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{|k|^2} \int_0^N H_1^0\left(\frac{k}{|k|}\zeta\right) \zeta f\left(\frac{\zeta}{|k|}\right) d\zeta \tag{49}$$

$$= \frac{1}{|k^2|} f(0) \int_0^N H_1^0\left(\frac{k}{|k|}\zeta\right) \zeta\, d\zeta + \frac{1}{|k^2|} \int_0^N H_1^0\left(\frac{k}{|k|}\zeta\right) \zeta \left(f\left(\frac{\zeta}{|k|}\right) - f(0)\right) d\zeta$$

Wählt man $|k|$ groß genug, so wird bei festgehaltenem N die Größe $\left|f\left(\frac{\zeta}{|k|}\right) - f(0)\right|$ kleiner als eine beliebig kleine Zahl ε, wenn $0 \leqq \zeta \leqq N$ und es existiert eine von k unabhängige Zahl M, so daß

50) $$\frac{1}{|k^2|}\int_0^N H_1^0\left(\frac{k}{|k|}\zeta\right)\zeta\left(f\left(\frac{\zeta}{|k|}\right)-f(0)\right)d\zeta<\frac{\varepsilon M}{|k^2|}$$

wird. Aus dem Greenschen Satze folgt ferner

51) $$\lambda^2\int_0^N H_1^0(\lambda\zeta)\zeta\,d\zeta=\left(\zeta\frac{d}{d\zeta}H_1^0(\lambda\zeta)\right)_{\zeta=0}-N\left(\frac{d}{d\zeta}H_1^0(\lambda\zeta)\right)_{\zeta=N}.$$

Da

52) $$\left(\zeta\frac{dH_1^0(\lambda\zeta)}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}=\frac{2i}{\pi},\qquad \left(\frac{dH_1^0(\lambda\zeta)}{d\zeta}\right)_{\zeta=N}\sim\frac{ie^{i\left(\lambda N-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\lambda N}},$$

so ergibt sich

53) $$\int_0^{\frac{N}{|k|}} H_1^0(k\xi)\xi f(\xi)d\xi\sim\frac{f(0)2i}{\pi k^2}-i\frac{\sqrt{N}e^{i\left(\frac{kN}{|k|}-\frac{\pi}{4}\right)}}{k^2\sqrt{\frac{1}{2}\pi\frac{k}{|k|}}}.$$

Da für H_2^0 eine ganz entsprechende Formel gilt, und auf den zweiten Summanden der rechten Seite von (48) die gewöhnliche asymptotische Darstellung anwendbar ist, so ergibt sich schließlich[5]) nach weiteren einfachen Abschätzungen

54) $$\lim_{m=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_m}\int_0^1 G(k^2;x,\xi)\xi f(\xi)k\,d\xi\,dk=f(0).$$

---

[5]) Der zweite Summand der rechten Seite von (53) liefert, da N beliebig groß gewählt werden kann, für die rechte Seite von (54) keinen Beitrag.

(Eingegangen am 11. September 1917.)

Über die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Von

Leopold Fejér in Budapest.

Für die homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen hat É. Picard[1]), im Rahmen seiner wichtigen Untersuchungen auf diesem Gebiete, auch hinreichende Bedingungen für die Nichtexistenz einer Lösung mit negativem Minimum und positivem Maximum gegeben. Seine diesbezüglichen Resultate wurden von A. Paraf[2]) weiter verfolgt und durch Th. Moutard[3]) auf die Gleichung mit n unabhängigen Veränderlichen verallgemeinert.

Ich bringe in den folgenden Zeilen den Gegenstand, mit denselben Methoden, wieder zur Darstellung, hauptsächlich um einige Punkte im Beweise, namentlich aber um die *Notwendigkeit* der durch Th. Moutard verallgemeinerten Picardschen Bedingung zu betonen.

§ 1.

Ein Satz über nichtnegative quadratische Formen.

1. Es sei

$$g = \sum_{i,k} g_{ik}\xi_i\xi_k \qquad (g_{ik} = g_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

eine quadratische Form der reellen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ mit reellen

[1]) É. Picard, Traité d'Analyse, zweite Auflage, Bd. II, 1905, S. 32 bis 36.

[2]) A. Paraf, Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre, Annales de Toulouse 6 (1892), H, S. 1 bis 75.

[3]) Th. Moutard, Notes sur les équations aux dérivées partielles, Journal de l'École Polytechnique, Heft 64 (1894), S. 55 bis 69. — Über die Literatur im allgemeinen vgl. A. Sommerfeld, Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II A 7c, S. 504 bis 570.

Koeffizienten, die für jedes reelle Wertsystem einen nichtnegativen Wert annimmt. Bekanntlich lassen sich dann n lineare Formen in $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ mit reellen Koeffizienten

2) $$\sum_{s=1}^{n} p_{rs}\xi_s \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

finden, so daß, identisch in $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$,

3) $$\sum_{i,k} g_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n} p_{rs}\xi_s\right)^2.$$

D. h. es lassen sich n^2 reelle Größen p_{rs} angeben, durch die das Koeffizientensystem der nichtnegativen Form g in folgender Weise darstellbar ist:

4) $$g_{ik} = \sum_{r=1}^{n} p_{ri}\,p_{rk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

(Durchlaufen in (4) die p_{rs} alle reellen Werte, so liefern die Formeln (4) die Gesamtheit aller nichtnegativen Formen. Die Formeln (4) geben also eine *Parameterdarstellung* aller nichtnegativen Formen.)

2. Es sei nun

5) $$h = \sum_{i,k} h_{ik}\xi_i\xi_k \quad (h_{ik} = h_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots n)$$

eine zweite nichtnegative Form, und

6) $$h_{ik} = \sum_{s=1}^{n} q_{si}\,q_{sk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

eine Parameterdarstellung dieser. Dann ist, wegen (4) und (6),

$$g_{ik}h_{ik} = \sum_{r,s} p_{ri}\,p_{rk}\,q_{si}\,q_{sk} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots n).$$

Also

7) $$\sum_{i,k} g_{ik}h_{ik} = \sum_{i,k,r,s} p_{ri}\,q_{si}\,p_{rk}\,q_{sk} = \sum_{r,s}\left(\sum_{\lambda=1}^{n} p_{r\lambda}\,q_{s\lambda}\right)^2 \geqq 0.$$

Wir haben also erhalten[4]): *Sind* $\sum_{i,k} g_{ik}\xi_i\xi_k$ *und* $\sum_{i,k} h_{ik}\xi_i\xi_k$ *zwei beliebige quadratische Formen mit reellen Koeffizienten, die nichtnegativ sind, so ist*

8) $$\sum_{i,k} g_{ik}h_{ik} \geqq 0.$$

[4]) Vgl. die oben zitierte Arbeit von Th. Moutard.

(In der Ungleichung (8) kann auch das Gleichheitszeichen gültig sein. Dieser Fall tritt immer ein, wenn eine der Formen g und h identisch verschwindet. Schließen wir diesen Fall aus, so kann in (8) das Gleichheitszeichen nur dann gültig sein, wenn beide Formen g und h semidefinit sind. Denn wäre etwa g positiv definit, so würde aus (7), da $\Sigma g_{ik} h_{ik} = 0$, folgen, daß sämtliche Parameter q_{rs} von h gleich Null sind, d. h. daß die Form h identisch verschwindet. Sind die Formen g und h beide semidefinit, so kann die Summe $\Sigma g_{ik} h_{ik}$ in der Tat verschwinden. Z. B. ist für die binären Formen

$$g = (\xi_1 - \xi_2)^2 = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2,$$
$$h = (\xi_1 + \xi_2)^2 = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$$
$$\sum_{i,k} g_{ik} h_{ik} = 1 - 2 + 1 = 0.)$$

3. Ich bemerke noch, daß aus der Ungleichung (8) für die Koeffizienten eines Paares nichtnegativer Formen das folgende merkwürdige Theorem von J. Schur[5]) folgt:

Sind die quadratischen Formen $\sum g_{ik}\xi_i\xi_k$ und $\sum h_{ik}\xi_i\xi_k$ nichtnegativ, so ist auch die quadratische Form

$$\sum g_{ik} h_{ik} \xi_i \xi_k \tag{9}$$

nichtnegativ.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\sum g_{ik} t_i t_k \geqq 0$$

für jedes reelle Wertsystem $t_1, t_2, \ldots t_n$. Also ist, wenn ich, für $i = 1, 2, \ldots n$, statt t_i das Produkt $\xi_i t_i$ setze,

---

[5]) J. Schur, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, Journal für Mathematik 140 (1911), S. 1 bis 28. — Das Theorem von J. Schur bezieht sich allgemeiner auf nichtnegative Hermitesche Formen und enthält auch genauere Angaben über die charakteristischen Wurzeln der neugebildeten Form. Es lautet: „Sind

$$A = \sum_{p,q} a_{pq} x_p \bar{x}_q, \qquad B = \sum_{p,q} b_{pq} x_p \bar{x}_q \qquad (a_{pq} = \bar{a}_{qp}, \quad b_{pq} = \bar{b}_{qp})$$

zwei (nichtnegativ) definite Hermitesche Formen, so besitzt auch die Form

$$C = \sum_{p,q} a_{pq} b_{pq} x_p \bar{x}_q$$

dieselbe Eigenschaft. Bezeichnet man mit α und α' die größte und die kleinste charakteristische Wurzel der Form A, ferner mit b und b' die größte und die kleinste unter den Zahlen $b_{11}, b_{22}, \ldots b_{nn}$, so liegt jede charakteristische Wurzel der Form C zwischen $\alpha' b'$ und αb.“

10) $$\sum g_{ik}\xi_i\xi_k t_i t_k \geqq 0.$$

Weiter ist nach Voraussetzung

11) $$\sum h_{ik} t_i t_k \geqq 0.$$

Also liefert die Ungleichung (8), angewendet auf die nichtnegativen Formen (10) und (11) von $t_1, t_2, \ldots t_n$

12) $$\sum g_{ik} h_{ik} \xi_i \xi_k \geqq 0$$

für jedes reelle Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, w. z. b. w.

Umgekehrt folgt natürlich auch (8) aus (12); es genügt, in (12) einfach $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 1$ zu setzen.

§ 2.

Bedingung für die Nichtexistenz von Lösungen mit gewissen Extremalwerten einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

4. Die allgemeinste homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form:

D) $$\sum_{i,k} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_r b_r(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_r} + c(x_1, x_2, \ldots x_n)u = 0,$$

$$a_{ik}(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{ki}(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Ich setze voraus, daß die Koeffizienten $a_{ik}(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $b_r(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $c(x_1, x_2, \ldots x_n)$ reelle Funktionen der reellen unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind und daß sie an der Stelle

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots \quad x_n = 0$$

alle regulär-analytisch sind.

Ich führe die Bezeichnungen ein:

$$a_{ik}(0, 0, \ldots 0) = a_{ik}, \quad b_r(0, 0, \ldots 0) = b_r, \quad c(0, 0, \ldots 0) = c.$$

Ich mache nun die beiden Voraussetzungen:

I. Es ist für jedes reelle Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqq 0,$$

d. h. diese quadratische Form ist nichtnegativ.

II. Es gilt

$$c < 0.$$

Behauptung. Eine für $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots x_n = 0$ reguläre, reelle Lösung $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Differentialgleichung (D) kann an der Stelle $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ x_n = 0$ weder ein negatives Minimum, noch ein positives Maximum haben.

Beweis. Nehmen wir an, daß die für $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ x_n = 0$ reguläre Lösung

$$(1) \qquad u(x_1, x_2, \ldots x_n) = u_0 + \sum_r u_r x_r + \tfrac{1}{2}\sum_{i,k} u_{ik} x_i x_k + \ldots$$

ebenda ein negatives Minimum hätte. Aus dieser Annahme folgt nun: 1. daß $u_0 < 0$, 2. daß $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$, 3. daß die quadratische Form $\sum u_{ik}\xi_i\xi_k$ nichtnegativ ist (d. h. daß sie entweder positiv definit, oder positiv semidefinit, oder identisch gleich Null ist). Dies führt aber zum Widerspruch. Denn die Differentialgleichung (D) ergibt für $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ x_n = 0$ die Relation

$$(2) \qquad \sum_{i,k} a_{ik} u_{ik} + c\,u_0 = 0,$$

und diese ist unmöglich. Da nämlich, nach Voraussetzung, $c < 0$ und ferner $u_0 < 0$ ist, so ist $c\,u_0 > 0$. Der erste Summand in (2) ist aber auf Grund der Ungleichheit (8) § 1 nichtnegativ, weil die quadratischen Formen $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k$ und $\sum u_{ik}\xi_i\xi_k$ beide nichtnegativ sind. Also ist die linke Seite in (2) positiv, somit die Relation (2) unmöglich.

Wir haben bewiesen, daß eine reguläre Lösung $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an der Stelle $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ kein negatives Minimum haben kann. Aber auch ein positives Maximum kann eine reguläre Lösung an der Stelle $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ nicht haben. Denn hätte $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ ein positives Maximum, so hätte die Funktion $-u(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die ebenfalls eine für $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ reguläre Lösung der Gleichung (D) darstellt, an dieser Stelle ein negatives Minimum. Das ist aber unmöglich, wie wir eben bewiesen haben.

Damit ist der Beweis unserer Behauptung zu Ende geführt.

§ 3.

Über die Notwendigkeit der ersten Bedingung, wenn die zweite festgehalten wird. Zusammenfassung. Anwendung.

5. Ich setze nun, im Gegensatz zu der Bedingung I § 2, voraus, daß die quadratische Form

$$(A) \qquad \sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

uch *negative* Werte anzunehmen fähig sei. (Die Form (A) ist also ent-eder indefinit, oder negativ semidefinit, oder negativ definit.) Die oraussetzung II. behalte ich bei; es sei also wieder:

B) $$c < 0.$$

Behauptung. In diesem Falle hat die Differentialgleichung (D) ine Lösung $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die an der Stelle $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ regulär st, und daselbst ein negatives Minimum hat.

Beweis. Da, nach Voraussetzung, die Form (A) auch negative Verte annehmen kann, so können nicht alle a_{ik} gleich Null sein. Ich nterscheide nun zwei Fälle. Der erste Fall sei derjenige, in welchem nindestens eine der n Größen $a_{ii} (i = 1, 2, \ldots n)$ von Null verschieden st. Der zweite Fall sei derjenige, in welchem alle $a_{ii} = 0$ sind.

6. Erster Fall. Ich kann mir die Bezeichnung der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so gewählt denken, daß $a_{11} \neq 0$ ausfällt.

Es seien nun

1) $$\lambda(x_2, x_3, \ldots x_n) = \lambda_0 + \sum_{r=2}^{n} \lambda_r x_r + \sum_{i,k=2}^{n} \lambda_{ik} x_i x_k + \ldots,$$

2) $$\mu(x_2, x_3, \ldots x_n) = \mu_0 + \sum_{r=2}^{n} \mu_r x_r + \sum_{i,k=2}^{n} \mu_{ik} x_i x_k + \ldots$$

wei beliebige Potenzreihen von $x_2, x_3, \ldots x_n$ mit beliebigen reellen Koeffizienten, die in einer gewissen Umgebung von $x_2 = 0, x_3 = 0, \ldots x_n = 0$ konvergieren. Dann existiert nach dem Theoreme von Cauchy und S. Kowalewsky eine in der Umgebung von $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ konvergente Potenzreihe $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, die dort der Differentialgleichung (D) genügt und die, nach Potenzen von x_1 geordnet, mit

3) $$u(x_1, x_2, \ldots x_n) = \lambda(x_2, x_3, \ldots x_n) + \mu(x_2, x_3, \ldots x_n) x_1 + \nu(x_2, \ldots x_n) x_1^2 + \ldots$$

beginnt, wo $\lambda(x_2, x_3, \ldots x_n)$, $\mu(x_2, x_3, \ldots x_n)$ eben die unter (1), (2) willkürlich vorgeschriebenen Potenzreihen in $x_2, x_3, \ldots x_n$ bedeuten. Mit Rücksicht auf (1) und (2) lautet nun die konvergente Entwicklung (3):

4) $$u(x_1, x_2, \ldots x_n) = \lambda_0 + \sum_{r=2}^{n} \lambda_r x_r + \mu_0 x_1 + \sum_{i,k=2}^{n} \lambda_{ik} x_i x_k + \sum_{r=2}^{n} \mu_r x_1 x_r + \nu_0 x_1^2 + \ldots$$

Die nichtaufgeschriebenen Glieder sind von dritter und höherer Ordnung

in $x_1, x_2, \ldots x_n$. Die Größe r_0 ist der Wert von $r(x_2, x_3, \ldots x_n)$ für $x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ \ldots\ x_n = 0$. Da nun

$$\lambda_0,$$
$$\lambda_r \ (r = 2, 3, \ldots n), \qquad \mu_0,$$
$$\lambda_{ik} \ (i, k = 2, 3, \ldots n), \quad \mu_r \ (r = 2, 3, \ldots n)$$

beliebige Konstanten sind, so kann ich sagen: Die Differentialgleichung (D) hat, wenn $a_{11} \neq 0$, eine (übrigens sogar unendlich viele) für $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ reguläre Lösung

$$(5) \qquad u(x_1, x_2, \ldots x_n) = u_0 + \sum_{r=1}^{n} u_r x_r + \tfrac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} u_{ik} x_i x_k + \ldots,$$

wo das absolute Glied u_0, die Koeffizienten u_r des homogenen linearen Teiles, die Koeffizienten u_{ik} des homogenen quadratischen Teiles willkürlich vorgeschriebene Größen sind, die indessen der homogenen lineare Relation

$$(6) \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{r=1}^{n} b_r u_r + c\, u_0 = 0,$$

in welche die Differentialgleichung (D) für $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ übergeht, Genüge leisten müssen.

Von dieser, aus dem Cauchy-Kowalewskyschen Theorem unmittelbar fließender Tatsache will ich nun Gebrauch machen.

Nach Voraussetzung (A) existiert ein reelles Wertsystem,

$$(7) \qquad l_1, l_2, \ldots l_n,$$

so daß

$$(8) \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} l_i l_k = -\sigma^2 < 0.$$

Ich will nun für eine Lösung von (D) die Koeffizienten u_r und u_{ik} in folgender Weise feststellen:

$$(9) \qquad \begin{aligned} u_r &= 0 && (r = 1, 2, \ldots n) \\ u_{ik} &= l_i l_k + \varepsilon \delta_{ik}, && (i, k = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

wo

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

und $\varepsilon > 0$.

Dann liefert die Relation (6)

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} l_i l_k + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + c\, u_0 = 0$$

ir u_0 den Wert

10) $$u_0 = \frac{1}{c}\left(\sigma^2 - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right),$$

er wegen $c < 0$ gewiß *negativ* ist, wenn nur die positive Größe ε in (9) *inreichend klein* angenommen wird.

Betrachten wir nun eine Lösung (5) der Differentialgleichung (D), ir welche die Koeffizienten u_0, u_r, u_{ik} nach (10) und (9) festgesetzt nd. Ich behaupte, daß diese Lösung an der Stelle $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ in negatives Minimum hat. Denn: erstens, ist $u_0 < 0$; zweitens, ist ach (9) $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$; drittens, hat die quadratische Form $\sum u_{ik}\xi_i\xi_k$ [mit Rücksicht auf (9)] die Gestalt

$$\sum_{i,k=1}^{n} l_i l_k \xi_i \xi_k + \varepsilon \sum_{i,k=1}^{n} \delta_{ik} \xi_i \xi_k = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i \xi_i\right)^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

nd ist demnach *positiv definit*. Also hat die Lösung $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n der Stelle $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ ein negatives Minimum.

Die Lösung $-u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ hat an derselben Stelle ein positives Iaximum.

7. Zweiter Fall. (Die Größen a_{ii} $(i = 1, 2, \ldots n)$ sind alle gleich Iull.) Da, wie schon erwähnt, aus der Voraussetzung (A) folgt, daß icht sämtliche a_{ik} verschwinden können, will ich mit a_{ik} $(i < k)$ ein $_{rs}$ bezeichnen, welches nicht gleich Null ist.

Ich führe nun in üblicher Weise statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ neue unabängige Veränderliche $z_1, z_2, \ldots z_n$ ein, die mit alleiniger Ausnahme on z_i und z_k den entsprechenden Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich sind, ährend zugleich

$$z_i = x_i + x_k$$
$$z_k = x_i - x_k$$

ilt. Durch diese Transformation entsteht aus (D) eine neue homogene neare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher $_1, z_2, \ldots z_n$ die unabhängigen Veränderlichen sind, und die an der telle $z_1 = 0, \ldots z_n = 0$ den Bedingungen (A) und (B) wieder genügt. n dieser neuen Gleichung hat aber der Koeffizient von $\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}$ an der telle $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ den Wert $2a_{ik}$, ist also von Null verschieden. ei der neuen Differentialgleichung tritt also für $z_1 = 0, \ldots z_n = 0$ der chon behandelte erste Fall auf; sie hat also für $z_1 = 0, \ldots z_n = 0$ eine eguläre Lösung, die daselbst ein negatives Minimum besitzt. Folglich at auch die Gleichung (D) eine ebensolche Lösung in $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Hiermit ist die Behauptung vollständig erwiesen.

8. Das Vorhergehende gestattet nun der Th. Moutardschen Verallgemeinerung des Picardschen Theorems folgende schärfere Fassung zu geben:

Es sei

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{r=1}^{n} b_r(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_r} + c(x_1, x_2, \dots x_n)u = 0$$

$$a_{ik}(x_1, x_2, \dots x_n) \equiv a_{ki}(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den reellen unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ und mit der reellen unbekannten Funktion $u(x_1, x_2, \dots x_n)$. Die Koeffizienten $a_{ik}(x_1, x_2, \dots x_n)$, $b_r(x_1, x_2, \dots x_n)$, $c(x_1, x_2, \dots x_n)$ seien alle reelle Funktionen, die für $x_1 = 0, \dots x_n = 0$ regulär-analytisch sind. Die Werte der Koeffizienten im Anfangspunkte seien mit

$$a_{ik}(0, 0, \dots 0) = a_{ik}, \quad c(0, 0, \dots 0) = c$$

bezeichnet. Ist dann

$$(\alpha) \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqq 0$$

für jedes reelle Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, d. h. ist diese Form nichtnegativ, und ist

$$(\beta) \qquad c < 0,$$

so hat die Differentialgleichung keine Lösung, die sich an der Stelle $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots x_n = 0$ regulär verhält und daselbst ein negatives Minimum oder ein positives Maximum besitzt.

Ist aber die Bedingung (α) für ein reelles Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ nicht befriedigt, d. h. ist für ein Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k < 0,$$

so existiert stets eine für $x_1 = 0, \dots x_n = 0$ reguläre Lösung, die an der Stelle $x_1 = 0, \dots x_n = 0$ ein negatives Minimum, oder auch ein positives Maximum besitzt, falls die Bedingung (β) $c < 0$ wieder erfüllt ist.

Bei festgehaltener Bedingung (β) ist also die Bedingung (α) für die Nichtexistenz regulärer Integrale mit negativem Minimum oder positivem Maximum an der Stelle Null nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

Dieses Theorem läßt sich natürlich entsprechend für eine jede Stelle

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots x_n = a_n$$

rmulieren, in der alle Koeffizienten der Differentialgleichung regulär nd.

9. Ich möchte nur noch eine bekannte Anwendung der ersten Hälfte eses Theorems erwähnen.

Die Koeffizienten und die Lösung u seien regulär im Innern eines ndlichen, abgeschlossenen Gebietes G im Raume $x_1, x_2, \ldots x_n$, und u i stetig im ganzen abgeschlossenen Gebiete G. Dann ist u durch seine andwerte am Rande von G eindeutig bestimmt, falls in jedem inneren unkte von G die quadratische Form in $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots x_n)\, \xi_i \xi_k$$

ichtnegativ, und $c(x_1, x_2, \ldots x_n) < 0$ ist. Wäre nämlich u' eine zweite lche Lösung, mit denselben Stetigkeitseigenschaften und Randwerten, wäre $(u - u')$ eine Lösung von (D), die auf dem Rande von G überall erschwindet. Die Lösung $(u - u')$ hätte also in einem inneren Punkte on G (wo sie regulär ist), entweder ein negatives Minimum, oder ein ositives Maximum, was unmöglich ist. Also ist $u' \equiv u$.

Budapest, den 6. Oktober 1917.

(Eingegangen am 12. Oktober 1917.)

Zur Theorie der nichtlinearen Differenzengleichungen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

In früheren Arbeiten[1]) habe ich mich mit der Lösung zweier Klassen von *nichtlinearen Differenzengleichungen* durch *Laplacesche Integrale* und *Fakultätenreihen* beschäftigt. Hiernach bleibt noch eine weitere Klasse von Differenzengleichungen zu behandeln, nämlich *die Gleichung* (D) *oder* ($\overline{\text{D}}$) in § 1 der vorliegenden Abhandlung, welche an eine von Briot und Bouquet in Angriff genommene, von Poincaré und Picard behandelte Differentialgleichung erinnert. Man wird dabei auf eine Klasse von *nichtlinearen Integralgleichungen* geführt, deren Untersuchung ich bereits früher begonnen habe[2]). Der Fall, daß die in § 1 mit a bezeichnete Konstante eine ganze positive Zahl ist, wird zunächst ausgeschlossen[3]).

---

[1]) Über eine nichtlineare Differenzengleichung, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 26 (1917), S. 230, im Anschluß an den ersten Teil der Arbeit, Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen, Journ. f. Math. 146 (1916), S. 95 bis 115; Über nichtlineare Differenzengleichungen, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 25 (1917), S. 137—148. — Es sei auch auf die Abhandlung hingewiesen, Laplacesche Integrale als Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen, Journ. f. Math. 144 (1914), S. 167 bis 189, deren Fortsetzung in Bd. 148 erscheint.

[2]) Vgl. die Integralgleichungen (B) und (C) in dem Aufsatze, Über nichtlineare Integralgleichungen vom Volterraschen Typus, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 23 (1914), S. 303—313, und in einer demnächst in der gleichen Zeitschrift erscheinenden Fortsetzung.

[3]) Dieser Ausnahmefall wird später zu behandeln sein; auf ihn führen die Betrachtungen, die ich angestellt habe, um Nr. 83 des Gaußschen Tagebuchs aufzuklären (vgl. die Erläuterung von Schlesinger, Gauß' Werke Bd. X_1, S. 525—529). Die Gleichung (7) a. a. O. S. 526

$$x_{i+1} = x_i + a_{m+1}x_i^{m+1} + a_{m+2}x_i^{m+2} + \cdots \qquad (a_{m+1} \neq 0)$$

geht nämlich durch die Substitution

$$x_i = i^{-\frac{1}{m}}\left(\sqrt[m]{-\frac{1}{m\,a_{m+1}}} + y_i\right)$$

Die *Hauptergebnisse* der Untersuchung der Differenzengleichung (D) oder (D) sind *in* § 7 *zusammengestellt.*

§ 1.

Differenzengleichung und Integralgleichung.

Die Differentialgleichung

$$\frac{1}{x}\,\frac{dy}{d\frac{1}{x}} = P\left(\frac{1}{x},\ y\right)$$

oder

d) $$x\frac{dy}{dx} + P\left(\frac{1}{x},\ y\right) = 0,$$

wo

$$P\left(\frac{1}{x},\ y\right) = \sum A_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} y^{\mu} \qquad (\lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \lambda + \mu > 0)$$

an der Stelle $x = \infty$, $y = 0$ verschwindet und in der Umgebung dieser Stelle regulär ist, wird nach Poincaré[4]) und Picard[5]), wenn $A_{01} = a$ einen positiven reellen Teil hat, aber keine ganze positive Zahl ist, durch eine Potenzreihe

$$y = \sum c_{\lambda,\mu} C^{\mu}\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda+\mu a} = \sum c_{\lambda,\mu} x^{-\lambda}(Cx^{-a})^{\mu} \quad (\lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \lambda + \mu > 0)$$

der beiden Größen x^{-1} und Cx^{-a} (C willkürliche Konstante) befriedigt, welche konvergiert, wenn die absoluten Beträge dieser Größen hinreichend klein sind; im Falle $\Re(a) \leqq 0$ erscheint als Lösung von (d) eine in der Umgebung von $x = \infty$ konvergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_{\lambda}}{x^{\lambda}}.$$

Die Differenzengleichung

D) $$x\,\Delta_{-1} y = P\left(\frac{1}{x},\ y\right)$$

wo

$$\Delta_{-1} y = y(x-1) - y(x)$$

---

oder in

$$i\,\Delta y_i = \bar{P}\left(i^{-\frac{1}{m}},\ y_i\right), \qquad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

wo $\bar{P}$ eine Potenzreihe der beigefügten Größen ohne konstantes Glied darstellt, in welcher der Koeffizient von y_i gleich -1 ist. Im Falle $m = 1$ ist das eine Differenzengleichung der Form ($\bar{\mathrm{D}}$) mit $\bar{a} = -1$ oder $a = 1$.

[4]) Journ. de l'École polyt., Heft 45 (1878), S. 13.

[5]) Comptes rendus 87 (1878), S. 430 u. 743.

ist und $P\left(\frac{1}{x}, y\right)$ dieselbe Bedeutung hat wie oben, *wird, wenn a keine ganze positive Zahl ist, ebenfalls durch eine Reihe*

$$y = \sum c_{\lambda\mu} C^{\mu} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda+\mu a} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda + \mu > 0)$$

formal befriedigt, die wir im Falle $\Re(a) > 0$ benutzen; dabei ist $c_{\lambda\mu}$ eine Konstante und C eine willkürliche Funktion von x mit der Periode 1, so daß $c_{01} = 1$ angenommen werden kann; *im Falle $\Re(a) \leqq 0$ benutzen wir die Potenzreihe von $\frac{1}{x}$*

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_\lambda}{x^\lambda}.$$

Die der Differenzengleichung genügenden Reihen sind aber im allgemeinen *divergent.*

Man kann, wenn m irgendeine ganze positive Zahl ist,

$$A_{10} = A_{20} = \ldots = A_{m0} = 0$$

voraussetzen. Denn wenn man

$$y = \psi + z, \qquad \psi = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_m}{x^m}$$

setzt, erhält man für z die Differenzengleichung

$$x\Delta_{-1} z = P\left(\frac{1}{x}, \psi\right) - x\Delta_{-1}\psi + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial \psi^\nu} P\left(\frac{1}{x}, \psi\right) z^\nu;$$

dabei ist

$$P\left(\frac{1}{x}, \psi\right) - x\Delta_{-1}\psi = \frac{(a-1)c_1 + A_{10}}{x} + \frac{(a-2)c_2 + A_{20} + (A_{11} - 1)c_1 + A_{02}c_1^2}{x^2} + \ldots;$$

wenn a keine ganze positive Zahl ist, kann man $c_1, c_2, \ldots c_m$ so bestimmen, daß die Koeffizienten von $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^m}$ in dieser Reihenentwicklung verschwinden. — Wenn der reelle Teil α von a positiv ist, nehmen wir $m > \alpha - 1$ an. Wenn $A_{10} = A_{20} = \ldots = A_{m0} = 0$ ist, ist auch $C_{10} = C_{20} = \ldots = C_{m0} = 0$.

Wenn man in der Differenzengleichung (D) x durch $x+1$ ersetzt, die Gleichung

$$y(x) = y(x+1) + \sum A_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{x+1}\right)^\lambda [y(x+1)]^\mu$$

nach $y(x+1)$ auflöst und

$$\Delta y = y(x+1) - y(x)$$

setzt, erhält man

(D̄) $$x\,\Delta y = \bar{P}\left(\frac{1}{x},\ y\right),$$

$$\bar{P}\left(\frac{1}{x},\ y\right) = \sum \bar{A}_{\lambda\mu}\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} y^{\mu} \quad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda + \mu > 0);$$

dabei ist

$$\bar{A}_{01} = \bar{a} = -a, \quad \bar{A}_{10} = -A_{10}, \quad \bar{A}_{02} = -A_{02}, \quad \bar{A}_{11} = -A_{11} + a,$$
$$\bar{A}_{20} = -A_{20} + 2A_{10}, \ldots$$

Wenn $A_{10} = \ldots = A_{m0} = 0$ ist, ist auch $\bar{A}_{10} = \ldots = \bar{A}_{m0} = 0$.

Durch die in den angeführten Arbeiten benutzte *Laplacesche Transformation*

$$y = \int_0^{\infty} w(t)\, e^{-tx}\, dt$$

leitet man *aus* (D) *die Integralgleichung*

(J) $$(e^t - 1)\, w(t) = G_0(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^t G_\mu(t-\tau)\, w^\mu(\tau)\, d\tau,$$

aus (D̄) *die Integralgleichung*

(J̄) $$(e^{-t} - 1)\, w(t) = \bar{G}_0(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^t \bar{G}_\mu(t-\tau)\, w^\mu(\tau)\, d\tau$$

her; dabei sind

$$G_\mu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda\mu}\frac{t^\lambda}{\lambda!}, \qquad \bar{G}_\mu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \bar{A}_{\lambda\mu}\frac{t^\lambda}{\lambda!} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ganze transzendente Funktionen, und es ist

$$G_0(0) = 0, \qquad \bar{G}_0(0) = 0, \qquad G_1(0) = a, \qquad \bar{G}_1(0) = \bar{a}.$$

Wie in früheren Fällen beweist man den Satz: Wenn die Differenzengleichung (D) oder (D̄) durch die Reihe

$$y = \sum c_{\lambda\mu} C^\mu \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda+\mu a} \quad \text{bzw.} \quad y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_\lambda}{x^\lambda}$$

formal befriedigt wird, wird die Integralgleichung (J) oder (J̄) durch die Reihe

$$w(t) = \sum c_{\lambda\mu} C^\mu \frac{t^{\lambda+\mu a-1}}{\Gamma(\lambda+\mu a)} \quad \text{bzw.} \quad w(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

befriedigt.

Durch Differentiation nach t bringt man die Integralgleichungen (J) und ($\bar{\text{J}}$) auf die Form

$$\text{(L)} \qquad (e^t-1)\frac{dw(t)}{dt} = G_0'(t) + (a-e^t)w(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} w^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^t G_\mu'(t-\tau) w^\mu(\tau)\, d\tau,$$

$$\text{($\bar{\text{L}}$)} \qquad (e^{-t}-1)\frac{dw(t)}{dt} = \bar{G}_0'(t) + (\bar{a}+e^{-t})w(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \bar{A}_{0\mu} w^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^t \bar{G}_\mu'(t-\tau) w^\mu(\tau)\, d\tau.$$

Die Gleichung (L) hat die in der Arbeit „Über nichtlineare Integralgleichungen vom Volterraschen Typus“[6]) behandelte Form (B)

$$t\frac{dw(t)}{dt} = f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) w^n(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t,\tau) w^n(\tau)\, d\tau;$$

dabei ist

$$f_0(t) = \frac{tG_0'(t)}{e^t-1}, \quad f_1(t) = \frac{t(a-e^t)}{e^t-1}, \quad f_n(t) = \frac{A_{0n}t}{e^t-1} \qquad (n=2,3,\ldots).$$

$$g_n(t,\tau) = \frac{tG_n'(t-\tau)}{e^t-1} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Wir verstehen unter $\mathfrak{G}$ ein im Endlichen gelegenes Gebiet der t-Ebene, welches die Stelle $t=0$, aber keine der singulären Stellen $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i, \ldots$ der Funktionen $f_n(t)$, $g_n(t,\tau)$ enthält. Wenn die Reihe $P\left(\frac{1}{x}, y\right)$ für $x=h$, $y=\frac{1}{k}$ konvergiert, ist $|A_{\lambda\mu}| \leqq Qh^\lambda k^\mu$, also $|A_{0n}| \leqq Qk^n$, ferner

$$|G_n'(t-\tau)| \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} |A_{\lambda n}| \frac{|t-\tau|^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \leqq Qk^n \sum_{\lambda-1}^{\infty} \frac{(h|t-\tau|)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = Qk^n e^{h|t-\tau|};$$

es bestehen also, wenn t und τ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehören, Ungleichungen von der Form

$$|f_n(t)| \leqq \mathfrak{A}k^n, \qquad |g_n(t,\tau)| \leqq \mathfrak{B}k^n.$$

Wenn $A_{10} = \ldots = A_{m0} = 0$ ist, ist $G_0'(t)$ durch t^m teilbar, es ist also $f_0(t) = t^m\varphi(t)$, wo $\varphi(t)$ im Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär ist. Die in der angeführten Arbeit gemachten Voraussetzungen sind also bei der Gleichung (L) oder ($\bar{\text{L}}$) erfüllt.

---

[6]) S. Fußnote 2).

Die der Integralgleichung (J) *oder* ($\bar{\text{J}}$) *im Falle* $\Re(a) \leqq 0$ *genügende Reihe*

$$w(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

ist für $|t| < 2\pi$ *konvergent; sie läßt sich in die ganze Ebene mit Ausnahme der singulären Stellen* $\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ *regulär fortsetzen. Im Falle* $\Re(a) > 0$ *ist die unseren Integralgleichungen genügende Reihe*

$$w(t) = \sum c_{\lambda\mu} C^\mu \frac{t^{\lambda+\mu a-1}}{\Gamma(\lambda+\mu a)}$$

für alle endlichen C *und für* $|t| < 2\pi$ *konvergent;* die für $|t| < 2\pi$ konvergente Reihe

$$\Phi_\mu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_{\lambda\mu} t^\lambda}{\Gamma(\lambda+\mu a)},$$

wobei $c_{00} = 0$ ist, stellt eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der singulären Stellen $\pm 2\pi i, \pm 4\pi i \ldots$ reguläre Funktion dar, und die Reihe

$$tw(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (Ct^a)^\mu \Phi_\mu(t)$$

ist abgesehen von den singulären Stellen für alle endlichen Werte von t und Ct^a konvergent. Wenn man

$$W_\mu(t) = t^{\mu a-1} \Phi_\mu(t)^{7}) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzt, *ist*

$$w(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^\mu W_\mu(t)$$

für alle endlichen C *und abgesehen von den singulären Stellen für alle endlichen* t *konvergent.*

Über das Verhalten von $w(t)$ im Unendlichen, welches die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty w(t) e^{-tx} dt$$

bedingt, läßt sich aus der eben benutzten Arbeit kein Schluß ziehen, da dort über das Verhalten der Funktionen $f_n(t)$, $g_n(t, \tau)$ im Unendlichen nichts vorausgesetzt ist. Wir wenden daher an Stelle der Majorantenmethode, welche a. a. O. §§ 3—4 benutzt wurde, um die Konvergenz der

---

[7]) Während $W_0(t)$ der Integralgleichung (J) genügt, gilt für $W_\mu(t)$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ die Integralgleichung (M_μ) in § 3.

Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(t)$ zu beweisen, eine *abgeänderte Majorantenmethode* an, welche der besonderen Form der Gleichung (L) oder ($\bar{\text{L}}$) angepaßt ist und über *das Verhalten von* $w(t)$ *für* $t=\infty$ Aufschluß gibt. Wir *beschränken uns dabei auf reelle positive oder negative* t, so daß, wenn $|t| = \mathfrak{t}$ *gesetzt wird*, entweder $t = \mathfrak{t}$ oder $t = -\mathfrak{t}$ ist.

§ 2.

Fall $\Re(a) > 0$. Verhalten der Lösung $w(t)$ der Integralgleichung für große reelle positive t.

Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha = \Re(a) > 0$ (§§ 2—5).

Indem wir die in der Arbeit, Über nichtlineare Integralgleichungen vom Volterraschen Typus, dargestellte Methode auf die Integralgleichung (L) anwenden, bringen wir diese durch Einführung eines Parameters α auf die Form

$$(e^t-1)\frac{dw(t)}{dt} = G_0'(t) + (a-e^t)w(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \alpha^{\mu-1} A_{0\mu} w^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha^\mu \int_0^t G_\mu'(t-\tau) w^\mu(\tau)\, d\tau;$$

wir setzen

$$w(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu w_\nu(t)$$

und erhalten die Differentialgleichungen

$$(e^t-1)\frac{dw_\nu(t)}{dt} = (a-e^t)w_\nu(t) + q_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

dabei ist

$$q_0(t) = G_0'(t), \qquad q_1(t) = A_{02} w_0^2(t) + \int_0^t G_0'(t-\tau) w_0(\tau)\, d\tau, \ldots;$$

$q_\nu(t)$ ist eine Summe von Gliedern

$$A_{0n} w_{\nu'} \cdots w_{\nu^{(n)}}(t) \qquad (n = 2, 3, \ldots;\ \nu' + \ldots + \nu^{(n)} = \nu - n + 1),$$

$$\int_0^t G_n'(t-\tau) w_{\nu'} \cdots w_{\nu^{(n)}}(\tau)\, d\tau \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ \nu' + \ldots + \nu^{(n)} = \nu - n).$$

Die Integration der linearen Differentialgleichungen für die $w_\nu(t)$ ergibt

$$w_0(t) = e^{-t}(1-e^{-t})^{a-1}\left\{C + \int_0^t (1-e^{-t})^{-a} q_0(t)\, dt\right\},$$

$$w_\nu(t) = e^{-t}(1 - e^{-t})^{a-1} \int_0^t (1 - e^{-t})^{-a} q_\nu(t)\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

venn man berücksichtigt, daß $w_0(t)$ das Glied t^{a-1}, $w_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ein Glied mit t^{a-1} enthält. Hiernach ist $w_\nu(t)$ eine ganze Funktion $\nu + 1)$-ten Grades der von t unabhängigen Größe C:

$$w_\nu(t) = \sum_{\mu=0}^{\nu+1} C^\mu W_{\mu\nu}(t).$$

Wir untersuchen das Verhalten von $w(t)$ *für große reelle positive* t.

Für alle reellen positiven t ist $e^t - 1 \geqq t$. Wir setzen $\mathfrak{A}_{\lambda\mu} = |A_{\lambda\mu}|$ $= 1, 2, \ldots;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots)$ und führen die den Funktionen

$$G'_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ntsprechenden ganzen transzendenten Funktionen

$$\mathfrak{G}'_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

in, so daß

$$|G'_\mu(t)| \leqq \mathfrak{G}'_\mu(t) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

t.

Die Integralgleichung mit dem Parameter α

$$(\mathfrak{L}_\alpha) \qquad t\frac{d\mathfrak{w}(t)}{dt} = \mathfrak{G}'_0(t) + (\alpha - 1)\mathfrak{w}(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \alpha^{\mu-1} \mathfrak{A}_{0\mu} \mathfrak{w}^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha^\mu \int_0^t \mathfrak{G}'_\mu(t-\tau)\, \mathfrak{w}^\mu(\tau)\, d\tau$$

eht durch die Laplacesche Transformation aus der Differentialgleichung

$$(\mathfrak{D}_\alpha) \qquad \xi \frac{d\mathfrak{y}}{d\xi} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_{\lambda 0}}{\xi^\lambda} + \alpha\mathfrak{y} + \sum_{\mu=2}^{\infty} \alpha^{\mu-1} \mathfrak{A}_{0\mu} \mathfrak{y}^\mu + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha^\mu \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{\xi}\right)^\lambda \mathfrak{y}^\mu = 0$$

ervor, welche durch eine für hinreichend große ξ konvergente Reihe

$$\mathfrak{y} = \Sigma \mathfrak{C}_{\lambda\mu} \xi^{-\lambda-\mu\alpha} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda + \mu > 0)$$

efriedigt wird; dabei ist $\mathfrak{C}_{01} = \mathfrak{C}\Gamma(\alpha)$ eine willkürliche Konstante, welche ir positiv annehmen, und $\mathfrak{C}_{\lambda\mu}$ das Produkt aus $\mathfrak{C}^\mu$ und einer ganzen tionalen Funktion $c_{\lambda\mu}$ von α mit positiven Koeffizienten. Die Integral-eichung $(\mathfrak{L}_\alpha)$ wird durch die für alle t konvergente Reihe

$$\mathfrak{w}(t) = \Sigma c_{\lambda\mu} \mathfrak{C}^\mu \frac{t^{\lambda+\mu\alpha-1}}{\Gamma(\lambda + \mu\alpha)} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda + \mu > 0)$$

befriedigt[8]). Diese Reihe läßt sich in eine beständig konvergente Potenzreihe von α

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} \mathfrak{w}_{\nu}(t)$$

verwandeln, wo $\mathfrak{w}_{\nu}(t)$ eine für alle t konvergente Reihe ist. Da $\frac{\mathfrak{C}_{01}}{\Gamma(\alpha)} = \mathfrak{C}$ von α unabhängig ist, so enthält $\mathfrak{w}_{\nu}(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ kein Glied mit $t^{\alpha-1}$. Aus $(\mathfrak{L}_{\alpha})$ folgen die Gleichungen

$$t\frac{d\mathfrak{w}_{\nu}(t)}{dt} = (\alpha - 1)\mathfrak{w}_{\nu}(t) + \mathfrak{q}_{\nu}(t) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

dabei ist

$$\mathfrak{q}_0(t) = \mathfrak{G}_0'(t), \qquad \mathfrak{q}_1(t) = \mathfrak{A}_{02}\,\mathfrak{w}_0^2(t) + \int_0^t \mathfrak{G}_0'(t-\tau)\,\mathfrak{w}_0(\tau)\,d\tau, \ldots;$$

$\mathfrak{q}_{\nu}(t)$ ist eine Summe von Gliedern

$$\mathfrak{A}_{0n}\,\mathfrak{w}_{\nu'}\ldots\mathfrak{w}_{\nu^{(n)}}(t) \qquad (n = 2, 3, \ldots;\ \nu' + \ldots + \nu^{(n)} = \nu - n + 1),$$

$$\int_0^t \mathfrak{G}_n'(t-\tau)\,\mathfrak{w}_{\nu'}\ldots\mathfrak{w}_{\nu^{(n)}}(\tau)\,d\tau \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ \nu' + \ldots + \nu^{(n)} = \nu - n).$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen ergibt

$$\mathfrak{w}_0(t) = \mathfrak{C}t^{\alpha-1} + t^{\alpha-1}\int_0^t t^{-\alpha}\,\mathfrak{q}_{\nu}(t)\,dt,$$

$$\mathfrak{w}_{\nu}(t) = t^{\alpha-1}\int_0^t t^{-\alpha}\,\mathfrak{q}_{\nu}(t)\,dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Daraus folgt, daß $\mathfrak{w}_{\nu}(t)$ eine ganze Funktion $(\nu+1)$-ten Grades von $\mathfrak{C}$ ist:

$$\mathfrak{w}_{\nu}(t) = \sum_{\mu=0}^{\nu+1} \mathfrak{C}^{\mu}\,\mathfrak{W}_{\mu\nu}(t);$$

dabei ist $\mathfrak{W}_{\mu\nu}(t)$ das Produkt aus $t^{\mu\alpha-1}$ und einer beständig konvergenten Potenzreihe von t mit positiven Koeffizienten. Man kann $\mathfrak{w}(t)$ auch als beständig konvergente Potenzreihe von $\mathfrak{C}$ und α

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{\mu}\alpha^{\nu}\,\mathfrak{W}_{\mu\nu}(t) \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sowie in der Form

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{\mu}\,\mathfrak{W}_{\mu}(t),$$

[8]) Vgl. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 23 (1914), S. 309.

$$\mathfrak{W}_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu \mathfrak{W}_{\mu\nu}(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda+\mu\alpha-1}}{\Gamma(\lambda+\mu\alpha)} \qquad (c_{00}=0)$$

schreiben.

Ist die Reihe $\sum c_{\lambda\mu} \xi^{-\lambda} \xi'^{-\mu}$ für $\xi = \varrho$, $\xi' = \sigma$ konvergent, so ist $c_{\lambda\mu} \leqq \mathfrak{K} \varrho^\lambda \sigma^\mu$, wo $\mathfrak{K}$ eine von λ, μ unabhängige positive Größe ist, also

$$\mathfrak{W}_0(t) \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{K} \varrho^\lambda t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = \mathfrak{K} \varrho \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\varrho t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = \mathfrak{K} \varrho e^{\varrho t}$$

und für $\mu = 1, 2, \ldots$

$$\mathfrak{W}_\mu(t) \leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{K} \varrho^\lambda \sigma^\mu t^{\lambda+\mu\alpha-1}}{\Gamma(\lambda+\mu\alpha)} = \frac{\mathfrak{K} \sigma^\mu t^{\mu\alpha-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} + \mathfrak{K} \sigma^\mu t^{\mu\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^\lambda}{\Gamma(\mu\alpha+\lambda+1)}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{K} \sigma^\mu t^{\mu\alpha-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} + \frac{\mathfrak{K} \varrho \sigma^\mu t^{\mu\alpha} e^{\varrho t}}{\Gamma(\mu\alpha+1)},$$

denn wegen

$$\Gamma(\mu\alpha+\lambda+1) = \Gamma(\mu\alpha+1)\cdot(\mu\alpha+1)\ldots(\mu\alpha+\lambda) \geqq \Gamma(\mu\alpha+1)\cdot\lambda!$$

ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^\lambda}{\Gamma(\mu\alpha+\lambda+1)} \leqq \frac{1}{\Gamma(\mu\alpha+1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^\lambda}{\lambda!} = \frac{e^{\varrho t}}{\Gamma(\mu\alpha+1)}.$$

Demnach ist (im Falle $\mu\alpha < 1$ für $t > t_0 > 0$)

$$\mathfrak{W}_\mu(t) \leqq K_\mu e^{(\varrho+\varepsilon)t},$$

wo ε eine beliebig kleine und K_μ eine hinreichend große positive Zahl ist.

Um das Verhalten von $w(t)$ für große t zu ermitteln, machen wir von den Eigenschaften der Mittag-Lefflerschen ganzen transzendenten Funktion

$$E_\alpha(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\Gamma(\mu\alpha+1)}$$

Gebrauch[9]). Unter Beschränkung auf reelle positive z ist im Falle $0 < \alpha < 2$ [10])

$$\lim_{z=\infty} \left[E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} \right] = 0$$

und im Falle $\alpha \geqq 2$ [11])

$$\lim_{z=\infty} \left[E_\alpha(z) - \sum_{\nu} \frac{1}{\alpha} e^{z^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{2\nu\pi i}{\alpha}}} \right] = 0,$$

---

[9]) Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, cinquième note, Acta math. 29 (1905), S. 101.

[10]) loc. cit. [9]) S. 130 und 131.

[11]) loc. cit. [9]) S. 142.

wo $\frac{\alpha}{4} < \mathfrak{m} < \frac{3\alpha}{4}$ ist und ν die Zahlen $-\mathfrak{m}, -\mathfrak{m}+1, \ldots \mathfrak{m}-1$ durchläuft. Demnach ist für $\alpha > 0$

$$\lim_{z=\infty} e^{-z^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathbb{C}^\mu \mathfrak{W}_\mu(t) \leqq \Re \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mathbb{C}^\mu \sigma^\mu t^{\mu\alpha-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} + \Re \varrho e^{\varrho t} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\mathbb{C}^\mu \sigma^\mu t^{\mu\alpha}}{\Gamma(\mu\alpha+1)}$$
$$\leqq \alpha \Re E_\alpha'(\mathbb{C}\sigma t^\alpha) + \Re \varrho e^{\varrho t} E_\alpha(\mathbb{C}\sigma t^\alpha),$$

denn die Ableitung von $E_\alpha(z)$ ist

$$E_\alpha'(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu\alpha)}.$$

Die ganze positive Zahl m sei so gewählt, daß $m\alpha \geqq 1$ ist. Wir schreiben

$$\alpha E_\alpha'(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} = \sum_{\mu=1}^{2m-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} + z^{m-1} \sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{z^\mu}{\Gamma(\mu\alpha+m\alpha)}.$$

Die Funktion $\Gamma(x)$ der reellen positiven Veränderlichen x nimmt zu, wenn $x \geqq 2$ ist. Wenn $\mu \geqq m$ und daher $\mu\alpha \geqq 1$ ist, ist $\Gamma(\mu\alpha+m\alpha) \geqq \Gamma(\mu\alpha+1)$, folglich für reelle positive z

$$\sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{z^\mu}{\Gamma(\mu\alpha+m\alpha)} \leqq \sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{z^\mu}{\Gamma(\mu\alpha+1)} \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\Gamma(\mu\alpha+1)} = E_\alpha(z).$$

Daher ist

$$\alpha E_\alpha'(z) \leqq \sum_{\mu=1}^{2m-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} + z^{m-1} E_\alpha(z).$$

Unter Benutzung dieser Ungleichung hat man

$$\mathfrak{w}(t) \leqq \Re \sum_{\mu=1}^{2m-1} \frac{(\mathbb{C}\sigma t^\alpha)^{\mu-1}}{\mu\alpha} + \Re (\mathbb{C}\sigma t^\alpha)^{m-1} E_\alpha(\mathbb{C}\sigma t^\alpha) + \Re \varrho e^{\varrho t} E_\alpha(\mathbb{C}\sigma t^\alpha),$$

$$e^{-[\varrho + (\mathbb{C}\sigma)^{\frac{1}{\alpha}}]t} \mathfrak{w}(t) \leqq \Re e^{-[\varrho + (\mathbb{C}\sigma)^{\frac{1}{\alpha}}]t} \sum_{\mu=1}^{2m-1} \frac{(\mathbb{C}\sigma t^\alpha)^{\mu-1}}{\mu\alpha}$$

$$+ \Re e^{-\varrho t} (\mathbb{C}\sigma t^\alpha)^{m-1} e^{-(\mathbb{C}\sigma)^{\frac{1}{\alpha}} t} E_\alpha(\mathbb{C}\sigma t^\alpha) + \Re \varrho e^{-(\mathbb{C}\sigma)^{\frac{1}{\alpha}} t} E_\alpha(\mathbb{C}\sigma t^\alpha),$$

also unter Berücksichtigung der angegebenen Eigenschaften der Funktion $E_\alpha(z)$

$$\lim_{t=\infty} e^{-[\varrho + (\mathbb{C}\sigma)^{\frac{1}{\alpha}}]t} \mathfrak{w}(t) = \frac{\Re \varrho}{\alpha}.$$

Demnach ist für $t \geqq t_0 > 0$, wenn die positive Größe K hinreichend groß gewählt wird,

$$\mathfrak{w}(t) \leqq K e^{[\varrho + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{\alpha}}]t}.$$

Um $w(t)$ mit $\mathfrak{w}(t)$ zu vergleichen, schreiben wir

$$w_0(t) = \frac{C}{e^t - 1}(1 - e^{-t})^\alpha + \frac{1}{e^t - 1}\int_0^t \left(\frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-\tau}}\right)^\alpha q_0(\tau)\, d\tau,$$

$$w_\nu(t) = \frac{1}{e^t - 1}\int_0^t \left(\frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-\tau}}\right)^\alpha q_\nu(\tau)\, d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

$$\mathfrak{w}_0(t) = \frac{\mathfrak{C}}{t} t^\alpha + \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \mathfrak{q}_0(\tau)\, d\tau.$$

$$\mathfrak{w}_\nu(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \mathfrak{q}_\nu(\tau)\, d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Für $t > 0$ ist $e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \ldots > t$, also

$$\frac{1}{e^t - 1} < \frac{1}{t}.$$

Die Funktion

$$\frac{1 - e^{-t}}{t}$$

der reellen positiven Veränderlichen t nimmt mit wachsendem t ab, denn ihr Differentialquotient

$$\frac{(t+1)e^{-t} - 1}{t^2}$$

ist für $t > 0$ negativ, da

$$(t+1)e^{-t} = \frac{1 + t}{1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots} < 1$$

ist. Demnach ist für $0 < \tau < t$

$$\frac{1 - e^{-t}}{t} < \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}, \quad \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-\tau}} < \frac{t}{\tau},$$

$$\left|\left(\frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-\tau}}\right)^\alpha\right| = \left(\frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-\tau}}\right)^\alpha < \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha.$$

Wenn $|C| \leqq \mathfrak{C}$ ist, hat man wegen $|q_0(\tau)| \leqq \mathfrak{q}_0(\tau)$

$$|w_0(t)| \leqq \mathfrak{w}_0(t).$$

Dann ist aber auch $|q_1(\tau)| \leqq \mathfrak{q}_1(\tau)$ und somit

$$|w_1(t)| \leqq \mathfrak{w}_1(t).$$

So fortfahrend, findet man

$$|w_\nu(t)| \leqq \mathfrak{w}_\nu(t) \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots).$$

Weiter ist

$$|W_{\mu\nu}(t)| \leqq \mathfrak{W}_{\mu\nu}(t).$$

Es ist nämlich

$$W_{00}(t) = \frac{1}{e^t - 1}\int_0^t \left(\frac{1-e^{-t}}{1-e^{-\tau}}\right)^\alpha q_0(\tau)\,d\tau, \quad W_{10}(t) = \frac{1}{e^t-1}(1-e^{-t})^\alpha,$$

$$\mathfrak{W}_{00}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha q_0(\tau)\,d\tau, \quad \mathfrak{W}_{10}(t) = \frac{1}{t}t^\alpha,$$

also

$$|W_{00}(t)| \leqq \mathfrak{W}_{00}(t), \quad |W_{10}(t)| \leqq \mathfrak{W}_{10}(t).$$

Wir nehmen an, es sei $|W_{\mu'\nu'}(t)| \leqq \mathfrak{W}_{\mu'\nu'}(t)$ $(\nu' < \nu,\ \mu' \leqq \nu' + 1)$. Setzt man $w_{\nu'}(t) = \sum_{\mu'=0}^{\nu'+1} C^{\mu'} W_{\mu'\nu'}(t)$ usw., so erscheint $w_{\nu'} \ldots w_{\nu^{(n)}}(t)$ als Summe von Gliedern $C^{\mu} W_{\mu'\nu'} \ldots W_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(t)$, wo $\mu' + \ldots + \mu^{(n)} = \mu$ ist. Demnach ist $q_\nu(\tau)$ eine Summe von Gliedern

$$C^\mu \cdot A_{0n} W_{\mu'\nu'} \ldots W_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\tau); \quad C^\mu \cdot G'_n W_{\mu'\nu'} \ldots W_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\tau).$$

$W_{\mu\nu}(t)$ ist eine Summe von Gliedern

$$\frac{1}{e^t-1}\int_0^t \left(\frac{1-e^{-t}}{1-e^{-\tau}}\right)^\alpha \cdot A_{0n} W_{\mu'\nu'} \ldots W_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{1}{e^t-1}\int_0^t \left(\frac{1-e^{-t}}{1-e^{-\tau}}\right)^\alpha \cdot G'_n W_{\mu'\nu'} \ldots W_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\tau)\,d\tau$$

und $\mathfrak{W}_{\mu\nu}(t)$ eine Summe von Gliedern

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \cdot \mathfrak{A}_{0n} \mathfrak{W}_{\mu'\nu'} \ldots \mathfrak{W}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \cdot \mathfrak{G}'_n \mathfrak{W}_{\mu'\nu'} \mathfrak{W}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\tau)\,d\tau,$$

wo die Zahlen $\nu', \ldots \nu^{(n)}$ kleiner als ν sind. Daraus folgt die Behauptung.

Aus den Gleichungen

$$W_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu W_{\mu\nu}(t), \quad \mathfrak{W}_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu \mathfrak{W}_{\mu\nu}(t) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

olgt, daß für reelle positive α, z. B. für $\alpha = 1$

$$|W_\mu(t)| \leqq \mathfrak{W}_\mu(t) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

t.

Es ist also (im Falle $\mu a < 1$ für $t \geqq t_0 > 0$)

$$|W_\mu(t)| \leqq K_\mu e^{(\varrho+\varepsilon)t},$$

o ε eine beliebig kleine und K_μ eine hinreichend große positive Zahl edeutet, und

$$|w(t)| \leqq K e^{\left[\varrho + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}\right]t},$$

o K eine hinreichend große positive Größe und $\mathfrak{C}$ eine positive Konante ist, welche die Bedingung $|C| \leqq \mathfrak{C}$ erfüllt.

§ 3.

Lösung der Differenzengleichung durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen.

Das Laplacesche Integral

$$Y_\mu = \int_0^\infty W_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

t hiernach für $\Re(x) > \varrho$, das Laplacesche Integral

$$y = \int_0^\infty w(t)\, e^{-tx}\, dt$$

r $\Re(x) > \varrho + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$ konvergent. Für $\xi = \Re(x) > \varrho + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$ ist

$$y = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^\mu Y_\mu$$

er

$$\int_0^\infty \sum_{\mu=0}^{\infty} C^\mu W_\mu(t) \cdot e^{-tx}\, dt = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^\mu \int_0^\infty W_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt,$$

il

$$\int_0^\infty w(t)\, e^{-t\xi}\, dt = \int_0^\infty \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{C}^\mu \mathfrak{W}_\mu(t) \cdot e^{-t\xi}\, dt$$

d damit

$$\int_0^\infty \sum_{\mu=0}^{\infty} |C^\mu W_\mu(t)\, e^{-tx}|\, dt$$

nvergent ist.

Daß

$$y = \int_0^\infty w(t)\, e^{-tx}\, dt$$

der Differenzengleichung (D) *genügt*, zeigt man wie im Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 25 (1916), S. 312—314. Die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} = \int_0^\infty G_0(t)\, e^{-tx}\, dt\,;$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} y^{\mu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^\infty G_\mu w^\mu(t)\, e^{-tx}\, dt = \int_0^\infty \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu w^\mu(t)\, e^{-tx}\, dt$$

gelten, wenn $\varrho_0 = \varrho + Kk$ gesetzt wird, für $\Re(x) > \varrho_0 + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$. Demnach ist für $\Re(x) > \varrho_0 + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$

$$\Delta_{-1} y - P\left(\frac{1}{x}, y\right) = \int_0^\infty \left[(e^t - 1)\, w(t) - G_0(t) - \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu w^\mu(t)\right] e^{-tx}\, dt = 0,$$

da $w(t)$ der Integralgleichung (J) genügt. Das Laplacesche Integral y, welches für $\Re(x) > \varrho + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$ eine reguläre Funktion darstellt, genügt der Differenzengleichung (D) in dem kleineren Gebiet $\Re(x) > \varrho_0 + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$, also auch in dem ganzen Gebiet $\Re(x) > \varrho + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$.

Aus dem Laplaceschen Integral

$$Y_\mu = \int_0^\infty W_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der für $0 < |t| < 2\pi$ geltenden Reihenentwicklung

$$W_\mu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda+\mu a-1}}{\Gamma(\lambda+\mu a)} \qquad (c_{00} = 0)$$

die in der Nähe von $x = \infty$ für $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ gültige asymptotische Gleichung

$$Y_\mu \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu}\, x^{-\lambda-\mu a}.$$

Durch die Substitution[12])

$$z = e^{-\gamma t}, \quad t = -\frac{1}{\gamma} \log z,$$

[12]) Vgl. Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen Math. Annalen 71 (1912), S. 510—532.

wo γ reell positiv sein möge, wird die Kreisfläche $|z-1|<1$ der -Ebene in ein Gebiet G der t-Ebene übergeführt, dessen Begrenzungslinie lie reelle Achse im Punkt $-\frac{\ln 2}{\gamma}$, die imaginäre Achse in den Punkten $\frac{\pi}{3\gamma}$ und $-i\frac{\pi}{3\gamma}$ schneidet[13]). Wenn $\gamma>\frac{1}{6}$ angenommen wird, fallen die ingulären Stellen $2\pi i$ und $-2\pi i$ der Funktion $W_\mu(t)$ nicht das Gebiet , so daß die Funktionen

$$V_\mu(z)=W_\mu\left(-\frac{1}{\gamma}\log z\right)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}L_{\lambda\mu}(1-z)^{\lambda+\mu a-1}$$

n Innern des Kreises $|1-z|=1$ regulär sind. Für $\Re(x)>\varrho$ ist

$$Y_\mu=\frac{1}{\gamma}\int_0^1 V_\mu(z)\,z^{\frac{x}{\gamma}-1}\,dz$$

der

$$Y_\mu=\frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{L_{\lambda\mu}\,\Gamma(\lambda+\mu a)\,\Gamma\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\gamma}+\lambda+\mu a\right)}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\gamma}\right)\Gamma(\mu a)}{\Gamma\left(\frac{x}{\gamma}+\mu a\right)}\left\{L_{0\mu}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\mu a(\mu a+1)\ldots(\mu a+\lambda-1)\,L_{\lambda\mu}}{\left(\frac{x}{\gamma}+\mu a\right)\left(\frac{x}{\gamma}+\mu a+1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}+\mu a+\lambda-1\right)}\right\}$$

$$(\mu=1,2\ldots),$$

$$Y_0=\frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{L_{\lambda 0}\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\gamma}+\lambda\right)}=\frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(\lambda-1)!\,L_{\lambda 0}}{\frac{x}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}+\lambda-1\right)}.$$

Um das Auftreten von Gammafunktionen neben den Fakultätenreihen vermeiden, *setzen wir*

$$Y_\mu=x^{-\mu a}\varphi_\mu$$

d stellen φ_μ zunächst als Laplacesches Integral und sodann als kultätenreihe dar. Wir gehen von der Differenzengleichung für φ_μ aus, sich aus derjenigen für Y_μ ergibt.

In der Differenzengleichung (D) setzen wir

$$y=Y_0+Y,\quad Y_0=\int_0^\infty W_0(t)\,e^{-tx}\,dt.$$

[13]) loc. cit.[12]) S. 515.

Wir erhalten die Gleichung

$$x\,\Delta_{-1}Y = \sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu Y^\mu,$$

wobei gesetzt ist:

$$g_\mu = \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu P\left(\frac{1}{x}, Y_0\right)}{\partial Y_0^\mu}.$$

Hieraus ergeben sich, wenn

$$Y = \sum_{\mu=1}^{\infty}{}' C^\mu Y_\mu$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\begin{aligned} x\,\Delta_{-1}Y_1 &= g_1 Y_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x\,\Delta_{-1}Y_\mu &= g_1 Y_\mu + E_\mu(Y_1, \ldots Y_{\mu-1}); \end{aligned}$$

dabei ist E_μ eine Summe von Produkten $g_l Y_{\nu_1}\ldots Y_{\nu_l}$, wo l eine der Zahlen $2, \ldots \mu$ ist, $\nu_1, \ldots \nu_l$ Zahlen aus der Reihe $1, \ldots \mu-1$ mit der Summe $\nu_1 + \ldots + \nu_l = \mu$. Daraus folgen die Differenzengleichungen

$$(F_1) \qquad \Delta_{-1}\varphi_1 = \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^a - 1 + \left(1-\frac{1}{x}\right)^a \frac{g_1}{x}\right]\varphi_1.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(F_\mu) \qquad \Delta_{-1}\varphi_\mu = \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\mu a} - 1 + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\mu a}\frac{g_1}{x}\right]$$

$$+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\mu a}\sum \frac{g_l}{x}\varphi_{\nu_1}\ldots\varphi_{\nu_l}\ ^{14})$$

$$(l = 2, \ldots \mu; \quad \nu_1 + \ldots + \nu_l = \mu).$$

Für $\Re(x) > 1$ ist

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^a - 1 = \int_0^\infty F(t)\,e^{-tx}\,dt,$$

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{\nu!}\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!};$$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\mu a} - 1 = \int_0^\infty F_\mu(t)\,e^{-tx}\,dt,$$

$$F_\mu(t) = \sum_{\nu=1}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}F^\nu(t).$$

---

[14]) Das Folgende ist im Anschluß an § 3 und § 5 der Arbeit, Über eine nicht lineare Differenzengleichung, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 26 (1917), S. 230—24 genauer durchzuführen.

ir schreiben $u(t)$ für $W_0(t)$, so daß für $|t| < 2\pi$

$$u(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda 0} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

Für $\Re(x) > \varrho_0$ ist

$$\frac{g_\mu}{x} = \int_0^\infty Q_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

$$Q_\mu(t) = G_\mu(t) + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \binom{\nu}{\mu} G_\nu\, u^{\nu-\mu}(t).$$

der Halbebene $\Re(x) > \varrho_0$ ist, da $\varrho_0 > 1$ angenommen werden kann,

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^a - 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^a \frac{g_1}{x} = \int_0^\infty R_1(t)\, e^{-tx}\, dt,$$

$$R_1(t) = F(t) + Q_1(t) + FQ_1(t), \qquad R_1(0) = 0.$$

e Differenzengleichung (F_1) wird durch das für $\Re(x) > \varrho_0$ konvergente tegral

$$\varphi_1 = 1 + \int_0^\infty u_1(t)\, e^{-tx}\, dt\ ^{15})$$

friedigt; $u_1(t)$ genügt der Integralgleichung

$$(e^t - 1)\, u_1(t) = \int_0^t R_1(t-\tau)\, u_1(\tau)\, d\tau + R_1(t). \qquad (F_1)$$

ßt sich in die für $|t| < 2\pi$ konvergente Reihe

$$u_1(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda 1} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

twickeln und ist im Endlichen, abgesehen von $t = \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ gulär; für reelle positive t ist

$$|u_1(t)| < K_1\, e^{\varrho_1 t}, \qquad \varrho_1 > \varrho_0.$$

Die Integralgleichung

$$(e^t - 1)\, u_\mu(t) = \int_0^t R_\mu(t-\tau)\, u_\mu(\tau)\, d\tau + S_\mu(t); \qquad (F_\mu)$$

$$R_\mu(t) = F_\mu(t) + Q_1(t) + F_\mu Q_1(t),$$

$$S_\mu(t) = R_\mu(t) + \sum c_{0\nu_2} \ldots c_{0\nu_l} R_{l\mu}(t) + \ldots + \sum R_{l\mu} u_{\nu_1} \ldots u_{\nu_l}(t),$$

$$R_{l\mu}(t) = Q_l(t) + F_\mu Q_l(t)$$

15) Es ist $c_{01} = 1$ angenommen.

hat eine Lösung $u_\mu(t)$, welche für $|t| < 2\pi$ die konvergente Reihenentwicklung

$$u_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

zuläßt und abgesehen von $t = \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ im Endlichen regulär ist; für reelle positive t ist

$$|u_\mu(t)| < K_\mu e^{\varrho_\mu t}, \qquad \varrho_\mu > \varrho_0.$$

Die Differenzengleichung (F_μ) wird durch *das für* $R(x) > \varrho_0$ *konvergente Integral*

$$\varphi_\mu = c_{0\mu} + \int_0^\infty u_\mu(t) e^{-tx} dt$$

befriedigt.

In der Nähe von $x = \infty$ gilt für $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ die asymptotische Gleichung

$$\varphi_\mu \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_{\lambda\mu}}{x^\lambda}.$$

Durch das bekannte Verfahren erhält man eine *Fakultätenreihe*. Wenn $\gamma > \frac{1}{\varrho}$ ist, ist

$$v_\mu(z) = u_\mu\left(-\frac{1}{\gamma}\log z\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{\lambda\mu}(1-z)^\mu$$

innerhalb des Kreises $|1-z| = 1$ regulär. Dabei ist $l_{00} = 0$. Für $\Re(x) > \varrho_0$ ist

$$\varphi_\mu - c_{0\mu} = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 v_\mu(z) z^{\frac{x}{\gamma}-1} dz = \frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, l_{\lambda\mu}}{\frac{x}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}+\lambda-1\right)}.$$

Aus der Gleichung $Y_\mu = x^{-\mu a}\varphi_\mu$ ergibt sich zwischen $W_\mu(t)$ und $u_\mu(t)$ die Gleichung

$$W_\mu(t) = \frac{c_{0\mu}\, t^{\mu a-1}}{\Gamma(\mu a)} + \frac{1}{\Gamma(\mu a)}\int_0^t (t-\tau)^{\mu a-1} u_\mu(\tau) d\tau,$$

welche auch durch Einsetzung der für $|t| < 2\pi$ gültigen Reihen für $W_\mu(t)$ und $u_\mu(t)$ bestätigt wird. Um $u_\mu(t)$ durch $W_\mu(t)$ auszudrücken, wählen wir die ganze positive Zahl m so, daß $m < \mu a < m+1$ ist. Die m-malige Differentiation der Gleichung

$$\int_0^t (t-\tau)^{\mu a-1} u_\mu(\tau) d\tau = \Gamma(\mu a) W_\mu(t) - c_{0\mu} t^{\mu a-1}$$

rgibt

$$\int_0^t \frac{u_\mu(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{m+1-\mu a}} = \Gamma(\mu a - m)\frac{d^m W_\mu(t)}{dt^m} - c_{0\mu}\, t^{\mu a - m - 1},$$

vo $0 < m + 1 - \mu a < 1$ ist und die rechte Seite für $t = 0$ verschwindet. Die Auflösung dieser Abelschen Integralgleichung ergibt[16])

$$u_\mu(t) = \frac{(-1)^m \sin \mu a \pi}{\pi} \int_0^t (t-\tau)^{m-\mu a}\, \Omega\, d\tau,$$

$$\Omega = \Gamma(\mu a - m)\frac{d^{m+1} W_\mu(\tau)}{d\tau^{m+1}} + (m + 1 - \mu a)\, c_{0\mu}\, \tau^{\mu a - m - 2}.$$

Wenn $\mu a = m$ eine ganze positive Zahl ist, erhält man durch m-malige Differentiation

$$u_\mu(t) = \frac{d^m W_\mu(t)}{dt^m}.$$

Aus den Differenzengleichungen für $Y_1, \ldots Y_\mu$ gehen durch Anwendung der Laplaceschen Transformation *Integralgleichungen für* $W_1(t)$, $\ldots W_\mu(t)$ hervor:

(M_1) $$(e^t - 1)\, W_1(t) = \int_0^t Q_1(t-\tau)\, W_1(\tau)\, d\tau,$$

. . . . . .

(M_μ) $$(e^t - 1)\, W_\mu(t) = \int_0^t Q_1(t-\tau)\, W_\mu(\tau)\, d\tau + \sum Q_l\, W_{\nu_1} \ldots W_{\nu_l}(t)$$

$$(l = 2, \ldots \mu;\ \nu_1 + \ldots + \nu_l = \mu).$$

Diese ergeben sich auch folgendermaßen: Wenn man

$$w(t) = W_0(t) + W(t), \qquad w^\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} W_0^{\mu-\nu}\, W^\nu(t)$$

etzt, geht die Integralgleichung (J) in

$$(e^t - 1)\, W(t) = Q_0(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^t Q_\mu(t-\tau)\, W^\mu(\tau)\, d\tau$$

ber. Hieraus folgen, wenn man

$$W(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} C^\mu\, W_\mu(t)$$

etzt, die soeben angeschriebenen Integralgleichungen.

[16]) Vgl. z. B. T. Lalesco, Équations intégrales, Paris 1912, S. 110.

§ 4.

Andere Form des Konvergenzbeweises. Hinweis auf eine andere Differenzengleichung.

Der *Beweis der Konvergenz der Reihe*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C^n Y_n$$

kann auch ähnlich geführt werden wie in § 3 und § 4 der Arbeit, Über eine nichtlineare Differenzengleichung, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 26 (1917), S. 230—251, wo eine andere Differenzengleichung behandelt ist.

Man beweist zunächst das Vorhandensein einer Lösung

$$Y_0 = \int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{e}} W_0(t)\, e^{-tx}\, dt$$

der Differenzengleichung (D), wo $W_0(t)$ diejenige partikuläre Lösung der Integralgleichung (J) darstellt, welche sich für $|t| < 2\pi$ in die Reihe

$$W_0(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda 0}\, \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

entwickeln läßt[17]). Hierauf wird $Y_1 = x^{-a}\varphi_1$ wie in § 3 untersucht.

Wenn man

$$Y_n = Y_1 Z_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

setzt, so daß $Z_1 = 1$ ist, geht die Differenzengleichung $(\mathbf{F}_n)$ über in

$$\Delta_{-1} Z_n = H_n(Z_1, \ldots Z_{n-1}) \cdot \frac{Y_1}{x + g_1};$$

dabei ist H_n eine Summe von Produkten

$$g_l\, Y_1^{l-2}\, Z_{\nu_1} \ldots Z_{\nu_l} \qquad (l = 2, \ldots n; \quad \nu_1 + \ldots + \nu_l = n).$$

Die Differenzengleichung für Z_n hat die Lösung

$$Z_n = \sum_{x+1}^{\infty} H_n(Z_1, \ldots Z_{n-1}) \cdot \frac{Y_1}{x + g_1}.$$

Die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{D}) \qquad \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}\right) = \sum_{\lambda+\mu>0} \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{x}}\right)^{\lambda} \mathfrak{y}^{\mu}; \qquad \mathfrak{A}_{01} = \mathfrak{a}$$

---

[17]) Hierbei vereinfacht sich ein Teil der Betrachtungen von § 2, indem C und $\mathfrak{C}$ durch 0 ersetzt werden.

ird durch die für $\frac{1}{\xi} \leqq \frac{1}{\varrho}$, $\mathfrak{C}\xi^{-a} \leqq \frac{1}{\sigma}$ konvergente Reihe

$$\mathfrak{y} = \sum_{\lambda+\mu>0} c_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\lambda} (\mathfrak{C}\xi^{-a})^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{\mu}\, \mathfrak{Y}_{\mu},$$

$$\mathfrak{Y}_{\mu} = \xi^{-\mu a} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu}\, \xi^{-\lambda} \qquad (c_{00} = 0,\ c_{01} = 1)$$

efriedigt. Wenn man

$$\mathfrak{g}_{\mu} = \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{\mu} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\xi}, \mathfrak{Y}_0\right)}{\partial \mathfrak{Y}_0{}^{\mu}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

etzt, gelten die Differentialgleichungen

$$\xi \frac{d\mathfrak{Y}_1}{d\xi} + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{Y}_1 = 0,$$

. . . . . .

$$\xi \frac{d\mathfrak{Y}_n}{d\xi} + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{Y}_n + \mathfrak{E}_n(\mathfrak{Y}_1, \ldots \mathfrak{Y}_{n-1}) = 0,$$

vo $\mathfrak{E}_n$ aus E_n dadurch hervorgeht, daß man g_l durch $\mathfrak{g}_l$, Y_ν durch $\mathfrak{Y}_\nu$ rsetzt. Wir setzen

$$\mathfrak{Y}_1 = \xi^{-a} e^{\int_{\xi}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}_1 - a}{\xi} d\xi} \qquad \mathfrak{Y}_n = \mathfrak{Y}_1\, \mathfrak{Z}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

lann ist $\mathfrak{Z}_1 = 1$ und

$$\xi \frac{d\mathfrak{Z}_n}{d\xi} + \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1}) \cdot \mathfrak{Y}_1 = 0,$$

vo $\mathfrak{H}_n$ aus H_n hervorgeht, indem man g_l, Y_1, Z_ν bez. durch $\mathfrak{g}_l$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_\nu$ rsetzt. Wir benutzen die Lösung

$$\mathfrak{Z}_n = \int_{\xi}^{\infty} \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1}) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Die Potenzreihe

$$\mathfrak{Y}_0 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_{\lambda 0}}{\xi^{\lambda}}$$

ler positiven Veränderlichen ξ mit positiven Koeffizienten nimmt mit achsendem ξ ab. Da die μ-te Ableitung von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\xi}, \mathfrak{Y}_0\right)$ eine Potenzeihe von $\frac{1}{\xi}$ und $\mathfrak{Y}_0$ mit positiven Koeffizienten ist, so kann auch $\mathfrak{g}_\mu$ als otenzreihe von $\frac{1}{\xi}$ mit positiven Koeffizienten dargestellt werden; $\mathfrak{g}_\mu$

nimmt also mit wachsendem ξ ab. Dasselbe gilt für $\mathfrak{g}_1 - a$ sowie für $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Z}_n$, da das zwischen den Grenzen ξ und ∞ genommene Integral einer positiven Funktion mit wachsendem ξ abnimmt.

Wenn $\xi = \Re(x) \geqq \xi_0$ und $\xi_0 > 0$ hinreichend groß ist, ist

$$|x + g_1| \geqq |x| - |g_1| \geqq \xi - \mathfrak{A} \geqq \xi\left(1 - \frac{\mathfrak{A}}{\xi_0}\right) \geqq \frac{\xi}{N},$$

wo $\mathfrak{A}$ und N positive Zahlen sind, also

$$\frac{1}{|x + g_1|} \leqq \frac{N}{\xi}.$$

Ferner ist in der Halbebene $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2}$

$$|x^{-a}|\xi^a = e^{\arg x \cdot \Re\left(\frac{a}{i}\right)} \leqq k,$$

$$\frac{|Y_1|}{\mathfrak{Y}_1} = |x^{-a}| \cdot \xi^a \cdot |\varphi_1| \cdot e^{-\int_{\xi}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}_1 - a}{\xi} d\xi} \leqq k\mathfrak{M} = M,$$

wenn ξ_0 hinreichend groß und $|\varphi_1| \leqq \mathfrak{M}$ ist, also

$$|Y_1| \leqq M\mathfrak{Y}_1.$$

Wir zeigen, daß für $\xi \geqq \xi_0$

$$|Z_n| \leqq (MN)^{n-1}\mathfrak{Z}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist. Zunächst ist $Z_1 = \mathfrak{Z}_1$. Wenn

$$|Z_\nu| \leqq (MN)^{\nu-1}\mathfrak{Z}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1)$$

ist, hat man für $l = 2, \ldots n$; $\nu_1 + \ldots + \nu_l = n$

$$g_l Y_1^{l-2} Z_{\nu_1} \ldots Z_{\nu_l}| \leqq \mathfrak{g}_l M^{l-2} \mathfrak{Y}_1^{l-1} \cdot (MN)^{\nu_1 - 1}\mathfrak{Z}_{\nu_1} \ldots (MN)^{\nu_l - 1}\mathfrak{Z}_{\nu_l}$$
$$= \mathfrak{g}_l M^{n-2} N^{n-l} \mathfrak{Y}_1^{l-1} \mathfrak{Z}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{Z}_{\nu_l} \leqq \mathfrak{g}_l M^{n-2} N^{n-2} \mathfrak{Y}_1^{l-1} \mathfrak{Z}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{Z}_{\nu_l}.$$

also

$$|H_n(Z_1, \ldots Z_{n-1})| \leqq M^{n-2} N^{n-2} \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1}),$$

$$\left|H_n(Z_1, \ldots Z_{n-1}) \cdot \frac{Y_1}{x + g_1}\right| \leqq (MN)^{n-1} \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1}) \cdot \frac{\mathfrak{Y}_1}{\xi},$$

auch wenn man x durch $x+1$, $x+2, \ldots$ ersetzt. Es ist also

$$|Z_n| = \left|\sum_{x+1}^{\infty} H_n(Z_1, \ldots Z_{n-1}) \cdot \frac{Y_1}{x + g_1}\right| \leqq (MN)^{n-1} \sum_{\xi+1}^{\infty} \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1}) \cdot \frac{\mathfrak{Y}_1}{\xi}.$$

Wenn die positive Funktion $f(\xi)$ der positiven Veränderlichen ξ mit wachsendem ξ nicht zunimmt und wenn $\int_{\xi}^{\infty} f(\xi)\,d\xi$ konvergent ist, ist

$$\sum_{\xi+1}^{\infty} f(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} f(\xi+m) \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\xi+m-1}^{\xi+m} f(\xi)\,d\xi = \int_{\xi}^{\infty} f(\xi)\,d\xi,$$

so

$$|Z_n| \leqq (MN)^{n-1} \int_{\xi}^{\infty} \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_{n-1}) \frac{\mathfrak{Y}_1}{\xi}\,d\xi = (MN)^{n-1}\,\mathfrak{Z}_n.$$

Demnach ist

$$|C^n Y_n| = |C^n Y_1 Z_n| \leqq |C|^n \cdot M\mathfrak{Y}_1 \cdot (MN)^{n-1}\,\mathfrak{Z}_n$$

$$= \frac{1}{N}(MN|C|)^n \mathfrak{Y}_n = \frac{1}{N}\left(\frac{MN|C|}{\xi^a}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_{\lambda n}}{\xi^{\lambda}}.$$

Die Reihe $y = \sum_{n=0}^{\infty} C^n Y_n$ ist also absolut konvergent, wenn

$$\frac{1}{\xi} \leqq \frac{1}{\varrho}, \qquad \frac{MN|C|}{\xi^a} \leqq \frac{1}{\sigma}$$

ist, d. h. bei beliebigem C für $\xi \geqq \varrho$, $\xi \geqq (MN|C|\sigma)^{\frac{1}{a}}$.

Während hier die Differentialgleichung $(\mathfrak{D})$ als Majorante gedient hat, ist in der oben angeführten Arbeit im Jahresber. d. Math.-Ver. 26 bei der Untersuchung einer anderen linearen Differenzengleichung *als Majorante eine Differenzengleichung* benutzt und von der Theorie der Iteration Gebrauch gemacht worden. Man hätte aber auch dort eine *Differentialgleichung als Majorante* benutzen und ähnlich wie hier verfahren können.

Wenn $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, ... dieselbe Bedeutung haben wie a. a. O. § 4, führen wir die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\xi} + \mathfrak{z}\log\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_2\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{g}_3\mathfrak{z}^3 + \ldots = 0$$

an. Diese wird durch eine Reihe

$$\mathfrak{z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mathfrak{C}\mathfrak{g}^{-\xi})^n$$

befriedigt, welche konvergiert, wenn $\mathfrak{C}\mathfrak{g}^{-\xi}$ hinreichend klein ist; dabei ist c_1 positiv, $c_1 = 1$ und $\mathfrak{C}$ eine willkürliche positive Konstante. Setzt man

$$\mathfrak{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}^n \mathfrak{z}_n,$$

so ist

$$\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\xi} + \mathfrak{z}_1 \log\mathfrak{g} = 0,$$

so daß $\mathfrak{z}_{01} = \mathfrak{g}^{-\xi}$ gesetzt werden kann, und

$$\frac{d\mathfrak{z}_n}{d\xi} + \mathfrak{z}_n \log \mathfrak{g} + \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z}_{01}, \mathfrak{z}_{02}, \cdots \mathfrak{z}_{n-1}) = 0,$$

wo $\mathfrak{E}_n$ aus E_n hervorgeht, indem man $g_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ bzw. durch $\mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{z}_{01}, \mathfrak{z}_{02}, \ldots$ ersetzt. Wenn man

$$\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_{01}\mathfrak{Z}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

setzt, so daß $\mathfrak{Z}_1 = 1$ ist, hat man

$$\frac{d\mathfrak{Z}_n}{d\xi} + \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \cdots \mathfrak{Z}_{n-1}) \cdot \mathfrak{z}_{01} = 0,$$

wo $\mathfrak{H}_n$ aus H_n hervorgeht, indem man $g_2, \ldots, z_1, Z_1, Z_2, \ldots$ durch $\mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{z}_{01}, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots$ ersetzt. Es sei

$$\mathfrak{Z}_n = \int_1^\infty \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \cdots \mathfrak{Z}_{n-1}) \mathfrak{z}_{01} d\xi.$$

Wie a. a. O. zeigt man, daß die Reihe

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{01} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}^n \mathfrak{Z}_n$$

mit der vorhin gefundenen Potenzreihe von $\mathfrak{g}^{-\xi}$ übereinstimmt, also konvergiert, wenn $\mathfrak{C}\mathfrak{g}^{-\xi}$ hinreichend klein ist.

Je nachdem $\arg a < 0$ oder $\arg a > 0$ ist, ist im Gebiet $\mathfrak{G}^+$ oder im Gebiet $\mathfrak{G}^-$ der x-Ebene

$$|z_1| < M\mathfrak{z}_{01},$$

also wegen $\mathfrak{g} > 1$

$$\left|\frac{z_1}{g_1}\right| < \frac{M\mathfrak{z}_{01}}{\mathfrak{g}} < M\mathfrak{z}_{01}.$$

Unter der Annahme

$$|Z_\nu| \leqq M^{\nu-1}\mathfrak{Z}_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist

$$\left|H_n(Z_1, \ldots Z_{n-1}) \cdot \frac{z_1}{g_1}\right| \leqq M^{n-1}\,\mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \cdots \mathfrak{Z}_{n-1}) \cdot \mathfrak{z}_{01};$$

auch wenn x durch $x+1, x+2, \ldots$ ersetzt wird, also

$$\left|\sum_{x+1}^{\infty} H_n(Z_1, \ldots Z_{n-1}) \cdot \frac{z_1}{g_1}\right| \leqq M^{n-1} \sum_{\xi+1}^{\infty} \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \cdots \mathfrak{Z}_{n-1}) \cdot \mathfrak{z}_{01}$$

$$\leqq M^{n-1} \int_{\xi+1}^{\infty} \mathfrak{H}_n(\mathfrak{Z}_1, \cdots \mathfrak{Z}_{n-1}) \mathfrak{z}_{01} d\xi;$$

denn

$$\mathfrak{H}_n = \Sigma\, \mathfrak{g}_i \mathfrak{z}_{01}^{\,l-2} \mathfrak{H}_{\nu_1} \cdots \mathfrak{H}_{\nu_l} \qquad (l = 2, \ldots n;\ \nu_1 + \ldots + \nu_l = n)$$

nimmt mit wachsendem ξ ab, da dies für $\mathfrak{z}_{01}, \mathfrak{H}_{\nu_1}, \ldots$ gilt. Demnach ist

$$|Z_n| \leqq M^{n-1}\mathfrak{Z}_n.$$

§ 5.

Fall $\Re(a) > 0$. Verhalten von $w(t)$ für reelle negative t. Zweite Lösung der Differenzengleichung.

Um das *Verhalten von $w(t)$ für den Fall zu untersuchen, daß $t = -\mathfrak{t}$ als reelle negative Größe ins Unendliche geht*, machen wir von der Integralgleichung ($\bar{\mathrm{J}}$) oder ($\bar{\mathrm{L}}$) Gebrauch.

Setzt man $t = -\bar{t}$, $\tau = -\bar{\tau}$, $w(-\bar{t}) = \bar{w}(\bar{t})$, so nimmt die Integralgleichung ($\bar{\mathrm{J}}$) die Form an:

(J') $$(e^{\bar{t}} - 1)\,\bar{w}(\bar{t}) = \bar{G}_0(-\bar{t}) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^{\bar{t}} (-1)^{\mu} \bar{G}_{\mu}[-(\bar{t} - \tau)]\,\bar{w}^{\mu}(\bar{\tau})\,d\bar{\tau}$$ [18]);

unter dem Integralzeichen ist $\bar{w}(\bar{\tau})$ mit $-\bar{G}_1[-(\bar{t} - \bar{\tau})] = -\bar{A}_{01} + \ldots = -a + \ldots = a + \ldots$ multipliziert. Die für die Gleichung (J) aufgestellten Sätze gelten also auch für die Gleichung (J'). Die früher betrachtete Reihe

$$w(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^{\mu} W_{\mu}(t), \quad W_{\mu}(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda+\mu a-1}}{\Gamma(\lambda + \mu a)} \text{ für } |t| < 2\pi$$

genügt auch der Integralgleichung ($\bar{\mathrm{J}}$); folglich hat die Integralgleichung (J') die Lösung

$$w(\bar{t}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{C}^{\mu} \bar{W}_{\mu}(\bar{t}), \quad \bar{W}_{\mu}(\bar{t}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \bar{c}_{\lambda\mu} \frac{\bar{t}^{\lambda+\mu a-1}}{\Gamma(\lambda + \mu a)} \text{ für } |t| < 2\pi,$$

worin $\bar{C} = C(-1)^{a-1}$, $\bar{c}_{\lambda\mu} = (-1)^{\lambda+\mu-1} c_{\lambda\mu}$, also $\bar{c}_{01} = c_{01}$ ist. Es ist also

$$W_{\mu}(t) = (-1)^{\mu(a-1)} \overline{W}_{\mu}(\bar{t}).$$

Es handelt sich um das Verhalten von $w(-\mathfrak{t})$ und $W_{\mu}(-\mathfrak{t})$ oder von $\bar{w}(\mathfrak{t})$ und $\bar{W}_{\mu}(\mathfrak{t})$ für reelle positive $\mathfrak{t}$. Wenn wir die für die Gleichung (J) aufgestellten Sätze auf die Gleichung (J') übertragen, treten an die Stelle der früheren Größen ϱ, σ, K_{μ}, K jetzt Größen, die wir mit $\bar{\varrho}$, $|(-1)^{a-1}|\bar{\sigma}$, $(-1)^{-\mu(a-1)}|\bar{K}_{\mu}$, $\bar{K}$ bezeichnen; $\mathfrak{C}$ wird durch $\bar{\mathfrak{C}}|(-1)^{a-1}|$ ersetzt. Für $\mathfrak{t} > \mathfrak{t}_0 > 0$ ist

$$|\bar{W}_{\mu}(\mathfrak{t})| \leqq |(-1)^{-\mu(a-1)}|\,\bar{K}_{\mu} e^{(\bar{\sigma}+\varepsilon)\mathfrak{t}},$$

$$|\bar{w}(\mathfrak{t})| \leqq |\bar{K} e^{\left[\bar{\varrho} + (\bar{\mathfrak{C}} \cdot |(-1)^{a-1}| \cdot \bar{\sigma})^{\frac{1}{a}}\right]\mathfrak{t}}|$$

oder

$$|W_{\mu}(-\mathfrak{t})| \leqq \bar{K}_{\mu} e^{(\bar{\varrho}+\varepsilon)\mathfrak{t}},$$

$$|w(-\mathfrak{t})| \leqq \bar{K} e^{\left[\bar{\varrho} + (\bar{\mathfrak{C}}\bar{\sigma})^{\frac{1}{a}}\right]\mathfrak{t}};$$

dabei ist ε eine beliebig kleine positive Zahl.

[18]) Es ist $w^{\mu}(t) = (-1)^{\mu+1} \bar{w}^{\mu}(t)$.

Das Integral

$$\bar{Y}_\mu = -\int_0^\infty W_\mu(-t)\, e^{tx}\, dt \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

konvergiert für $\Re(x) < -\bar{\varrho}$; *das Integral*

$$\bar{y} = -\int_0^\infty w(-t)\, e^{tx}\, dt = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^\mu \bar{Y}_\mu$$

ist für $\Re(x) < -[\bar{\varrho} + (\mathfrak{C}\bar{\sigma})^{\frac{1}{a}}]$ *konvergent und genügt der Differenzengleichung* (D) *oder* ($\bar{\text{D}}$). In der Nähe von $x = \infty$ ist für $\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$

$$\bar{Y}_\mu \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu}\, x^{-\lambda-\mu a}.$$

Wenn $\gamma > \frac{1}{6}$ angenommen wird, sind die Funktionen

$$\bar{V}_\mu(z) = W_\mu\left(\frac{1}{\gamma}\log z\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda-1}\, \bar{L}_{\lambda\mu}\, (1-z)^{\lambda+\mu a-1}$$

für $|1-z| < 1$ regulär. Für $\Re(x) < -\bar{\varrho}$ ist

$$\bar{Y}_\mu = -\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \bar{V}_\mu(z)\, z^{-\frac{x}{\gamma}-1}\, dz = -\frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}\, \bar{L}_{\lambda\mu}\, \Gamma(\lambda+\mu a)\, \Gamma\left(-\frac{x}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(-\frac{x}{\gamma}+\lambda+\mu a\right)}$$

oder

$$\bar{Y}_\mu = \frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\Gamma(\mu a)}{\Gamma\left(-\frac{x}{\gamma}+\mu a\right)} \Lambda_\mu,$$

$$\Lambda_\mu = \bar{L}_{0\mu} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mu a\,(\mu a+1)\ldots(\mu a+\lambda-1)\, \bar{L}_{\lambda\mu}}{\left(\frac{x}{\gamma}-\mu a\right)\left(\frac{x}{\gamma}-\mu a-1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}-\mu a-\lambda+1\right)}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots),$$

$$\bar{Y}_0 = \frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, \bar{L}_{\lambda 0}}{\frac{x}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}-\lambda+1\right)}.$$

Wie in § 3 erhält man die Differenzengleichungen

$$x\Delta\bar{Y}_1 = \bar{g}_1\bar{Y}_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x\Delta\bar{Y}_\mu = \bar{g}_1\bar{Y}_\mu + \bar{E}_\mu(\bar{Y}_1, \ldots \bar{Y}_{\mu-1}),$$

$$g_\mu = \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu \bar{P}\left(\frac{1}{x}, \bar{Y}_0\right)}{\partial \bar{Y}_0^\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

d $\bar{E}_\mu$ eine Summe von Produkten $\bar{g}_l \bar{Y}_{\nu_1} \ldots \bar{Y}_{\nu_l}$ $(l = 2, \ldots \mu;\ \nu_1 + \ldots$ $\nu_l = \mu)$ ist. Hieraus gehen, *wenn*

$$\bar{Y}_\mu = x^{-\mu a}\bar{\varphi}_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzt wird, die Differenzengleichungen hervor:

$$\Delta\bar{\varphi}_1 = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^a - 1 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^a \frac{\bar{g}_1}{x}\right]\bar{\varphi}_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta\bar{\varphi}_\mu = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\mu a} - 1 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\mu a}\frac{\bar{g}_1}{x}\right]\bar{\varphi}_\mu$$

$$+ \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\mu a} \sum \frac{\bar{g}_l}{x}\bar{\varphi}_{\nu_1}\ldots\bar{\varphi}_{\nu_l}.$$

Wenn man

$$\bar{F}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-\nu+1)}{\nu!}\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

$$\bar{F}_1(t) = \bar{F}(t), \qquad \bar{F}_\mu(t) = \sum_{\nu=1}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}\bar{F}^\nu(t) \qquad (\mu = 2, 3, \ldots)$$

tzt, ist für $\Re(x) < -1$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\mu a} - 1 = -\int_0^\infty \bar{F}_\mu(-t)\,e^{tx}dt \qquad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

s sei

$$\bar{Q}_\mu(t) = \bar{G}_\mu(t) + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\binom{\nu}{\mu}\bar{G}_\nu w^{\nu-\mu}(t) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots);$$

$$\bar{R}_\mu(t) = \bar{F}_\mu(t) + \bar{Q}_1(t) + \bar{F}_\mu\bar{Q}_1(t) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

$\bar{S}_1(t) = \bar{R}_1(t)$ und für $\mu = 2, 3, \ldots$

$$\bar{S}_\mu(t) = \bar{R}_\mu(t) + \sum c_{0\nu_1}\ldots c_{0\nu_l}\bar{R}_{l\mu}(t) + \ldots + \sum \bar{R}_{l\mu}u_{\nu_1}\ldots u_{\nu_l}(t).$$

$$\bar{R}_{l\mu}(t) = \bar{Q}_l(t) + \bar{F}_\mu\bar{Q}_l(t).$$

enn $u_\mu(t)$ der Integralgleichung

$$(e^{-t}-1)u_\mu(t) = \int_0^t \bar{R}_\mu(t-\tau)u_\mu(\tau)d\tau + \bar{S}_\mu(t) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

nügt, besteht eine Ungleichung

$$|u_\mu(-t)| < \bar{K}_\mu e^{\bar{\varrho}_\mu t}, \qquad \bar{\varrho}_\mu > \bar{\varrho}_0 = \bar{\varrho} + Kk \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

und die Differenzengleichung $(\overline{\mathrm{F}}_\mu)$ wird durch *das Laplacesche Integral*

$$\overline{\varphi}_\mu = c_{0\mu} - \int_0^\infty u_\mu(-t)\, e^{tx}\, dt$$

befriedigt. Die Lösung $u_\mu(t)$ der Integralgleichung $(\overline{\mathrm{M}}_\mu)$ stimmt mit derjenigen der Integralgleichung (M_μ) überein.

Die asymptotische Gleichung

$$\overline{\varphi}_\mu \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_{\lambda\mu}}{x^\lambda}$$

gilt für $\frac{x}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$. Die Funktion

$$\bar{v}_\mu(z) = u_\mu\left(\frac{1}{\gamma}\log z\right) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1}\, \bar{l}_{\lambda\mu}\, (1-z)^{\lambda-1}$$

ist für $|1-z|<1$ regulär; es ist $\bar{l}_{00}=0$. Für $\Re(x) < -\bar{\varrho}_0$ ist

$$\overline{\varphi}_\mu - c_{0\mu} = -\frac{1}{\gamma}\int_0^1 \bar{v}_\mu(z)\, z^{-\frac{x}{\gamma}-1}\, dz = \frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\,\bar{l}_{\lambda\mu}}{\frac{x}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}-\lambda+1\right)}.$$

Es sei noch bemerkt, daß auch die folgende Integralgleichung für $W_\mu(t)$ gilt:

$$(\overline{\mathrm{M}}_\mu) \qquad (e^{-t}-1)\, W_\mu(t) = \int_0^t \bar{Q}_1(t-\tau)\, W_\mu(\tau)\, d\tau + \sum \bar{Q}_l\, W_{\nu_1}\ldots W_{\nu_l}(\tau)\, d\tau$$

$$(l=2,\ldots\mu;\ \nu_1+\ldots+\nu_l=\mu).$$

§ 6.

Fall $\Re(a) \leqq 0$. Verhalten von $w(t)$ für reelle positive und negative t. Zwei Lösungen der Differenzengleichung.

Es sei jetzt $\mathfrak{a} = \Re(a) \leqq 0$.

Die Integralgleichung (J) hat die Lösung

$$w(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(t);$$

es ist

$$w_\nu(t) = e^{-t}(1-e^{-t})^{a-1}\int_0^t (1-e^{-t})^{-a}\, q_\nu(t)\, dt \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $q_\nu(t)$ dieselbe Bedeutung hat wie in § 2; die einzigen im Endlichen gelegenen singulären Stellen von $w(t)$ sind $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i, \ldots$; für $|t|<2\pi$ ist

$$w(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}.$$

Wie früher *sei* t *reell positiv*. Die Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_\alpha)$ wird urch eine für hinreichend große ξ (etwa für $\xi = \varrho$) konvergente Potenzihe von $\frac{1}{\xi}$

$$\eta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{C}_\lambda}{\xi^\lambda}$$

efriedigt; $\mathfrak{C}_\lambda$ ist eine ganze rationale Funktion von α mit positiven oeffizienten. Die Integralgleichung (L_α) wird durch die für alle t konergente Reihe

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{C}_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

efriedigt. Es ist für einen festen positiven Wert von $\alpha \ldots \mathfrak{C}_\lambda \leqq \mathfrak{R}\varrho^\lambda$, also. enn $K \geqq \mathfrak{R}\varrho$ ist,

$$\mathfrak{w}(t) \leqq K e^{\varrho t}.$$

Man hat die für alle α konvergente Reihe

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu \mathfrak{w}_\nu(t),$$

o $\mathfrak{w}_\nu(t)$ eine beständig konvergente Potenzreihe von t ist. Mit der üheren Bedeutung von $\mathfrak{q}_\nu(t)$ ist

$$\mathfrak{w}_\nu(t) = t^{a-1} \int_0^t t^{-a}\, \mathfrak{q}_\nu(t)\, dt \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es ist $1 - e^{-t} \leqq t$, also wegen $a \leqq 0$

$$|(1 - e^{-t})^{-a}| \leqq (1 - e^{-t})^{-a} \leqq t^{-a}.$$

Wir setzen $\beta = \frac{1}{1-a}$, so daß $0 < \beta \leqq 1$ ist. Die Funktion

$$\frac{t e^{-\beta t}}{1 - e^{-t}}$$

er reellen positiven Veränderlichen t verschwindet für $t = 0$ und für $t = \infty$; e nimmt nur positive Werte an, deren größter g^β sei. Demnach ist

$$\frac{t^{1-a} e^{-t}}{(1 - e^{-t})^{1-a}} \leqq g,$$

$$|e^{-t}(1 - e^{-t})^{a-1}| = e^{-t}(1 - e^{-t})^{a-1} \leqq g t^{a-1}.$$

Nunmehr ergibt die Vergleichung der Formeln für $w_\nu(t)$ und $\mathfrak{w}_\nu(t)$:

$$|w_\nu(t)| \leqq g^{2\nu+1}\, \mathfrak{w}_\nu(t)^{19}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

[19]) Vgl. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 23 (1914), S. 311—312.

Es sei für $\alpha = g^2$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu \mathfrak{w}_\nu(t) \leqq \frac{K}{g} e^{\varrho t};$$

dann ist

$$|w(t)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} g^{2\nu+1} \mathfrak{w}_\nu(t) \leqq K e^{\varrho t}.$$

Das Integral

$$y = \int_0^\infty w(t) e^{-tx} dt$$

ist in der Halbebene $\Re(x) > \varrho$ *konvergent und genügt der Differenzengleichung* (D).

Zur Untersuchung von $w(-t)$ wenden wir den eben ausgesprochenen Satz auf die Integralgleichung (J′) mit der Lösung $\bar{w}(\bar{t}) = w(-\bar{t})$ an. Wenn $\bar{\varrho}$, $\bar{K}$ für die Integralgleichung (J′) dieselbe Bedeutung haben wie ϱ, K für die Integralgleichung (J), so ist

$$|\bar{w}(t)| \leqq \bar{K} e^{\bar{\varrho} t}$$

und somit

$$|w(-t)| \leqq \bar{K} e^{\bar{\varrho} t}.$$

Das in der Halbebene $\Re(x) < -\bar{\varrho}$ *konvergente Integral*

$$\bar{y} = -\int_0^\infty w(-t) e^{tx} dt$$

stellt eine weitere Lösung der Differenzengleichung (D) *oder* ($\bar{\text{D}}$) *dar.*

In der Nähe von $x = \infty$ gilt die asymptotische Gleichung

$$y \sim \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_\lambda}{x^\lambda}$$

für $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ und die asymptotische Gleichung

$$\bar{y} \sim \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_\lambda}{x^\lambda}$$

für $\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$. Die Funktionen

$$v(z) = w\left(-\frac{1}{\gamma} \log z\right) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} l_\lambda (1-z)^{\lambda-1},$$

$$\bar{v}(z) = w\left(\frac{1}{\gamma} \log z\right) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} \bar{l}_\lambda (1-z)^{\lambda-1}$$

sind im Innern des Kreises $|1-z| = 1$ konvergent, wenn $\gamma > \frac{1}{6}$ ist. Man hat, wenn $\varrho + Kk = \varrho_0$, $\bar{\varrho} + \bar{K}k = \bar{\varrho}_0$ gesetzt wird,

$$y = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 v(z)\, z^{\frac{x}{\gamma}-1}\, dz = \frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, l_\lambda}{\frac{x}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}+\lambda-1\right)}$$

ür $\Re(x) > \varrho_0$ und

$$\bar{y} = -\frac{1}{\gamma}\int_0^1 \bar{v}(z)\, z^{-\frac{x}{\gamma}-1}\, dz = \frac{1}{\gamma}\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, \bar{l}_\lambda}{\frac{x}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{\gamma}-\lambda+1\right)}$$

ür $\Re(x) < -\bar{\varrho}_0$.

§ 7.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Wir stellen die Hauptsätze, die in §§ 1 bis 6 enthalten sind, zu-ammen.

I. Die Differenzengleichung (D) oder $(\bar{\mathrm{D}})$ wird, wenn $a = \Re(a) > 0$, ber a keine ganze positive Zahl ist, durch eine Reihe

$$y = \sum c_{\lambda\mu}\, x^{-\lambda}\, (Cx^{-a})^{\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda + \mu > 0),$$

n welcher C eine periodische Funktion von x mit der Periode 1 ist, formal efriedigt. Die Integralgleichung (J) oder $(\bar{\mathrm{J}})$ wird durch die Reihe

$$w(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^{\mu}\, W_{\mu}(t)$$

efriedigt; für $|t| < 2\pi$ läßt die Lösung $W_0(t)$ der Integralgleichung (J) ie konvergente Reihenentwicklung

$$W_0(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda 0}\, \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

ie Lösung $W_\mu(t)$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ der Integralgleichung (M_μ) oder $(\bar{\mathrm{M}}_\mu)$ die onvergente Reihenentwicklung

$$W_\mu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu}\, \frac{t^{\lambda+\mu a-1}}{\Gamma(\lambda+\mu a)}$$

ı; die Funktionen $W_\mu(t)$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ sind, abgesehen von $t = 0$ und en singulären Stellen $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, ..., im Endlichen überall regulär; e Reihe für $w(t)$ ist konvergent, wenn t keine singuläre Stelle und C ein eliebiger endlicher Wert ist. Die mit $W_\mu(t)$ durch die Gleichung

$$W_\mu(t) = c_{0\mu}\, \frac{t^{\mu a-1}}{\Gamma(\mu a)} + \frac{1}{\Gamma(\mu a)}\int_0^t (t-\tau)^{\mu a-1}\, u_\mu(\tau)\, d\tau$$

verknüpfte Funktion $u_\mu(t)$, welche der Integralgleichung (N_μ) oder $(\overline{N}_\mu)$ genügt läßt für $|t| < 2\pi$ die konvergente Reihenentwicklung

$$u_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

zu und ist, abgesehen von $t = \pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i, \ldots$, im Endlichen regulär[20]). Die über die positive reelle t-Achse erstreckten Integrale

$$Y_\mu = \int_0^{\infty} W_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt, \qquad \varphi_\mu = c_{0\mu} + \int_0^{\infty} u_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt\ ^{21})$$

sind für $\Re(x) > \varrho$, die über die negative reelle t-Achse erstreckten Integrale

$$\overline{Y}_\mu = \int_0^{-\infty} W_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt, \qquad \overline{\varphi}_\mu = c_{0\mu} + \int_0^{-\infty} u_\mu(t)\, e^{-tx}\, dt$$

für $\Re(x) < -\overline{\varrho}$ konvergent, wenn ϱ und $\overline{\varrho}$ hinreichend große positive Zahlen sind. Für $\Re(x) > \varrho_0$ konvergieren die Fakultätenreihen[22])

$$Y_0 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, L_{\lambda 0}}{x(x+1)\ldots(x+\lambda-1)},$$

$$Y_\mu = \frac{\Gamma(x)\Gamma(\mu a)}{\Gamma(x+\mu a)}\left\{ L_{0\mu} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mu a(\mu a+1)\ldots(\mu a+\lambda-1)\, L_{\lambda\mu}}{(x+\mu a)(x+\mu a+1)\ldots(x+\mu a+\lambda-1)} \right\}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots);$$

$$\varphi_\mu = c_{0\mu} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, l_{\lambda\mu}}{x(x+1)\ldots(x+\lambda-1)} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

für $\Re(x) < -\overline{\varrho}_0$ die Fakultätenreihen

$$\overline{Y}_0 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, \overline{L}_{\lambda 0}}{x(x-1)\ldots(x-\lambda+1)},$$

$$\overline{Y}_\mu = \frac{\Gamma(-x)\Gamma(\mu a)}{\Gamma(-x+\mu a)}\left\{ \overline{L}_{0\mu} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mu a(\mu a+1)\ldots(\mu a+\lambda-1)\, L_{\lambda\mu}}{(x-\mu a)(x-\mu a-1)\ldots(x-\mu a-\lambda+1)} \right\}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots);$$

$$\overline{\varphi}_\mu = c_{0\mu} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, \overline{l}_{\lambda\mu}}{x(x-1)\ldots(x-\lambda+1)} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots);$$

dabei sind ϱ_0 und $\overline{\varrho}_0$ hinreichend große positive Zahlen. Wenn $|C|$ unter

---

[20]) Es ist $W_0(t) = u_0(t) = u(t)$.

[21]) Es ist $c_{00} = 0$, $c_{01} = 1$.

[22]) Wir nehmen die positive Größe γ, welche größer als $\frac{1}{6}$ sein soll, gleich 1 an.

$$M_{l,n} = \sum_{i=1}^{l} a_i^{(n)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots)$$

cht geschränkt ist, so gibt es eine in $< a, b >$ absolut-stetige Funktion $g(x)$, die die Zahlenfolge:

$$A^{(n)}(g) = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} g(x_i^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ichfalls nicht geschränkt ist.

Wir beschränken nicht die Allgemeinheit, wenn wir annehmen, die $_n$ seien *nach oben* nicht geschränkt[13]). Es gibt dann eine Indizesge $\{n_i\}$ und eine zugehörige Folge natürlicher Zahlen $l_i \leqq k_{n_i}$, so daß:

$$\lim_{i=\infty} M_{l_i, n_i} = +\infty.$$

r können der Einfachheit halber annehmen, es sei:

$$\lim_{n=\infty} M_{l_n, n} = +\infty \qquad (1 \leqq l_n \leqq k_n),$$

s offenbar auch keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. eiter können wir annehmen, unter allen Indizes l $(1 \leqq l \leqq k_n)$ sei l_n rjenige, für welchen $M_{l,n}$ *den größten Wert* annimmt.

Wir bezeichnen nun mit ξ_{l_n} den ersten auf x_{l_n} folgenden Punkt der reinigungsmenge von $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$, und mit $g_n(x)$ die folgenderßen definierte stetige Funktion[14]):

$$g_n(x) \begin{cases} = 1 \text{ für } a \leqq x \leqq x_{l_n}, \\ \text{ist linear für } x_{l_n} \leqq x \leqq \xi_{l_n}, \\ = 0 \text{ für } \xi_{l_n} \leqq x \leqq b. \end{cases}$$

e Funktion $g_n(x)$ ist dann auch *absolut stetig* in $< a, b >$; sie ist ner monoton abnehmend, und zwar ist in $< a, b >$:

$$0 \leqq g_n(x) \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

ist nun:

$$A^{(n)}(g_n) = M_{l_n, n},$$

d somit wegen (66):

$$\lim_{n=\infty} A^{(n)}(g_n) = +\infty.$$

zen wir noch zur Abkürzung:

$$L_n = A^{(n)}(g_n) = M_{l_n, n},$$

---

[13]) Denn andernfalls könnten wir die $a_i^{(n)}$ durch die $-a_i^{(n)}$ ersetzen.

[14]) Im Falle $x_{l_n} = b$ fallen die zweite und dritte der beiden folgenden Festzungen fort.

so kann der Beweis des Hilfssatzes von § 3 wörtlich wiederholt wer den (wobei wir nur die Folge $n_1, n_2, \ldots, n_i \ldots$ diesmal nicht mit $n_1 =$ beginnen, sondern n_1 so groß wählen, daß $L_{n_1} > 0$ wird). Wir erhalten also: Entweder ist für eine der Funktionen $g_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die Folge de $A^{(n)}(g_\nu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht geschränkt, oder es gibt eine wachsend Indizesfolge $\{n_i\}$, so daß für die Funktion:

$$(68) \qquad g(x) = g_{n_1}(x) + \frac{1}{2L_{n_1}} g_{n_2}(x) + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}L_{n_{i-1}}} g_{n_i}(x) + \ldots$$

die Folge der $A^{(n)}(g)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht geschränkt ist. Unsere Be hauptung wird somit bewiesen sein, wenn wir zeigen, *daß die durch* (68) *gegebene Funktion* $g(x)$ *absolut-stetig ist in* $< a, b >$.

Wir haben also zu zeigen: ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt e ein $\eta > 0$, so daß für jede Menge zu je zweien fremder Teilintervall (x'_ν, x''_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ von $< a, b >$, für die:

$$(69) \qquad \sum_\nu (x''_\nu - x'_\nu) < \eta$$

ist, die Ungleichung besteht:

$$(70) \qquad \sum_\nu |g(x''_\nu) - g(x'_\nu)| < \varepsilon.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe in (68) gibt es nun einen Index j, so daß

$$(71) \qquad \left| \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}L_{n_{i-1}}} g_{n_i}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der absoluten Stetigkeit der $g_n(x)$ kann sodann $\eta > 0$ so ge wählt werden, daß für jede Menge zu je zweien fremder, der Ungleic chung (69) genügender Teilintervalle (x'_ν, x''_ν) aus $< a, b >$:

$$(72) \qquad \sum_\nu \left| \left(g_{n_1}(x''_\nu) + \frac{1}{2L_{n_1}} g_{n_2}(x''_\nu) + \ldots + \frac{1}{2^{j-1}L_{n_{j-1}}} g_{n_j}(x''_\nu) \right) \right.$$
$$\left. - \left(g_{n_1}(x'_\nu) + \frac{1}{2L_{n_1}} g_{n_2}(x'_\nu) + \ldots + \frac{1}{2^{j-1}L_{n_{j-1}}} g_{n_j}(x'_\nu) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen des monotonen Abnehmens der $g_n(x)$ und wegen (67) folgt aus (71)

$$(73) \qquad \sum_\nu \left| \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}L_{n_{i-1}}} g_{n_i}(x''_\nu) - \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}L_{n_{i-1}}} g_{n_i}(x'_\nu) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus (72) und (73) aber folgt (70), womit die absolute Stetigkeit von $g(x$ nachgewiesen ist. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Wir schließen daraus:

Damit für jede in $< a, b >$ *absolut-stetige Funktion* $f(x)$ *im Punkte* x *von* $< a, b >$ *die Beziehung gelte:*

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

notwendig, daß es eine Zahl A gebe, so daß:

$$\left| \sum_{i=1}^{l} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right| \leqq A \qquad (l = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots).$$

§ 9.

Wir können nun wieder nachweisen, daß die eben aufgestellte notndige Bedingung, zusammen mit der notwendigen Bedingung von hinreichend ist, damit unser Interpolationsverfahren im Punkte $\bar{x}$ nvergent sei für jede dort stetige Funktion, die in $< a, b >$ von dlicher Variation ist:

Sind im Punkte $\bar{x}$ von $< a, b >$ die Bedingungen (12) *und* (74) *üllt, so gilt für jede im Punkte $\bar{x}$ stetige Funktion $f(x)$, die in $< a, b >$ endlicher Variation ist, die Beziehung:*

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}, f) = f(\bar{x}).$$

Ist die Funktion $f(x)$ in $< a, b >$ von endlicher Variation und tig in $\bar{x}$, so ist sie Differenz zweier in $< a, b >$ geschränkter, mono- abnehmender Funktionen, die gleichfalls in $\bar{x}$ stetig sind. Es gegt also die Behauptung nachzuweisen für alle in $< a, b >$ geschränk-, monoton abnehmenden Funktionen, die im Punkte $\bar{x}$ stetig sind.

Da eine solche Funktion nur Unstetigkeiten erster Art hat, so gibt wie wir in § 4 sahen, zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ in $a, b >$ endlich viele von $\bar{x}$ verschiedene Punkte:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b,$$

l eine in jedem Intervalle (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, 2, \ldots, m)$ konstante nktion $f^*(x)$, die in ganz $< a, b >$ der Ungleichung genügt:

$$|f^*(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

besondere ist also auch, wenn c_j den konstanten Wert von $f^*(x)$ (a_{j-1}, a_j) bedeutet:

$$|c_j - \lim_{x=a_j-0} f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

zeichnen wir also mit $f^{**}(x)$ die Funktion, die aus $f^*(x)$ entsteht, em wir in jedem Intervalle (a_{j-1}, a_j) den konstanten Wert c_j rch $\lim_{x=a_j-0} f(x)$ ersetzen, so ist nun auch in ganz $< a, b >$.

$$|f^{**}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ferner ist in jedem einzelnen Intervall (a_{j-1}, a_j) die Funktion $f(x) - f^{**}(x)$ monoton abnehmend und $\geqq 0$.

Wie in § 4 aber erkennen wir, daß:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}, f^{**}) = f^{**}(\bar{x})$$

ist. Um nun weiter die Differenz $P^{(n)}(\bar{x}; f^{**}) - P^{(n)}(\bar{x}; f)$ abzuschätzen, bemerken wir zunächst, daß wegen (74) für alle Teilintervalle (α, β) von $< a, b >$ die Ungleichung gilt:

$$\left| \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right| \leqq 2A \qquad \text{für alle } n; \tag{77}$$

in der Tat sind $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}$ die nach $< a, \beta)$ fallenden Punkte von $\mathfrak{M}^{(n)}$, und $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_l^{(n)}$ die nach $< a, \alpha >$ fallenden, so ist

$$\sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{l} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}).$$

Ebenso folgern wir aus (74): Ist ξ ein Punkt von $< a, b >$, der unendlich vielen Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$ angehört, etwa der Menge $\mathfrak{M}^{(n_\nu)}$ als Punkt $x_{l_\nu}^{(n_\nu)}$, so ist:

$$| \varphi_{l_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}) | \leqq 2A. \tag{78}$$

In der Tat, es ist:

$$\varphi_{l_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{l_\nu} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{l_\nu - 1} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x}).$$

Da nun $f(x) - f^{**}(x)$ in jedem Intervalle (a_{j-1}, a_j) monoton abnimmt, und der Ungleichung genügt:

$$0 \leqq f(x) - f^{**}(x) < \varepsilon,$$

lehrt bei Berücksichtigung von (77) der zweite Mittelwertsatz für endliche Summen:

$$\left| \sum_{(a_{j-1}, a_j)} f(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) - \sum_{(a_{j-1}, a_j)} f^{**}(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right| < 2A\varepsilon \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{79}$$

Gehört ferner der Punkt a_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ unendlich vielen Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$ an, etwa der Menge $\mathfrak{M}^{(n_\nu)}$ als Punkt $x_{l_\nu}^{(n_\nu)}$, so lehrt (78), zusammen mit (76):

$$| f(a_j) \varphi_{l_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}) - f^{**}(a_j) \varphi_{l_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}) | < 2A\varepsilon \qquad (j = 0, 1, \ldots, m) \tag{80}$$

Aus (79) und (80) aber folgt:

$$| P^{(n)}(\bar{x}; f^{**}) - P^{(n)}(\bar{x}; f) | < (2m + 1)\, 2A\varepsilon. \tag{81}$$

ıdem wir nun (81) an Stelle von (40) treten lassen, schließen wir weiter ie in § 4 auf das Bestehen von (75).

Zusammenfassend können wir unsere letzten Ergebnisse auch so ısdrücken:

Damit für jede im Punkte $\bar{x}$ von $<a, b>$ stetige Funktion $f(x)$, e in $<a, b>$ von endlicher Variation ist, die Beziehung gelte:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt seien:

1. *Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) ist:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1; \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

2. *Es gibt eine Zahl A, so daß für alle Intervalle (α, β) und alle n:*

$$\left| \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right| < A.$$

§ 10.

Die Lagrangesche Interpolationsformel liefert ein stetiges distributives Interpolationsverfahren, und zwar ist:

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \frac{(x - x_1^{(n)}) \dots (x - x_{i-1}^{(n)}) (x - x_{i+1}^{(n)}) \dots (x - x_{k_n}^{(n)})}{(x_i^{(n)} - x_1^{(n)}) \dots (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) (x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) \dots (x_i^{(n)} - x_{k_n}^{(n)})}.$$

Wir wählen nun die Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$ so, daß die Punkte $x_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \dots, k_n)$ *equidistant* werden, d. h. wir setzen:

(82) $$x_i^{(n)} = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Wir wollen nun unsere Sätze benutzen, um zu zeigen, daß unter ieser Annahme das Lagrangesche Interpolationsverfahren in einem eliebigen Punkte $\bar{x}$ von (a, b) weder konvergent, noch von endlicher mpfindlichkeit ist.

Sei zunächst:

$$\bar{x} \neq \frac{a+b}{2};$$

nd zwar wollen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen[15]):

(83) $$a < \bar{x} < \frac{a+b}{2}.$$

[15]) Im Falle $\frac{a+b}{2} < \bar{x} < b$ verläuft der Beweis ganz analog.

Es gibt, zufolge der Wahl (82) der Punkte $x_i^{(n)}$, unendlich viele Werte des Index n, so daß $\bar{x}$ nicht zu $\mathfrak{M}^{(n)}$ gehört; sei im folgenden n ein solcher Index.

Zufolge (83) gibt es ein ε, so daß:

$$0 < \varepsilon < \frac{a+b}{2} - \bar{x}. \tag{84}$$

Ist ε so gewählt, so gibt es bei hinlänglich großem n einen Punkt ξ_n von $\mathfrak{M}^{(n)}$, so daß:

$$\frac{a+b}{2} < \xi_n < a + b - \bar{x} - \varepsilon. \tag{85}$$

Sei ξ_n etwa der Punkt $x_{i_n}^{(n)}$. Wir wollen das zugehörige Polynom $\varphi_{i_n}^{(n)}(x)$ näher untersuchen.

Zu dem Zwecke zerlegen wir das Intervall $< a, b >$ in die Teilintervalle $< a, \bar{x} >$, $< \bar{x}, \xi_n >$, $< \xi_n, \xi_n + \bar{x} - a >$[16]), $< \xi_n + \bar{x} - a, b >$. Die ins Intervall $< a, \bar{x} >$ fallenden Punkte $x_i^{(n)}$, *in der Richtung von* $\bar{x}$ *gegen* a gezählt, bezeichnen wir mit $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_{e_n}^{(n)} (= a)$. Die ins Intervall $< \xi_n, \xi_n + \bar{x} - a >$ fallenden Punkte $x_i^{(n)}$, deren Anzahl offenbar mit der Anzahl der ins Intervall $< a, \bar{x} >$ fallenden übereinstimmt, bezeichnen wir, *in der Richtung von* ξ_n gegen $\xi_n + \bar{x} - a$ *gezählt*, mit $b_1^{(n)} (= \xi_n), b_2^{(n)}, \ldots, b_{e_n}^{(n)}$. Die ins Intervall $< \bar{x}, \xi_n >$ fallenden Punkte $x_i^{(n)}$ seien, in der Richtung von $\bar{x}$ gegen ξ_n gezählt: $c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_{f_n}^{(n)}$; die ins Intervall $< \xi_n + \bar{x} - a, b >$ fallenden Punkte $x_i^{(n)}$ seien (in beliebiger Reihenfolge) $d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, \ldots, d_{g_n}^{(n)}$. Dann ist:

$$| \varphi_{i_n}^{(n)}(\bar{x}) | = P_1 P_2 P_3 P_4 \tag{86}$$

$$P_1 = |\bar{x} - a_1^{(n)}| \prod_{\nu=2}^{e_n} \left| \frac{\bar{x} - a_\nu^{(n)}}{\xi_n - b_\nu^{(n)}} \right|, \qquad P_2 = \frac{1}{|\xi_n - a_{e_n}^{(n)}|} \prod_{\nu=2}^{e_n} \left| \frac{\bar{x} - b_\nu^{(n)}}{\xi_n - a_{\nu-1}^{(n)}} \right|,$$

$$P_3 = \left| \frac{\bar{x} - c_1^{(n)}}{\xi_n - c_1^{(n)}} \right| \prod_{\nu=2}^{f_n} \left| \frac{\bar{x} - c_\nu^{(n)}}{\xi_n - c_{f_n - \nu + 2}} \right|, \qquad P_4 = \prod_{\nu=1}^{g_n} \left| \frac{\bar{x} - d_\nu^{(n)}}{\xi_n - d_\nu^{(n)}} \right|.$$

Man bestätigt nun leicht die Ungleichungen:

$$\left| \frac{\bar{x} - a_\nu^{(n)}}{\xi_n - b_\nu^{(n)}} \right| > 1 \ (\nu = 2, 3, \ldots, e_n), \quad \left| \frac{\bar{x} - b_\nu^{(n)}}{\xi_n - a_{\nu-1}^{(n)}} \right| > 1 \ (\nu = 2, 3, \ldots, e_n),$$

$$\left| \frac{\bar{x} - c_\nu^{(n)}}{\xi_n - c_{f_n - \nu + 2}^{(n)}} \right| > 1 \ (\nu = 2, 3, \ldots, f_n). \tag{87}$$

[16]) Wegen (85) ist $\xi_n + \bar{x} - a < b$.

Wegen:

$$d_\nu^{(n)} - \bar{x} = (d_\nu^{(n)} - \xi_n) + (\xi_n - \bar{x})$$

t ferner, bei Berücksichtigung von (85) und (84):

$$\text{8)} \qquad \left|\frac{\bar{x} - d_\nu^{(n)}}{\xi_n - d_\nu^{(n)}}\right| = 1 + \frac{\xi_n - \bar{x}}{d_\nu^{(n)} - \xi_n} > 1 + \frac{\frac{a+b}{2} - \bar{x}}{b-a} > 1 + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Was endlich die Anzahl g_n der ins Intervall $< \xi_n + \bar{x} - a, b >$ allenden Punkte $x_i^{(n)}$ anlangt, so ist wegen (85):

$$\text{9)} \qquad g_n \geqq (b - \xi_n - \bar{x} + a) \cdot \frac{n}{b-a} > \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot n.$$

Wir haben also aus (86) bei Berücksichtigung von (87) (88) (89) chließlich:

$$\text{0)} \qquad |\varphi_{i_n}^{(n)}(\bar{x})| > \frac{1}{(b-a)^2} (\bar{x} - a_1^{(n)}) (c_1^{(n)} - \bar{x}) \left(1 + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)^{\frac{\varepsilon}{b-a} \cdot n}.$$

Nehmen wir nun zunächst an, es werde $< a, b >$ durch $\bar{x}$ in *ratio-alem* Verhältnisse geteilt, d. h. es sei:

$$\bar{x} = a + \frac{p}{q}(b-a) \qquad (p, q \text{ natürliche Zahlen}; p < q).$$

Ist dann n teilerfremd zu q, so ist $\bar{x}$ nicht Punkt von $\mathfrak{M}^{(n)}$, wir önnen also im vorstehenden unter n jede (hinlänglich große) zu q teiler-emde Zahl verstehen. Dann ist:

$$\bar{x} - a_1^{(n)} \geqq \frac{b-a}{q \cdot n}, \qquad c_1^{(n)} - \bar{x} \geqq \frac{b-a}{q \cdot n},$$

so nach (90) für alle zu q teilerfremden, hinlänglich großen n:

$$\text{1)} \qquad |\varphi_{i_n}^{(n)}(\bar{x})| > \frac{1}{q^2 n^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)^{\frac{\varepsilon}{b-a} \cdot n}.$$

ehmen wir sodann an, es werde $< a, b >$ durch $\bar{x}$ in *irrationalem* erhältnisse geteilt:

$$\bar{x} = a + \lambda(b-a) \qquad (0 < \lambda < 1, \ \lambda \text{ irrational}).$$

ir entwickeln λ in einen unendlichen Dualbruch:

$$\lambda = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_\nu}{2^\nu} \qquad (e_\nu = 0, 1).$$

λ irrational ist, muß es unendlich viele Indizes ν geben, so daß:

$$\text{2)} \qquad e_\nu = 0, \qquad e_{\nu+1} = 1.$$

Sei ν ein solcher Index. Wir setzen:

$$n = 2^{\nu-1}. \tag{93}$$

Die oben mit $a_1^{(n)}$ und $c_1^{(n)}$ bezeichneten Punkte sind hier:

$$a_1^{(n)} = a + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{e_\mu}{2^\mu}\cdot(b-a), \qquad c_1^{(n)} = a_1^{(n)} + \frac{b-a}{2^{\nu-1}}.$$

Und da wegen (92):

$$a_1^{(n)} + \frac{b-a}{2^{\nu+1}} < \bar{x} < a_1^{(n)} + \frac{b-a}{2^\nu},$$

so ist, bei Berücksichtigung von (93):

$$\bar{x} - a_1^{(n)} > \frac{b-a}{2^{\nu+1}} = \frac{b-a}{4n}, \qquad c_1^{(n)} - \bar{x} > \frac{b-a}{2^\nu} = \frac{b-a}{2n},$$

so daß wir diesmal aus (90) für unendlich viele n die Ungleichung erhalten:

$$|\varphi_{i_n}^{(n)}(\bar{x})| > \frac{1}{8n^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)^{\frac{\varepsilon n}{b-a}}. \tag{94}$$

Die Ungleichungen (91) und (94) zusammenfassend, können wir sagen:

Ist $\bar{x}$ irgendein von $\frac{a+b}{2}$ verschiedener Punkt aus (a, b), so gibt es eine Zahl $c>1$, sowie zwei Folgen natürlicher Zahlen $\{n_\nu\}$ und $\{j_\nu\}$, so daß:

$$|\varphi_{j_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x})| > c^{n_\nu}. \tag{95}$$

§ 11.

Wir haben nun noch den bisher ausgeschlossenen Fall:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

zu betrachten. Ist n ungerade, so ist dann $\bar{x}$ nicht Punkt von $\mathfrak{M}^{(n)}$. Bezeichnen wir die $2n$ Punkte von $\mathfrak{M}^{(2n-1)}$, von a gegen b gerechnet, mit $x_1^{(2n-1)}, x_2^{(2n-1)}, \ldots, x_{2n}^{(2n-1)}$, so ist $x_n^{(2n-1)}$ der letzte dem Punkte $\bar{x}$ vorausgehende Punkt von $\mathfrak{M}^{(2n-1)}$. Man erhält für den Wert des zu $x_n^{(2n-1)}$ gehörigen Polynoms in $\bar{x}$:

$$\varphi_n^{(2n-1)}(\bar{x}) = \frac{1.3.\ldots 2n-1}{2.4.\ldots 2n}\cdot\frac{3.5.\ldots 2n-1}{2.4.\ldots 2n-2},$$

und mithin nach der Wallisschen Formel:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n^{(2n-1)}(\bar{x}) = \frac{2}{\pi}. \tag{96}$$

rner ist für jede natürliche Zahl $m < n$:

$$\varphi_{n-m}^{(2n-1)}(\bar{x}) = -\frac{2m-1}{2m+1} \cdot \frac{n-m}{n+m} \varphi_{n-(m-1)}^{(2n-1)}(\bar{x}),$$

d somit:

$$\varphi_{n-m}^{(2n-1)}(\bar{x}) = (-1)^m \cdot \frac{1}{2m+1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \varphi_n^{(2n-1)}(\bar{x}).$$

egen (96) haben wir also für jedes feste m:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_{n-m}^{(2n-1)}(\bar{x}) = (-1)^m \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{2}{\pi}. \quad)$$

Nun können wir sofort die Behauptung beweisen:

Für jedes $\bar{x}$ aus (a, b) ist:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sum_{i=1}^{n+1} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| = +\infty. \quad)$$

In der Tat, ist zunächst $\bar{x} \neq \frac{a+b}{2}$, so folgt dies aus (95), da für den der unendlich vielen Indizes n_ν, für die (95) gilt:

$$\sum_{i=1}^{n_\nu+1} |\varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x})| > c^{n_\nu}$$

, wo $c > 1$ ist. Für $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ hingegen folgt die Behauptung aus (97). enn sei A beliebig groß vorgegeben. Es kann dann m_0 so groß gehlt werden, daß:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{m_0} \frac{1}{2m+1} > A.$$

egen (97) ist dann für fast alle n:

$$\sum_{m=0}^{m_0} |\varphi_{n-m}^{(2n-1)}(\bar{x})| > A,$$

d somit erst recht:

$$\sum_{i=1}^{2n} |\varphi_i^{(2n-1)}(\bar{x})| > A,$$

omit (98) bewiesen ist.

Durch Berufung auf die Sätze von § 3 und § 5 ersehen wir nun:

Bedeutet $\mathfrak{M}^{(n)}$ die Menge der $(n+1)$ Punkte, durch die $< a, b >$ n gleiche Teile geteilt wird, so ist für keinen Punkt $\bar{x}$ aus (a, b) das agrangesche Interpolationsverfahren konvergent und auch für keinen eser Punkte von endlicher Empfindlichkeit.

Wir können dies Resultat noch etwas verschärfen durch Berufun auf den Satz von § 8. Aus (95) erkennen wir nämlich sofort, daß in Falle $\bar{x} \neq \frac{a+b}{2}$ auch die durch Ungleichung (74) gegebene notwendig Bedingung dieses Satzes nicht erfüllt ist. Wäre nämlich diese Bedingung erfüllt, so müßte wegen:

$$\varphi_{i_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{i_\nu} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{i_\nu - 1} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x})$$

auch die Ungleichung gelten:

$$\left| \varphi_{i_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}) \right| \leqq 2A,$$

im Widerspruche mit (95). Während also unser zuletzt ausgesprochene Satz nur lehrt, daß es zu jedem $\bar{x}$ von (a, b) eine *stetige* Funktion $f(x$ gibt, derart, daß die durch das genannte Lagrangesche Interpolations verfahren gelieferten Polynome $P^{(n)}(x; f)$ im Punkte $\bar{x}$ nicht gegen $f(x$ konvergieren, sehen wir nun, *daß für* $\bar{x} \neq \frac{a+b}{2}$ *diese Funktion* $f(x$ *auch absolut-stetig (also auch von endlicher Variation) gewählt werden kann*

(Eingegangen am 24. Oktober 1917.)

er beliebigen positiven Konstante $\mathfrak{C}$ liegt, ist für $\Re(x) > \varrho + (\mathfrak{C}\sigma)^{\frac{1}{a}}$ über die reellen positiven t erstreckte Integral

$$y = \int_0^{\infty} w(t)\, e^{-tx}\, dt = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^{\mu}\, Y_{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (Cx^{-a})^{\mu}\, \varphi_{\mu}$$

d für $\Re(x) < -[\bar{\varrho} + (\mathfrak{C}\bar{\sigma})^{\frac{1}{a}}]$ das über die reellen negativen t erstreckte egral

$$y = \int_0^{-\infty} w(t)\, e^{-tx}\, dt = \sum_{\mu=0}^{\infty} C^{\mu}\, \bar{Y}_{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (Cx^{-a})^{\mu}\, \bar{\varphi}_{\mu}$$

e Lösung der Differenzengleichung (D) oder $(\bar{\mathrm{D}})$. In der Nähe von $= \infty$ stellt die Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda\mu}\, x^{-\lambda-\mu a}$$

$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ die Funktion Y_{μ}, für $\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ die Funk- $\bar{Y}_{\mu}$, die Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_{\lambda\mu}}{x^{\lambda}}$$

$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ die Funktion φ_{μ}, für $\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ die Funktion asymptotisch dar.

II. Im Falle $a = \Re(a) \leqq 0$ wird die Differenzengleichung (D) oder durch eine Reihe

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_{\lambda}}{x^{\lambda}}$$

mal befriedigt. Die Integralgleichung (J) oder $(\bar{\mathrm{J}})$ hat eine Lösung $t)$, welche abgesehen von $t = \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ im Endlichen regulär und für $|t| < 2\pi$ die konvergente Entwicklung

$$w(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda}\, \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

äßt. Die Differenzengleichung (D) oder $(\bar{\mathrm{D}})$ wird durch das für $\Re(x) < \varrho$ nvergente, über die reellen positiven t erstreckte Integral

$$y = \int_0^{\infty} w(t)\, e^{-tx}\, dt$$

l durch das über die reellen negativen t erstreckte, für $\Re(x) < -\bar{\varrho}$ nvergente Integral

$$\bar{y} = \int_0^{-\infty} w(t)\, e^{-tx}\, dt$$

befriedigt. Für $\Re(x) > \varrho_0$ gilt die konvergente Fakultätenreihe

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, l_\lambda}{x(x+1)\dots(x+\lambda-1)}$$

und für $\Re(x) < -\varrho_0$ die konvergente Fakultätenreihe

$$\bar{y} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(\lambda-1)!\, \bar{l}_\lambda}{x(x-1)\dots(x-\lambda+1)}.$$

Dabei sind ϱ, $\bar{\varrho}$ und ϱ_0, $\bar{\varrho}_0$ hinreichend große positive Zahlen. In de Nähe von $x = \infty$ stellt die Reihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_\lambda}{x^\lambda}$$

für $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ die Funktion y und für $\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ die Funk tion y asymptotisch dar.

(Eingegangen am 16. Oktober 1917.)

Über das Interpolationsproblem.

Von

Hans Hahn in Bonn.

Das Lagrangesche Interpolationsverfahren ordnet einer Funktion $f(x)$, deren Werte in den k Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ gegeben sind, als Näherungsfunktion das Polynom zu:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\, \varphi_i(x), \tag{1}$$

wo $\varphi_i(x)$ gegeben ist durch:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})\,(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})\,(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}.$$

Wir wollen uns im folgenden allgemein mit Interpolationsverfahren beschäftigen, die der Funktion $f(x)$ eine Näherungsfunktion der Gestalt (1) zuordnen, wo nun die $\varphi_i(x)$ irgendwelche Funktionen bedeuten. Von besonderer Wichtigkeit ist hier die Frage der Konvergenz: lassen wir die Menge $x_1, x_2, \ldots, x_k$ eine ganze Folge von Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$ durchlaufen, deren Vereinigung in einem Intervall[1]) $<a, b>$ dicht liege; unter welchen Umständen können wir behaupten, daß die zugehörigen Näherungsfunktionen $P^{(n)}(x)$ in diesem Intervall gegen $f(x)$ konvergieren? Noch ein zweites Problem ist zu stellen, auf dessen Wichtigkeit von Ch. J. de la Vallée Poussin[2]) und von H. Tietze[3]) aufmerksam gemacht wurde, und das insbesondere dann von praktischer Bedeutung wird, wenn die Werte $f(x_i)$ der zu interpolierenden Funktion nicht exakt gegeben, sondern mit Fehlern behaftet sind: unter welchen Umständen können wir behaupten, daß bei geringfügiger Änderung der Werte von $f(x)$ in den Punkten der Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$ auch die Näherungs-

[1]) Nach dem Vorgange von G. Kowalewski bezeichnen wir ein abgeschlossenes Intervall mit $<a, b>$, ein offenes mit (a, b), ein halboffenes mit $<a, b)$, bzw. $(a, b>$.

[2]) Acad. de Belgique Bull. Classe des Sciences (1908), S. 321.

[3]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 64 (1916), S. 74.

funktionen $P^{(n)}(x)$ nur geringfügige Änderungen erleiden? Diese beiden Fragen lassen sich in sehr befriedigender Weise beantworten. Insbesondere enthält unsere Antwort auch die von C. Runge[4]) und É. Borel[5]) gefundene Tatsache, daß, wenn unter $\mathfrak{M}^{(n)}$ die Menge der $n+1$ Punkte verstanden wird, die das Intervall $<a, b>$ in n gleiche Teile teilen, die durch das Lagrangesche Interpolationsverfahren gelieferten Polynome $P^{(n)}(x)$ nicht für jedes stetige $f(x)$ gegen $f(x)$ konvergieren, und die von de la Vallée Poussin und Tietze hervorgehobene Tatsache, daß bei noch so kleiner Abänderung von $f(x)$ die Änderung dieser Näherungspolynome $P^{(n)}(x)$ über alle Grenzen wachsen kann. Was die im folgenden verwendete Methode anlangt, so sei folgendes bemerkt. Bezeichnen wir die Punkte der Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}$, so können wir die n-te Näherungsfunktion $P^{(n)}(x)$ so schreiben:

$$P^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x).$$

Das zu behandelnde Konvergenzproblem ist also nichts anderes als die Frage nach der Gültigkeit einer Beziehung der Form:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x). \tag{2}$$

Es liegt also eine große Ähnlichkeit mit der in der Theorie der singulären Integrale behandelten Frage nach der Gültigkeit einer Beziehung der Form:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi_n(\xi, x)\, d\xi \tag{3}$$

vor. Demgemäß werden auch die im folgenden benutzten Methoden den Methoden nachgebildet, die sich in der Theorie der singulären Integrale als erfolgreich bewährt haben[6]). In anderer Weise wurde die Theorie der singulären Integrale für das Interpolationsproblem nutzbar gemacht von H. Lebesgue[7]).

---

[4]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46 (1901), S. 229.

[5]) Verh. des 3. Math. Kongr. in Heidelberg, 1905, S. 229; Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905, S. 74.

[6]) H. Lebesgue, Annales de Toulouse (3) 1 (1909), S. 25. — H. Hahn, Wiener Denkschriften 93 (1916), 585—655; 657—692. Es ließen sich wohl noch manche andere Fragestellungen, die in diesen ausführlichen Arbeiten für singuläre Integrale behandelt werden, nun auch für das Interpolationsproblem behandeln. Es möge zunächst dieser Hinweis genügen.

[7]) loc. cit. [6]), S. 108.

Es bedarf wohl kaum des Hinweises daß die beiden Fragestellungen (2) nd (3), auf deren Verwandtschaft wir eben hingewiesen haben, nur ver-chiedene Spezialfälle einer allgemeineren Fragestellung sind, nämlich der rage nach der Gültigkeit einer Beziehung:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(\xi)\, dq_n(\xi, x).$$

och wollen wir auf die Theorie solcher singulärer Stieltjesscher ntegrale für diesmal nicht eingehen.

§ 1.

Sei $<a, b>$ ein Intervall der Veränderlichen x und $\mathfrak{M}$ eine Menge ndlich vieler Punkte dieses Intervalles, etwa:

$$x_1, x_2, \ldots, x_k.$$

Ein Verfahren, das jeder in $<a, b>$ definierten und endlichen unktion $f(x)$ eine in $<a, b>$ definierte und endliche Funktion $(x; f, \mathfrak{M})$ zuordnet, die nur abhängt von den Werten von $f(x)$ in den unkten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ der Menge $\mathfrak{M}$, wollen wir ein *gewöhnliches nterpolationsverfahren* nennen; die Funktion $P(x; f, \mathfrak{M})$ bezeichnen wir ls (zu $\mathfrak{M}$ gehörige) *Näherungsfunktion von* $f(x)$. Ein gewöhnliches nterpolationsverfahren ordnet also zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die allen Punkten von $\mathfrak{M}$ übereinstimmen:

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

ieselbe Näherungsfunktion zu:

$$P(x; f, \mathfrak{M}) = P(x; g, \mathfrak{M}).$$

Mit anderen Worten: setzen wir:

$$f(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

) können wir schreiben:

$$P(x; f, \mathfrak{M}) = F(x; y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Wir wollen das Interpolationsverfahren *stetig* nennen, wenn $P(x; f, \mathfrak{M})$ it jedem der Werte $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)$ sich stetig ändert, d. h. enn für jedes x aus $<a, b>$ die Funktion $F(x; y_1, y_2, \ldots, y_k)$ eine etige Funktion jeder einzelnen der Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ist.

Wir wollen weiter das Interpolationsverfahren *distributiv* nennen, enn für jedes Paar von Funktionen f_1 und f_2:

$$P(x; f_1 + f_2, \mathfrak{M}) = P(x; f_1, \mathfrak{M}) + P(x; f_2, \mathfrak{M}),$$

d. h. wenn Näherungsfunktion einer Summe gleich Summe der Näherungsfunktionen der Summanden ist. Wir setzen zur Abkürzung

$$f_1(x_i) = y_i', \; f_2(x_i) = y_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

dann schreibt sich (5) wegen (4):

$$(6) \quad F(x; y_1' + y_1'', y_2' + y_2'', \ldots, y_k' + y_k'') = F(x; y_1', y_2', \ldots, y_k') + F(x; y_1'', y_2'', \ldots, y_k'').$$

Daraus folgt sofort:

$$(7) \quad F(x; y_1, y_2, \ldots, y_k) = F(x; y_1, 0, \ldots, 0) + F(x; 0, y_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + F(x; 0, \ldots, 0, y_k).$$

Ferner folgt aus (6):

$$F(x; y_1' + y_1'', 0, \ldots, 0) = F(x; y_1', 0, \ldots, 0) + F(x; y_1'', 0, \ldots, 0).$$

Ist also das Interpolationsproblem stetig, so ist $F(x; y_1, 0, \ldots, 0)$ als Funktion von y_1 eine stetige Lösung der Funktionalgleichung:

$$h(y_1' + y_1'') = h(y_1') + h(y_1''),$$

hängt also, nach einem bekannten Satze, linear homogen von y_1 ab. Analoges gilt für $F(x; 0, y_2, 0, \ldots, 0), \ldots, F(x; 0, \ldots, 0, y_k)$, so daß wir haben:

$$F(x; y_1, 0, \ldots, 0) = y_1 \varphi_1(x), \; F(x; 0, y_2, 0, \ldots, 0) = y_2 \varphi_2(x), \ldots,$$
$$F(x; 0, \ldots, 0, y_k) = y_k \varphi_k(x).$$

Durch Einsetzen in (7) erhalten wir also:

$$F(x; y_1, y_2, \ldots, y_k) = y_1 \varphi_1(x) + y_2 \varphi_2(x) + \ldots + y_k \varphi_k(x),$$

und zufolge (4) ist die allgemeinste Form eines stetigen distributiven Interpolationsverfahrens gegeben durch:

$$P(x; f, \mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \varphi_i(x).$$

§ 2.

Sei nun in $< a, b >$ eine Folge endlicher Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gegeben; die Punkte von $\mathfrak{M}^{(n)}$ seien:

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}.$$

Ein stetiges, distributives Interpolationsverfahren ordne der Funktion $f(x)$ die zu $\mathfrak{M}^{(n)}$ gehörige Näherungsfunktion zu:

$$(8) \quad P(x; f, \mathfrak{M}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(x).$$

ir setzen abkürzend:

a) $$P^{(n)}(x; f) = P(x; f, \mathfrak{M}^{(n)}),$$

id fragen nach Bedingungen, unter denen die Beziehung besteht:

) $$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; f) = f(x).$$

ir schränken sogleich die in Betracht zu ziehenden Funktionen $f(x)$ n, indem wir weiterhin nur solche Funktionen $f(x)$ betrachten, die in $a, b >$ *geschränkt* sind und nur *Unstetigkeiten erster Art* besitzen[8]). erner wollen wir das Bestehen von (9) nur an *Stetigkeitsstellen* von $x)$ untersuchen.

Wir führen noch die Ausdrücke ein:

0) $$\sum_{<\alpha,\beta>} \varphi_i^{(n)}(x), \qquad \sum_{(\alpha,\beta)} \varphi_i^{(n)}(x),$$

denen die Summation über alle nach $<\alpha, \beta>$, bzw. (α, β) fallenden unkte $x_i^{(n)}$ von $\mathfrak{M}^{(n)}$ zu erstrecken ist. Fällt kein Punkt von $\mathfrak{M}^{(n)}$ nach $\alpha, \beta>$ bzw. nach (α, β), so ist unter dem betreffenden Ausdrucke (10) er Wert 0 zu verstehen.

Wir erhalten nun sofort eine erste *notwendige* Bedingung, der die $_i^{(n)}(x)$ genügen müssen.

Damit für jede im Punkte $\bar{x}$ von $<a, b>$ stetige, in $<a, b>$ geschränkte und nur von erster Art unstetige Funktion $f(x)$ die Beziehung elte:

1) $$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

t notwendig, daß die Funktion $\varphi_i^{(n)}(x)$ für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende ntervall (α, β) den Bedingungen genügen:

2) $$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha,\beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha,\beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

In der Tat, die Funktion, die in $<\alpha, \beta>$ gleich 1, sonst gleich 0 t, ist, wenn $\bar{x}$ zu (α, β) gehört, stetig in $\bar{x}$, geschränkt und nur von ster Art unstetig in $<a, b>$. Wählen wir sie für $f(x)$, so geht (11) die erste Bedingung (12) über; ebenso erhalten wir die zweite Bedingung (12), wenn wir unter $f(x)$ die Funktion verstehen, die in (α, β) eich 1, sonst gleich 0 ist.

Aus dem Bestehen der Bedingungen (12) können noch einige für

[8]) Die Funktion $f(x)$ hat in $<a, b>$ nur Unstetigkeiten erster Art, wenn sie jedem Punkte von (a, b) einen rechtsseitigen und einen linksseitigen, im Punkte a nen rechtsseitigen, im Punkte b einen linksseitigen Grenzwert besitzt.

das Folgende wichtige Folgerungen gezogen werden. Wir nehmen diese Bedingungen als erfüllt an; dann gilt auch folgendes.

Sei $\xi \neq \bar{x}$ irgendein Punkt von $<a, b>$, der unendlich vielen Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$ angehöre, etwa der Menge $\mathfrak{M}^{(n_\nu)}$ als Punkt $x_{i_\nu}^{(n_\nu)}$. Dann ist:

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi_{i_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}) = 0. \tag{13}$$

In der Tat, sei etwa $\xi < \bar{x}$. (Im Falle $\xi > \bar{x}$ ist der Beweis ganz analog.) Wir wählen ein $\beta > \bar{x}$, das keiner Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ angehört. Wegen (12) ist:

$$\lim_{\nu=\infty} \left\{ \sum_{<\xi, \beta>} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x}) - \sum_{(\xi, \beta)} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x}) \right\} = 0.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{<\xi, \beta>} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x}) - \sum_{(\xi, \beta)} \varphi_i^{(n_\nu)}(\bar{x}) = \varphi_{i_\nu}^{(n_\nu)}(\bar{x}),$$

womit (13) bewiesen ist.

Für jedes den Punkt $\bar{x}$ nicht enthaltende Intervall $<\alpha, \beta>$ gilt

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 0. \tag{14}$$

In der Tat, sei etwa $\alpha < \beta < \bar{x}$. (Im Falle $\bar{x} < \alpha < \beta$ ist der Beweis ganz analog.) Sei $\gamma > \bar{x}$ ein zu keiner Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ gehöriger Punkt. Wegen (12) ist dann:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{<\alpha, \gamma>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) - \sum_{(\beta, \gamma)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right\} = 0.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{<\alpha, \gamma>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) - \sum_{(\beta, \gamma)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}),$$

womit die erste Beziehung (14) bewiesen ist. Ebenso folgt aus:

$$\sum_{(\alpha, \gamma)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) - \sum_{<\beta, \gamma>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x})$$

die zweite Beziehung (14).

Endlich bemerken wir noch, daß die Bedingungen (12) nur dann für alle $\bar{x}$ von (a, b) erfüllt sein können, *wenn die Vereinigung aller $\mathfrak{M}^{(n)}$*

$$\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(n)}, \ldots) \tag{15}$$

in $<a, b>$ dicht ist. Angenommen nämlich, es gäbe ein von Punkten von $\mathfrak{V}$ freies Teilintervall (α, β) von $<a, b>$. Für einen in (α, β) liegenden Punkt $\bar{x}$ haben wir dann:

$$\sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 0 \qquad \text{für alle } n,$$

im Widerspruche mit (12).

§ 3.

Um eine zweite notwendige Bedingung zu erhalten, beweisen wir
n Hilfssatz:

Ist jedem Punkte $x_i^{(n)}$ der Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Zahl $a_i^{(n)}$ zugeordnet, daß die Folge der Zahlen:

5) $$L_n = \sum_{i=1}^{k_n} |a_i^{(n)}| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

cht geschränkt ist, so gibt es eine in $< a, b >$ stetige Funktion $g(x)$, r die die Zahlenfolge:

7) $$A^{(n)}(g) = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} g(x_i^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eichfalls nicht geschränkt ist.

In der Tat, nach Voraussetzung ist:

8) $$\overline{\lim_{n=\infty}} L_n = +\infty.$$

ir bezeichnen mit $g_n(x)$ eine in $< a, b >$ stetige und der Ungleichung:

9) $$|g_n(x)| \leqq 1$$

nügende Funktion, die in jedem der Punkte $x_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ den ert 1 oder -1 hat, je nachdem:

$$a_i^{(n)} \geqq 0 \quad \text{oder} \quad < 0.$$

nn ist, wenn wir von der Schreibweise (17) und (16) Gebrauch machen:

0) $$A^{(n)}(g_n) = L_n,$$

d somit wegen (18):

1) $$\overline{\lim_{n=\infty}} A^{(n)}(g_n) = +\infty.$$

äre nun für eine dieser Funktionen $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_\nu(x), \ldots$ die hlenfolge $A^{(n)}(g_\nu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht geschränkt, so wäre die Beuptung bereits bewiesen. Wir nehmen also an, es gebe zu jeder dieser nktionen $g_\nu(x)$ eine Konstante γ_ν, so daß:

2) $$|A^{(n)}(g_\nu)| < \gamma_\nu \text{ für alle } n.$$

r greifen nun aus der Folge der Indizes $1, 2, \ldots, n, \ldots$, mit $n_1 = 1$ ginnend, eine Teilfolge $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ heraus nach folgender Regel:

Ist n_i gefunden und bezeichnet Γ_i eine [nach (22) sicher vorhandene] hl, so daß:

) $$\left| A^{(n)}\left(g_{n_1} + \frac{1}{2 L_{n_1}} g_{n_2} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}} g_{n_i}\right)\right| < \Gamma_i \text{ für alle } n,$$

so werde $n_{i+1}(>n_i)$ so gewählt, daß:

$$A^{(n_{i+1})}(g_{n_{i+1}}) > (\Gamma_i + i + 1)\, 2^i A^{(n_i)}(g_{n_i}). \tag{24}$$

Wegen (21) ist das sicher möglich. Beachtet man (20), so hat man die Ungleichung:

$$L_{n_{i+1}} > L_{n_i}. \tag{25}$$

Wir setzen nun:

$$g(x) = g_{n_1}(x) + \frac{1}{2L_{n_1}} g_{n_2}(x) + \ldots + \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}} g_{n_i}(x) + \ldots \tag{26}$$

Diese unendliche Reihe ist, wie aus (19) und (25) folgt, gleichmäßig konvergent in $<a, b>$, stellt also eine in $<a, b>$ *stetige* Funktion dar.

Nach (17) ist nun:

$$A^{(n)}(g) = A^{(n)}(g_{n_1}) + \frac{1}{2L_{n_1}} A^{(n)}(g_{n_2}) + \ldots + \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}} A^{(n)}(g_{n_i}) + \ldots,$$

und somit:

$$A^{(n_i)}(g) \geqq \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}} A^{(n_i)}(g_{n_i}) - \left| A^{(n_i)}\left(g_{n_1} + \frac{1}{2L_{n_1}} g_{n_2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-2} L_{n_{i-2}}} g_{n_{i-1}}\right)\right| - \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1} L_{n_{j-1}}} |A^{(n_i)}(g_{n_j})|. \tag{27}$$

Hierin ist wegen (24) und (20):

$$\frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}} A^{(n_i)}(g_{n_i}) > \Gamma_{i-1} + i, \tag{28}$$

und wegen (23):

$$\left| A^{(n_i)}\left(g_{n_1} + \frac{1}{2L_{n_1}} g_{n_2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-2} L_{n_{i-2}}} g_{n_{i-1}}\right)\right| < \Gamma_{i-1}. \tag{29}$$

Ferner ist wegen (19) und (16):

$$|A^{(n_i)}(g_{n_j})| \leqq L_{n_i},$$

also bei Berücksichtigung von (25):

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1} L_{n_{j-1}}} |A^{(n_i)}(g_{n_j})| < \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} \leqq 1. \tag{30}$$

Aus (27), (28), (29), (30) aber ergibt sich:

$$A^{(n_i)}(g) > i - 1. \tag{31}$$

Die Folge der $A^{(n)}(g)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist also nicht geschränkt, und unser Hilfssatz ist bewiesen.

Wir können nun sofort eine zweite notwendige Bedingung aufstellen:

Damit für jede in $<a, b>$ stetige Funktion $f(x)$ im Punkte $\bar{x}$ von $<a, b>$ die Beziehung gelte:

2) $$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

notwendig, daß es eine Zahl A gebe, so daß:

3) $$\sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < A \qquad \text{für alle } n.$$

Angenommen in der Tat, es gäbe keine Zahl A, für die (33) gilt. er eben bewiesene Hilfssatz lehrt dann [für $a_i^{(n)} = \varphi_i^{(n)}(\bar{x})$] die Existenz ner in $< a, b >$ stetigen Funktion $g(x)$, für die die Zahlenfolge:

$$\sum_{i=1}^{k_n} \varphi_i^{(n)}(\bar{x})\, g(x_i^{(n)}) = P^{(n)}(\bar{x}; g)$$

cht geschränkt ist; verstehen wir unter f diese Funktion g, so kann so (32) unmöglich erfüllt sein.

§ 4.

Wir kommen nun zum Nachweise, daß die beiden in § 2 und 3 fgestellten notwendigen Bedingungen auch *hinreichend* sind.

Sind im Punkte $\bar{x}$ von $< a, b >$ die Bedingungen (12) *und* (33) *erllt, so gilt für jede im Punkte $\bar{x}$ stetige, in $< a, b >$ geschränkte und r von erster Art unstetige Funktion $f(x)$ die Beziehung:*

4) $$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Da die Funktion $f(x)$ in $< a, b >$ gehränkt ist und nur Unstetigkeiten erster Art besitzt, kann es in $a, b >$ nur endlich viele Punkte geben, in denen ihre Schwankung $(x) \geqq \varepsilon$ ist. Angenommen in der Tat, es gäbe unendlich viele Punkte $(\nu = 1, 2, \ldots)$ von $< a, b >$, in denen:

$$\omega(x_\nu) \geqq \varepsilon.$$

ese Punkte x_ν hätten in $< a, b >$ mindestens einen Häufungspunkt x_0. ıtweder in $(x_0, x_0 + h)$ oder in $(x_0 - h, x_0)$ liegen dann für jedes > 0 unendlich viele x_ν. Im ersten Falle aber kann es in x_0 keinen dlichen rechtsseitigen, im zweiten Falle keinen endlichen linksseitigen enzwert von f geben, entgegen der Annahme, die *geschränkte* Funkn f könne in x_0 nur eine Unstetigkeit *erster Art* haben.

Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varepsilon$ die endlich vielen[9]) Punkte von $< a, b >$, denen:

$$\omega(x) \geqq \varepsilon.$$

[9]) Es kann natürlich auch $\varepsilon = 0$ sein.

Zu jedem von den $\xi_i\,(i=1, 2, \ldots, e)$ verschiedenen Punkt x' gibt es nun ein Intervall $(x'-h_{x'}, x'+h_{x'})$, in dem für alle zu $<a, b>$ gehörigen x:

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

In jedem Punkte ξ_i aber gibt es nach Voraussetzung endliche einseitige Grenzwerte von $f(x)$, die wir mit $f(\xi_i+0)$ und $f(\xi_i-0)$ bezeichnen[10]; es gibt daher zu jedem dieser Punkte ξ_i ein $h_i>0$, so daß für alle nach (ξ_i, ξ_i+h_i) fallenden Punkte von $<a, b>$:

$$|f(x)-f(\xi_i+0)|<\varepsilon,$$

und für alle nach (ξ_i-h_i, ξ_i) fallenden Punkte von $<a, b>$:

$$|f(x)-f(\xi_i-0)|<\varepsilon.$$

Nach dem bekannten Borelschen Theorem gibt es nun unter den Intervallen $(x'-h_{x'}, x'+h_{x'})$ und (ξ_i-h_i, ξ_i+h_i) *endlich viele*, in deren Vereinigung das ganze Intervall $<a, b>$ enthalten ist. Es gibt daher unter den Intervallen $(x'-h_{x'}, x'+h_{x'})$, (ξ_i, ξ_i+h_i), (ξ_i-h_i, ξ_i) endlich viele, in deren Vereinigung ganz $<a, b>$, mit Ausnahme höchstens der Punkte ξ_i $(i=1, 2, \ldots, e)$ enthalten ist. Zufolge der Definition dieser Intervalle gibt es nun aber zu jedem von ihnen eine Konstante, von der sich $f(x)$ in dem ganzen betreffenden Intervalle um weniger als ε unterscheidet. Wir schließen daraus:

Es gibt in $<a, b>$ endlich viele Punkte:

$$a=a_0<a_1<\ldots<a_{m-1}<a_m=b, \tag{35}$$

und eine in jedem Intervalle (a_{j-1}, a_j) $(j=1, 2, \ldots m)$ konstante Funktion $f^*(x)$, die in ganz $<a, b>$ der Ungleichung genügt:

$$|f^*(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{36}$$

Dabei können wir noch ohne weiteres annehmen, es sei:

$$a_j \neq \bar{x} \qquad (j=1, 2, \ldots, m-1). \tag{37}$$

Denn wäre $\bar{x}=a_j\,(1\leqq j\leqq m-1)$, so ersetze man a_j durch einen Punkt a_j' von (a_j, a_{j+1}), und ersetze $f^*(x)$ durch diejenige Funktion $f^{**}(x)$, die überall gleich $f^*(x)$ ist, nur daß sie den konstanten Wert, den $f^*(x)$ in (a_{j-1}, a_j) hat, in ganz (a_{j-1}, a_j') beibehält. Ist c dieser konstante Wert, so ist nach (36) in (a_{j-1}, a_j):

$$|f(x)-c|<\varepsilon,$$

[10]) Ist ξ_i einer der Punkte a, b, so kommt nur einer dieser beiden Grenzwerte in Betracht.

er im Punkte $\bar{x} = a_j$, weil $\bar{x}$ als Stetigkeitspunkt von $f(x)$ voraus-etzt war:

$$|f(a_j) - c| \leqq \varepsilon,$$

er, wenn a_j' hinlänglich nahe an a_j gewählt wird, in (a_j, a_j'):

$$|f(x) - c| < 2\varepsilon,$$

daß $f^{**}(x)$ in ganz $< a, b >$ der Ungleichung genügt:

$$|f^{**}(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ beliebig war, sehen wir, daß die Einteilung (35) und die Funk-n $f^*(x)$ ersetzt werden können durch die Einteilung $a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}$, $a_{j+1}, \ldots, a_m$ und die Funktion $f^{**}(x)$. Wir können also von vorn-ein (37) als erfüllt annehmen.

Sei nun $\bar{x}$ zunächst ein Punkt von (a, b): er liegt dann notwendig einem der Intervalle (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, 2, \ldots, m)$, etwa in (a_{j_0-1}, a_{j_0}). ch (12) ist dann:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(a_{j_0-1}, a_{j_0})} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1,$$

l, da in (a_{j_0-1}, a_{j_0}) die Funktion $f^*(x)$ konstant ist, auch:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(a_{j_0-1}, a_{j_0})} f^*(x_i'^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = f^*(\bar{x}).$$

r $j \neq j_0$ erhalten wir ebenso aus (14):

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(a_{j-1}, a_j)} f^*(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 0.$$

nden wir endlich noch auf jeden der Punkte $a_0, a_1, \ldots, a_m$ die Be-hung (13) an, so erhalten wir:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<a, b>} f^*(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = f^*(\bar{x}),$$

r, was dasselbe heißt:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f^*) = f^*(\bar{x}).$$

Die hierdurch für den Fall, daß $\bar{x}$ Punkt von (a, b) ist, bewiesene mel (39) gilt ebenso, wenn $\bar{x}$ einer der Punkte a, b ist; sei etwa: $= a$. Aus Gleichung (12) haben wir dann (indem wir in ihr $a < a_0$, $= a_1$ wählen):

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<a_0, a_1>} f^*(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = f^*(\bar{x}),$$

hrend für jedes Intervall (a_{j-1}, a_j) $(1 < j \leqq m)$ Formel (38) gilt. nden wir noch auf jeden der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ Beziehung (13) an.

so erhalten wir auch in diesem Falle Formel (39), die somit allgemein bewiesen ist.

Wegen (33) und (36) ist nun aber weiter:

$$|P^{(n)}(\bar{x}; f^*) - P^{(n)}(\bar{x}; f)| < \varepsilon A \qquad \text{für alle } n. \tag{40}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} |P^{(n)}(\bar{x}; f) - f(\bar{x})| \leqq & |P^{(n)}(\bar{x}; f) - P^{(n)}(\bar{x}; f^*)| \\ & + |P^{(n)}(\bar{x}, f^*) - f^*(\bar{x})| + |f^*(\bar{x}) - f(\bar{x})|. \end{aligned} \tag{41}$$

Wegen (39) ist hierin:

$$|P^{(n)}(\bar{x}; f^*) - f^*(\bar{x})| < \varepsilon \qquad \text{für fast alle } n. \tag{42}$$

Zusammen mit (40), (42), (36) aber ergibt (41):

$$|P^{(n)}(\bar{x}; f) - f(\bar{x})| < (A+2)\varepsilon \qquad \text{für fast alle } n.$$

Und da hierin $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist (34) bewiesen.

Zusammenfassend können wir den Satz aussprechen:

Damit für jede im Punkte $\bar{x}$ von $<a, b>$ stetige, in $<a, b>$ geschränkte und nur von erster Art unstetige Funktion $f(x)$ die Beziehung gelte:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

ist notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt seien

1. *Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) ist:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1. \tag{43}$$

2. *Es gibt eine Zahl A, so daß:*

$$\sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < A \qquad \text{für alle } n. \tag{44}$$

Wir werden demgemäß weiterhin ein diesen beiden Bedingungen genügendes, stetiges, distributives Interpolationsverfahren *konvergent im Punkte $\bar{x}$* nennen.

§ 5.

Es habe nun das durch die Formel:

$$P^{(n)}(x; f) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x) \tag{45}$$

gegebene stetige, distributive Interpolationsverfahren folgende Eigenschaft: es gebe eine Zahl B, so daß für je zwei in $<a, b>$ der Ungleichung

$$|f^*(x) - f(x)| \leqq \varrho \tag{46}$$

nügende Funktionen die Ungleichung bestehe:

$$|P^{(n)}(\bar{x}; f^*) - P^{(n)}(\bar{x}; f)| \leqq B\varrho \qquad \text{für alle } n.$$

r wollen dann sagen, das Interpolationsverfahren habe an der Stelle $\bar{x}$ *dliche Empfindlichkeit.* Wir erkennen nun, daß für endliche Empfindkeit an der Stelle $\bar{x}$ das Bestehen unserer obigen Bedingung 2. notndig und hinreichend ist:

Damit das stetige, distributive Interpolationsverfahren (45) *im Punkte* $\bar{x}$ $< a, b >$ *endliche Empfindlichkeit habe, ist notwendig und hinchend die Existenz einer Zahl* A, *so daß:*

$$\sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < A \qquad \text{für alle } n.$$

Die Bedingung ist *notwendig*[11]). Angenommen in der Tat, sie sei ht erfüllt. Der Hilfssatz von § 3 lehrt dann die Existenz einer $< a, b >$ stetigen Funktion $g(x)$, für die:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} P^{(n)}(\bar{x}; g) = +\infty.$$

ϱ die obere Schranke von $|g(x)|$ in $< a, b >$, $f(x)$ eine beliebige wa in $< a, b >$ stetige) Funktion, und setzen wir:

$$f^*(x) = f(x) + g(x),$$

ist (46) erfüllt, und wegen:

$$P^{(n)}(x; f^*) - P^{(n)}(x; f) = P^{(n)}(x; g)$$

n zufolge (49) Ungleichung (47) für kein B erfüllt sein.

Die Bedingung ist *hinreichend;* denn ist (48) erfüllt, so ist für jedes Ungleichung (46) genügende Funktionenpaar:

$$|P^{(n)}(\bar{x}; f^*) - P^{(n)}(\bar{x}; f)| < A \cdot \varrho.$$

mit ist auch der Satz bewiesen:

Jedes an der Stelle $\bar{x}$ *konvergente, stetige, distributive Interpolationsfahren, ist an der Stelle* $\bar{x}$ *auch von endlicher Empfindlichkeit.*

Die Eigenschaft der endlichen Empfindlichkeit kann noch etwas ers formuliert werden. Die oben gegebene Definition der endlichen pfindlichkeit an der Stelle $\bar{x}$ ist völlig äquivalent der folgenden: *jeder Funktion* $f(x)$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\eta > 0$, *so daß für* x *in* $< a, b >$ *der Ungleichung:*

---

[11]) Sie ist, wie der folgende Beweis zeigt, sogar notwendig dafür, daß für alle Ungleichung (46) genügenden Paare *stetiger* Funktionen eine Ungleichung der n (47) erfüllt sei.

(50) $$|f^*(x) - f(x)| < \eta$$

genügende Funktion $f^*(x)$ die Ungleichung gilt:

(51) $$|P^{(n)}(\bar{x}; f^*) - P^{(n)}(\bar{x}; f)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n.$$

Sei in der Tat das Interpolationsverfahren von endlicher Empfindlichkeit an der Stelle $\bar{x}$, d. h. für jedes der Ungleichung (46) genügende Funktionenpaar bestehe die Ungleichung (47). Es wird also, bei gegebenem $f(x)$, für jedes der Ungleichung (50) genügende $f^*(x)$ die Ungleichung (51) bestehen, wenn wir wählen:

$$\eta < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Ist hingegen das Interpolationsverfahren nicht von endlicher Empfindlichkeit, so ist für kein A Ungleichung (48) erfüllt, und es gibt daher eine in $< a, b >$ stetige Funktion $g(x)$, für die (49) gilt. Ist:

$$|g(x)| < \gamma$$

in $< a, b >$, so genügt für jedes $\eta > 0$ die Funktion

$$f^*(x) = f(x) + \frac{\eta}{\gamma} g(x)$$

der Ungleichung (50), aber gewiß nicht der Ungleichung (51). Es kann also nicht zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gehören, so daß (50) und (51) gelten.

§ 6.

Wir wenden uns nun Fragen *gleichmäßiger Konvergenz* zu. Hier haben wir zunächst den Satz:

Damit für jede in $< a, b >$ stetige Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; f) = f(x)$$

gleichmäßig gelte im Teilintervalle $< a', b' >$ von $< a, b >$, ist notwendig daß es eine Zahl A gebe, so daß:

$$\sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}(x)| < A \quad \text{für fast alle } n \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >$$

Angenommen in der Tat, diese Bedingung wäre nicht erfüllt. Dann gibt es eine Folge von wachsenden Indizes $\{n_\nu\}$ und von Punkten $\{x_\nu\}$ aus $a', b' >$, so daß:

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{i=1}^{k_{n_\nu}} |\varphi_i^{(n_\nu)}(x_\nu)| = +\infty.$$

Der Hilfssatz von § 3 lehrt [für $a_i^{(\nu)} = \varphi_i^{(n_\nu)}(x_\nu)$] die Existenz einer $< a, b >$ stetigen Funktion $g(x)$, für die die Folge $P^{(n_\nu)}(x_\nu; g)$ nicht schränkt ist, und für die daher unmöglich die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; g) = g(x)$$

eichmäßig in $< a', b' >$ gelten kann.

Wir stellen nun *hinreichende* Bedingungen für gleichmäßige Konergenz auf.

Es genüge das stetige distributive Interpolationsverfahren:

$$P^{(n)}(x; f) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x)$$

lgenden Bedingungen:

1. *Bezeichnet $\psi_i^{(n)}(x, h)$ den Wert 0 oder den Wert $\varphi_i^{(n)}(x)$, je nachm $x_i^{(n)}$ ins Intervall $(x - h, x + h)$ fällt oder nicht, so gelten für jedes > 0 und jedes Intervall $< \alpha, \beta >$ die beiden Beziehungen:*

2) $$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha,\beta>} \psi_i^{(n)}(x; h) = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha,\beta)} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0$$

eichmäßig in $< a', b' >$.

2. *Für jedes $h > 0$ gilt die Beziehung:*

3) $$\lim_{n=\infty} \sum_{(x-h,\, x+h)} \varphi_i^{(n)}(x) = 1$$

eichmäßig in $< a', b' >$.

3. *Es gibt eine Zahl A, so daß:*

4) $$\sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}(x)| < A \qquad \text{für fast alle } n \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >.$$

Dann gilt für jede in $< a, b >$ geschränkte, und nur von erster Art stetige Funktion $f(x)$, die in allen Punkten von $< a', b' >$ stetig ist[12]*), e Beziehung:*

5) $$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; f) = f(x)$$

eichmäßig in $< a', b' >$.

In der Tat, für jedes $h > 0$ ist:

6) $$P^{(n)}(x; f) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x, h) + \sum_{(x-h,\, x+h)} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x).$$

i nun $f(x)$ stetig in jedem Punkte von $< a', b' >$, und sei $\varepsilon > 0$ beliebig

[12]) Es muß, wenn $a \neq a'$ ist, volle Stetigkeit (nicht nur rechtsseitige Stetigkeit) n $f(x)$ in a' vorausgesetzt werden, und Analoges gilt für b'.

gegeben. Bekanntlich gibt es dann ein $h > 0$, so daß für alle x' aus $< a', b' >$ und alle (zu $< a, b >$ gehörigen) x aus $(x' - h, x' + h)$:

$$| f(x) - f(x') | < \varepsilon .$$

Wegen (54) ist dann:

$$(57) \qquad \Big| \sum_{(x'-h,\, x'+h)} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x') - \sum_{(x'-h,\, x'+h)} f(x')\, \varphi_i^{(n)}(x') \Big| < \varepsilon A$$

für fast alle n und alle x' aus $< a', b' >$.

Bezeichnen wir mit F die obere Schranke von $f(x)$ in $< a', b' >$, so ist weiter, wegen des gleichmäßigen Bestehens von (53) in $< a', b' >$:

$$(58) \qquad \Big| f(x') \sum_{(x'-h,\, x'+h)} \varphi_i^{(n)}(x') - f(x') \Big| < \varepsilon F$$

für fast alle n und alle x' aus $< a', b' >$.

Ferner gibt es, wie wir in § 4 ausführlich begründet haben, in $< a, b >$ endlich viele Punkte:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b ,$$

und eine in jedem Intervalle (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, 2, \ldots, m)$ konstante Funktion $f^*(x)$, die in ganz $< a, b >$ der Ungleichung genügt:

$$| f^*(x) - f(x) | < \varepsilon .$$

Aus (54) folgt sofort:

$$(59) \qquad \Big| \sum_{i=1}^{k_n} f^*(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x'; h) - \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x'; h) \Big| < \varepsilon A$$

für fast alle n und alle x' aus $< a', b' >$.

Da in jedem Intervalle (a_{j-1}, a_j) $(j = 1, 2, \ldots, m)$ $f^*(x)$ konstant ist, entnehmen wir aus (52) das gleichmäßige Bestehen von:

$$(60) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(a_{j-1},\, a_j)} f^*(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x', h) = 0$$

für alle x' von $< a', b' >$.

Gehört der Punkt a_j zu unendlich vielen Mengen $\mathfrak{M}^{(n)}$, etwa zur Menge $\mathfrak{M}^{(n_\nu)}$ als Punkt $x_{i_\nu}^{(n_\nu)}$, so ist, wenn $\alpha < a$ gewählt wird:

$$\psi_{i_\nu}^{(n_\nu)}(x; h) = \sum_{< \alpha,\, a_j >} \psi_i^{(n_\nu)}(x; h) - \sum_{(\alpha,\, a_j)} \psi_i^{(n_\nu)}(x; h) .$$

Wegen (52) gilt daher die Beziehung:

$$(61) \qquad \lim_{\nu=\infty} \psi_{i_\nu}^{(n_\nu)}(x; h) = 0$$

gleichmäßig in $< a', b' >$. Aus (60) und (61) aber folgern wir: Es gilt die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f^*(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x,h) = 0$$

eichmäßig in $< a', b' >$. Mit anderen Worten, es ist:

2) $$\Big| \sum_{i=1}^{k_n} f^*(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x',h) \Big| < \varepsilon$$

für fast alle n und alle x' von $< a', b' >$.

hreiben wir nun auf Grund von (56):

$$P^{(n)}(x;f) - f(x) = \sum_{i=1}^{k_n} f^*(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x,h)$$

$$+ \Big\{ \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x,h) - \sum_{i=1}^{k_n} f^*(x_i^{(n)})\, \psi_i^{(n)}(x,h) \Big\}$$

$$+ \Big\{ \sum_{(x-h,\, x+h)} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x) - \sum_{(x-h,\, x+h)} f(x)\, \varphi_i^{(n)}(x) \Big\}$$

$$+ \Big\{ f(x) \sum_{(x-h,\, x+h)} \varphi_i^{(n)}(x) - f(x) \Big\},$$

ergeben die Ungleichungen (62), (59), (57), (58):

$$| P^{(n)}(x';f) - f(x') | < (2A + F + 1)\, \varepsilon$$

fast alle n und alle x' von $< a', b' >$, und da hierin $\varepsilon > 0$ beliebig r, ist hierdurch das gleichmäßige Bestehen von (55) in $< a', b' >$ chgewiesen.

Wir werden weiterhin ein stetiges distributives Interpolationsverren, für das die Beziehung (55) gleichmäßig in $< a', b' >$ gilt, für le in allen Punkten von $< a', b' >$ stetige, in $< a, b >$ geschränkte d von erster Art unstetige Funktion $f(x)$, als ein *in* $< a', b' >$ *gleichßig konvergentes* Interpolationsverfahren bezeichnen.

§ 7.

Wir sagen, es sei ein stetiges, distributives Interpolationsverfahren *geschränkter Empfindlichkeit in* $< a', b' >$, wenn es eine Zahl B t, so daß für je zwei in $< a, b >$ der Ungleichung:

) $$| f^*(x) - f(x) | \leqq \varrho$$

nügende Funktionen, in ganz $< a', b' >$ die Ungleichung besteht:

) $$| P^{(n)}(x; f^*) - P^{(n)}(x; f) | \leqq B\varrho \quad \text{für fast alle } n.$$

nn erkennen wir, daß für geschränkte Empfindlichkeit in $< a', b' >$

notwendig und hinreichend ist das Bestehen von Bedingung 3. des Satzes in § 6.

Damit ein stetiges, distributives Interpolationsverfahren geschränkte Empfindlichkeit habe im Teilintervalle $< a', b' >$ von $< a, b >$, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl A, so daß:

$$\sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}(x)| < A \qquad \text{für fast alle } n \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >. \tag{65}$$

Die Bedingung ist notwendig. In der Tat, wir haben schon in § 6 gesehen: Gibt es kein A, für das (65) erfüllt wäre, so gibt es eine Punktfolge $\{x_\nu\}$ aus $< a', b' >$, eine wachsende Indizesfolge $\{n_\nu\}$ und eine in $< a, b >$ stetige Funktion $g(x)$, so daß die Zahlenfolge:

$$P^{(n_\nu)}(x_\nu; g) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

nicht geschränkt ist. Sei γ die obere Schranke von $|g(x)|$ in $< a, b >$. Ist nun $f(x)$ irgendeine (etwa in $< a, b >$ stetige) Funktion und setzen wir:

$$f^*(x) = f(x) + \frac{\varrho}{\gamma} g(x),$$

so ist (63) erfüllt, während wegen:

$$P^{(n)}(x; f^*) - P^{(n)}(x; f) = \frac{\varrho}{\gamma} P^{(n)}(x; g)$$

Ungleichung (64) für kein B erfüllt sein kann.

Die Bedingung ist *hinreichend*; denn ist sie erfüllt, so folgt aus (63), daß in ganz $< a', b' >$ die Ungleichung gilt:

$$|P^{(n)}(x; f^*) - P^{(n)}(x; f)| = |P^{(n)}(x; f^* - f)| < A\varrho \qquad \text{für fast alle } n.$$

Da die durch Ungleichung (65) ausgedrückte Bedingung, wie wir in § 6 sahen, notwendig dafür ist, daß das Interpolationsverfahren in $< a', b' >$ gleichmäßig konvergent sei, können wir den Satz aussprechen:

Jedes stetige, distributive, im Teilintervalle $< a', b' >$ von $< a, b >$ gleichmäßig konvergente Interpolationsverfahren ist in $< a', b' >$ auch von geschränkter Empfindlichkeit.

§ 8.

Wir beweisen nun folgende Verschärfung des Hilfssatzes von § 3, wobei wir festsetzen wollen, die Werte $x_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ seien der Größe nach geordnet:

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)}.$$

Ist jedem Punkte $x_i^{(n)}$ der Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Zahl $a_i^{(n)}$ so zugeordnet, daß die Menge der Zahlen:

Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome.

Von

Georg Pólya in Zürich.

§ 1.

Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Funktion mit ganzen rationalen effizienten, n eine Zahl der Folge 0, 1, 2, 3, ... und P_n der größte mfaktor der Zahl $f(n)$. Ein längst bekannter, elementarer Satz[1]) der lentheorie läßt sich auf folgende Form bringen: für jede nicht-nstante ganze rationale Funktion $f(x)$ ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} P_n = \infty. \tag{1}$$

Herr Störmer[2]) hat (1) für drei spezielle Funktionen $f(x)$, näm- für

$$x(x+1), \qquad x(x+2), \qquad x^2+1$$

eutend verschärft, indem er es durch

$$\lim_{n=\infty} P_n = \infty$$

tzen konnte.

Herr Thue[3]) hat mit Hilfe seines bekannten, wichtigen Satzes r Diophantische Gleichungen das Resultat von Herrn Störmer, in-

[1]) Dies kommt bei dem bekannten elementaren Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Progressionen mit dem Anfangsgliede $+1$ Vgl. etwa J. Schur, Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen iellen arithmetischen Progressionen. Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellft, 11. Jahrg. (1912), S. 40 bis 50.

[2]) Carl Störmer, Sur une équation indéterminée, C. R. 127 (1898), S. 752 754.

[3]) Axel Thue, I. Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer len. Skrifter af Videnskabs-Selskabet i Christiania 1908, Nr. 3. — II. Om en ral i store hele tal ulösbar ligning, ebendaselbst, Nr. 7. — III. Über Annäheswerte algebraischer Zahlen. Journ. für Mathematik 135 (1909), S. 284 bis 305.

soweit es die beiden ersten Polynome (2) betrifft, weitgehend verallgemeinert. Sein Resultat läßt sich so aussprechen:

Satz I. *Ist $f(x)$ das Produkt zweier wesentlich verschiedenen d. h. nicht nur um eine multiplikative Konstante verschiedenen rationalen Linearfaktoren, so gilt* (3).

Ist $f(x)$ das Produkt zweier nur unwesentlich verschiedenen Linearfaktoren, oder hat es allgemeiner die Form

$$c(ax+b)^m, \tag{4}$$

so ist (3) offenbar ungültig. [Den Fall $b=0$ beiseite gelassen, kann

$$(a,b)=1, \qquad a \geqq 1, \qquad b>a$$

vorausgesetzt werden. Setzt man

$$n=\frac{b}{a}(b^{\varphi(a)\nu}-1),$$

wo $\nu=1,2,3,\ldots$, so wird P_n die größte in bc aufgehende Primzahl sein, also für unendlich viele n denselben Wert behalten.]

Welche Polynome sind es, für die (3), und welche sind es, für die nur (1) gültig ist? Ich will nicht auf naheliegende Vermutungen eingehen, ich begnüge mich heute damit, zu der aufgeworfenen Frage mit dem Beweise folgenden Satzes beizutragen:

Satz II. *Ist $f(x)$ ein irreduzibles Polynom vom zweiten Grade, so gilt* (3).

Satz II enthält das Resultat von Herrn Störmer über das letzte der Polynome (2).

§ 2.

Man verdankt Herrn Thue[4]) den folgenden wichtigen Satz:

„Es sei $F(x,y)$ eine irreduzible homogene binäre Form vom dritten oder höheren Grade mit ganzen rationalen Koeffizienten. Dann hat die Diophantische Gleichung

$$F(x,y)=c \tag{5}$$

nur endlich viele verschiedene ganzzahlige Lösungen."

Demselben Satze hat Herr Thue[5]) noch die folgende Fassung gegeben:

„Ist $c \gtrless 0$ und hat die Diophantische Gleichung (5) unendlich viele ganzzahlige Lösungen, so muß die binäre Form $F(x,y)$ Potenz einer

[4]) Vgl. loc. cit. [3]) III, Theorem IV, S. 303.
[5]) Vgl. loc. cit. [3]) II, S. 3.

earform oder einer indefiniten quadratischen Form sein, oder sie erscheidet sich nur um eine multiplikative Konstante von einer hen Potenz.“

Diese zweite Fassung ist leicht aus der ersten herzuleiten. —

Der Beweis des Satzes I erfolgt nun so[6]): die beiden linearen Funkhen $ax+b$ und $cx+d$ seien wesentlich verschieden, d. h. es sei

$$\frac{b}{a} \gtrless \frac{d}{c}.$$

Man bezeichne mit P_n den größten Primfaktor der beiden Zahlen $+b$ und $cn+d$. Wäre (3) falsch, so könnte man gewisse endlich e Primzahlen

$$p_1, p_2, \dots p_l$$

unendlich viele Werte n finden, für welche $(an+b)(cn+d)$ durch he von den Primzahlen (7) verschiedene Primzahl teilbar wäre. Für ie n wäre

$$an+b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_l^{a_l}, \qquad cn+d = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_l^{c_l}.$$

reduziere $a_1, \dots a_l, c_1, \dots c_l$ mod. 3. Aus (8) folgt dann

$$an+b = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_l^{r_l} x^3, \qquad cn+d = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_l^{s_l} y^3$$

$$(r_1, \dots r_l, s_1, \dots s_l = 0, 1 \text{ oder } 2),$$

für das Zahlensystem $r_1, \dots r_l, s_1, \dots s_l$ nur endlich viele [nämlich 3^{2l}] Möglichkeiten bestehen.

Jedes n der fraglichen Art liefert uns eine Lösung x, y einer Diophantischen Gleichung von der Form

$$a p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_l^{s_l} y^3 - c p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_l^{r_l} x^3 = ad - bc.$$

rechte Seite ist nach (6) von 0 verschieden. Die linke Seite ist t die dritte Potenz einer Linearform von x, y. Die Annahme, daß ndlich viele n der fraglichen Art existieren, führt also auf einen lerspruch mit der zweiten Fassung des Thueschen Satzes, und somit Satz I bewiesen.

Dieses Beweisverfahren von Herrn Thue bedarf nur einiger Modition, um auch den Satz II mit seiner Hilfe zu erhalten.

§ 3.

Wäre der Satz II für das Polynom

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

Vg. loc. cit. [6]) I, Satz 12, S. 30.

falsch, so wäre er auch für das Polynom

$$f^*(x) = x^2 + bx + ac$$

falsch, wegen der Identität

$$af(x) = f^*(ax).$$

Ich kann also von vornherein den höchsten Koeffizienten von $f(x)$ als 1 annehmen, d. h.

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \alpha')$$

setzen, wo α und α' konjugierte *ganze* algebraische Zahlen zweiten Grades bedeuten. Ich will ferner beim Beweise den Fall vor Augen behalten, wo α und α' reell sind. [Dieser Fall ist etwas verwickelter, wegen der unendlich vielen Einheiten im reellen quadratischen Körper.]

Ich habe einen Widerspruch aus der Annahme abzuleiten daß es unendlich viele rationale ganze n gibt, für welche $f(n) = (n-\alpha)(n-\alpha')$ außer den Primzahlen

$$p_1, p_2, \cdots p_r \tag{9}$$

keine andere Primfaktoren hat.

Die Wurzeln α und α' von $f(x)$ sollen im Körper liegen, der durch $\sqrt{D}$ erzeugt ist. Es seien in diesem Körper:

$1, \omega$ eine Basis der ganzen Zahlen,

h die Klassenanzahl,

ε die Grundeinheit,

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_l$ sämtliche Primidealteiler der Primzahlen (9).

Konjugierte Größen werden durch Akzent unterschieden: α und α', β und β', $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ usw.

Ich habe einen Widerspruch aus der Annahme zu folgern, daß für unendlich viele rationale ganze n das Ideal $(n - \alpha)$ eine Zerlegung der Art

$$(n - \alpha) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{p}_l^{a_l}$$

zuläßt. Ich setze

$$(n - \alpha) = \mathfrak{p}_1^{r_1} \mathfrak{p}_2^{r_2} \ldots \mathfrak{p}_l^{r_l} \mathfrak{r}^{3h},$$

wo

$$0 \leqq r_1 < 3h, \quad 0 \leqq r_2 < 3h, \quad \ldots \quad 0 \leqq r_l < 3h.$$

$\mathfrak{r}^{3h}$ ist die dritte Potenz eines gewissen Hauptideals $(x + \omega y)$. Daher ist

$$n - \alpha = \beta (x + \omega y)^3, \tag{10}$$

wo β eine gewisse ganze Zahl des Körpers ist. Für das Ideal (β) bestehen höchstens $3^l h^l$ verschiedene Möglichkeiten, denn dies ist die Anzahl der möglichen Zahlsysteme $r_1, r_2, \ldots r_l$. Ein bestimmtes Ideal (β)

ß in (10) nur durch 6 verschiedene Zahlen vertreten werden, näm-
ı durch die Zahlen

$$\beta,\ \varepsilon\beta,\ \varepsilon^2\beta,\ -\beta,\ -\varepsilon\beta,\ -\varepsilon^2\beta.$$

Kurzum, es genügt zu beweisen, daß für gegebenes β die Gleichung
) nicht unendlich viele verschiedene Auflösungen in rationalen ganzen
ılen n, x, y haben kann. Aus

$$n - \alpha = \beta\,(x + \omega y)^3$$
$$n - \alpha' = \beta'(x + \omega' y)^3$$

gt aber

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\omega' - \omega} = \frac{\beta(x+\omega y)^3 - \beta'(x+\omega' y)^3}{\omega' - \omega} = F(x, y),$$

$F(x, y)$ eine homogene binäre Form dritten Grades mit ganzen ratio-
ıen Koeffizienten bedeutet. $F(x, y)$ ist nicht die dritte Potenz
er Linearform, denn die drei Wurzeln der Gleichung

$$F(z, 1) = 0,$$

h. der Gleichung

$$\left(\frac{z+\omega}{z+\omega'}\right)^3 = \frac{\beta'}{\beta}$$

d alle verschieden. So folgt aus dem Thueschen Satze, daß die
ophantische Gleichung (11) nicht unendlich viele Auflösungen haben
ın, und damit die Richtigkeit unseres Satzes II.

Aus den Thueschen Resultaten über Diophantische Gleichungen
ibt sich noch, daß (3) auch für das Polynom $x^n - 1$ Gültigkeit be-
t, oder allgemeiner für solche Polynome, bei welchen eine gewisse
zahl Koeffizienten, die dem höchsten Gliede folgen, $= 0$ sind[7]). Die
lle Entscheidung der im § 1 aufgeworfenen allgemeineren Frage ist
er wohl aus einer anderen Quelle zu schöpfen.

§ 4.

Ich will noch den Satz I in einer anderen Fassung aussprechen
d daran einige Bemerkungen knüpfen.

Es seien

$$p_1, p_2, \cdots p_r$$

gegebene Primzahlen, $r \geqq 2$. Man erteile in dem Ausdruck

$$p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$$

$x_2, \ldots x_r$ alle mögliche nichtnegative ganzzahlige Wertsysteme. Die

[7]) Vgl. loc. cit. [8]) III, S. 304.

so erhaltenen ganzen Zahlen, nach aufsteigender Größe geordnet, bezeichne man mit

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \tag{13}$$

Satz I ist dann äquivalent mit der Tatsache

$$\lim_{n=\infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty. \tag{14}$$

Denn wäre $\lim_{n=\infty}$. inf. $(a_{n+1} - a_n) = k$, so wäre (3) für das Polynom $x(x+k)$ ungültig. Umgekehrt ist leicht einzusehen, daß Satz I nur für die Polynome $x(x+k)$ bewiesen zu werden braucht.

Nun lassen sich (14) noch folgende Eigenschaften der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zur Seite stellen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \tag{15}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{(\log a_n)^r}{n} = 1 \cdot 2 \ldots r \log p_1 \log p_2 \ldots \log p_r. \tag{16}$$

Diese Eigenschaften tragen zur besseren Auffassung von (14) bei, liegen aber viel weniger tief. Die Gleichung (15) beruht darauf, daß die Linearform

$$x_1 \log p_1 + x_2 \log p_2 + \ldots + x_r \log p_r$$

der ganzzahligen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ nie verschwinden kann (abgesehen von $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$) und folglich beliebig kleine Werte annimmt. Die Formel (16) folgt aus der Abzählung der Gitterpunkte in dem durch die $r+1$ Ungleichungen

$$x_1 \geqq 0, \; x_2 \geqq 0, \ldots x_r \geqq 0, \; x_1 \log p_1 + x_2 \log p_2 + \ldots + x_r \log p_r \leqq \log a_n$$

abgegrenzten, abgeschlossenen, ebenwändigen, r-dimensionalen Bereich.

(Eingegangen am 4. August 1917.)

Über harmonische Funktionen und L-Formen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit des Herrn Fejér[1]) wird er anderem folgender Satz bewiesen:

Satz A. Es sei

$$\tau(\varphi) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\varphi + \mu_1 \sin\varphi + \ldots + \lambda_n \cos n\varphi + \mu_n \sin n\varphi$$

nichtnegatives trigonometrisches Polynom, dann gibt es eine ganze ionale Funktion von z

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n,$$

daß identisch in φ die Gleichung besteht:

$$|\gamma(z)|^2_{z=e^{\varphi i}} = \tau(\varphi).$$

Schon Herr Fejér hat in seiner oben zitierten Arbeit einige Anndungen dieses Satzes gegeben. Herr F. Rieß[2]) hat den Satz auf ein rathéodorysches Problem, und Herr Fekete[3]) auf eine S. Bernsteinsche Fragestellung angewandt.

Im folgenden gebe ich andere Anwendungen des Satzes, die ebenfalls in den Ideenkreis der Fejér- und Carathéodoryschen Fragestellungen gehören.

---

[1]) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome, Journal für Mathematik 146 (1915), S. 53 bis 82 (S. 55—59). Wie Herr Fejér bemerkt, wurde der vollständige Beweis des Satzes zuerst von Herrn F. Rieß erbracht.

[2]) F. Rieß, Über ein Problem des Herrn Carathéodory, Journal für Mathematik 146 (1915), S. 83 bis 87.

[3]) M. Fekete, Über einen Satz des Herrn S. Bernstein, Journal für Mathematik 146 (1915), S. 88 bis 94.

§ 1.

Über L-Formen.

Die Grundlage meiner Untersuchung bildet eine Beziehung zwischen den Polynomen n-ten Grades $\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu z^\nu$, deren reeller Teil auf dem Einheitskreise nirgends negativ wird, und einer gewissen Hermiteschen Form von n Variabeln; sie wird geliefert durch den

Satz I. *Gegeben seien $n+1$ Zahlen*

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \tag{1}$$

a_0 sei reell, die übrigen a_ν beliebig komplex, und $a_{-\nu}$ oder $\bar{a}_\nu$ bezeichne die zu a_ν konjugiert komplexe Zahl. Jedem Polynom höchstens n-ten Grades $f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu z^\nu$, das der Bedingung genügt

$$t_0 = 1, \quad \Re \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} \geqq 0 \text{ für } 0 \leqq \varphi < 2\pi, \tag{2}$$

sei die Zahl

$$A_{f_n} = \Re \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t_\nu = \text{reeller Teil von } \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t_\nu \tag{3}$$

zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Zahlen A_{f_n} ist identisch mit dem Wertevorrat der Hermiteschen Form $H_n(x) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ für $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$.

Vorbemerkung. Setzt man

$$t_\nu = \lambda_\nu - \mu_\nu i,$$

so geht die Bedingung (2) in

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu \cos \nu\varphi + \mu_\nu \sin \nu\varphi) \geqq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi \tag{2'}$$

über, und unser Satz liefert eine Beziehung zwischen den nichtnegativen trigonometrischen Polynomen und der Form $H_n(x)$. Die Variablen x_ν sollen immer der Einschränkung $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$ unterliegen, wofern nichts anderes bemerkt ist.

In $H_n(x)$ hängt der Koeffizient von $x_\nu \bar{x}_\mu$ nur von der Differenz $\mu - \nu$ ab; solche Formen nennt man L-Formen mit Rücksicht auf den

n Herrn Toeplitz entdeckten Zusammenhang, der zwischen diesen rmen und den Laurent-Reihen besteht.

Beim Beweise unseres Satzes spielt der Satz A eine wesentliche lle. Ich zeige zunächst, daß ein beliebiger Wert von $H_n(x)$, etwa $(u) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} u_\nu \bar{u}_\mu$, unter den A_f vorkommt. Zu diesem Zwecke ze ich

$$t_0 = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \bar{u}_\nu, \quad \tfrac{1}{2} t_\nu = u_0 \bar{u}_\nu + u_1 \bar{u}_{\nu+1} + \ldots + u_{n-\nu} \bar{u}_n \ (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

d

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu z^\nu;$$

n behaupte ich 1. daß $F(z)$ der Bedingung (2) genügt, und 2. daß $= H_n(u)$ ist. Offenbar ist $t_0 = 1$ und

$$\Re \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} (t_\nu e^{\nu\varphi i} + \bar{t}_\nu e^{-\nu\varphi i}) = \left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu e^{-\nu\varphi i} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n} \bar{u}_\nu e^{\nu\varphi i} \right),$$

e man durch Ausmultiplizieren mit Rücksicht auf (4) sofort sieht; o ist die Bedingung (2) erfüllt. Ferner ist

$$A_F = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu t_\nu + a_{-\nu} \bar{t}_\nu) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} u_\nu \bar{u}_\mu = H_n(u),$$

s sich wiederum sofort bestätigt, wenn man in die linke Seite für $\bar{t}_\nu$ die Werte aus (4) einsetzt. Damit ist bewiesen, daß $H_n(u)$ in Zahlenmenge (3) vorkommt.

Ich zeige nun, daß auch umgekehrt jedes A_{f_n} im Wertevorrat der rm $H_n(x)$ vorkommt. Es gibt dann nämlich wegen der Bedingung (2) h dem Satz A ein rationales Polynom

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{v}_\nu z^\nu,$$

daß die Beziehung gilt

$$\Re \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} = |G(e^{\varphi i})|^2 = \left(\sum_{\nu=0}^{n} \bar{v}_\nu e^{\nu\varphi i} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n} v_\nu e^{-\nu\varphi i} \right),$$

$$t_0 = \sum_{\nu=0}^{n} v_\nu \bar{v}_\nu = 1, \quad \tfrac{1}{2} t_\nu = v_0 \bar{v}_\nu + v_1 \bar{v}_{\nu+1} + \ldots + v_{n-\nu} \bar{v}_n \ (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

und hieraus folgt wie vorhin

$$A_{f_n} = \Re \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t_\nu = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} v \, \bar{v}_\mu = H_n(v). \tag{9}$$

Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Bemerkung. Die Menge (3) ist identisch mit der scheinbar allgemeineren Menge, die entsteht, wenn ich dem Polynom f_n nicht die Zahl A_{f_n}, sondern das ganze Intervall

$$\Re \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t_\nu e^{\nu\psi i} \qquad 0 \leqq \psi \leqq 2\pi \tag{10}$$

zuordne. Ist nämlich die Bedingung (2) erfüllt und setzt man

$$F_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\psi i} z^\nu,$$

so genügt dieses Polynom ebenfalls der Bedingung (2), und es ist

$$A_{F_n} = \Re \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t_\nu e^{\nu\psi i},$$

wo ψ eine beliebige Zahl ist.

Das trigonometrische Polynom (10) entsteht aus (2) durch Komposition mit der Faktorenfolge (1). Schreiben wir h_ν statt a_ν, so ergibt sich aus Satz I unmittelbar der

Satz II. *Damit aus jedem nichtnegativen trigonometrischen Polynom* $\Re \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i}$ $(t_0 = 1)$ *durch Komposition mit der Faktorenfolge* $h_0, h_1, \ldots, h_n$ *(h_0 reell) wiederum ein nichtnegatives (positives) trigonometrisches Polynom* $\Re \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu t_\nu e^{\nu\varphi i}$ *entsteht, ist notwendig und hinreichend, daß die L-Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} h_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ *nichtnegativ (positiv) definit sei.*

Dieser Satz ist im wesentlichen schon in der oben zitierten Arbeit des Herrn F. Rieß enthalten.

Korollar. Ist (2) erfüllt, so ist bekanntlich auch

$$\Re \sum_{\nu=0}^{n} \varrho^\nu t_\nu e^{\nu\varphi i} > 0, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \qquad 0 < \varrho < 1,$$

also ist nach Satz II die L-Form

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} \varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu, \qquad 0 < \varrho < 1$$

sitiv definit.

Es sei nun $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} h_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ eine nichtnegative L-Form, und $h_0 = 1$.

enn das Polynom $\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu z^\nu$ der Bedingung (2) genügt, so genügt nach

tz II das Polynom $\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu t_\nu z^\nu$ derselben Bedingung. Also kommt die

hlenmenge

$$\Re \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu h_\nu t_\nu$$

der Menge (3), d. h. im Wertevorrat der Form $H_n(x)$ vor. Andererts stimmt nach Satz I die Menge (11) mit dem Wertevorrat der

Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} h_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ überein. Wir erhalten so den

Satz III. *Ist die L-Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} h_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ $(h_0 = 1)$ nichtnegativ, so*

der Wertevorrat der L-Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} h_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ im Wertevorrat der

rm $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ enthalten $\left(\text{für } \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1\right)$.

Korollar. Der Wertevorrat der Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} \varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu$ ist im

rtevorrat der Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ enthalten. (Man vgl. das Korollar Satz II.) Wir werden uns hierauf später beziehen.

Der Satz III ist in einem Satze des Herrn J. Schur enthalten, der einer kleinen Erweiterung so lautet[4]):

Es sei $B = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} b_{\nu\mu} x_\nu \bar{x}_\mu$ eine nichtnegative Hermitesche Form,

ner sei α und α' der größte bzw. kleinste Wert der Hermiteschen

rm $A = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\nu \bar{x}_\mu$, und b bzw. b' die größte bzw. kleinste in der

[4]) J. Schur, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit ndlich vielen Veränderlichen, Journal für Mathematik 140 (1911), S. 1 bis 28 (S. 14).

Folge $b_{11}, b_{22}, \dots b_{nn}$ vorkommende Zahl; dann liegt der Wertevorrat der Form $C = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} b_{\nu\mu} x_\nu \bar{x}_\mu$ im Intervall $(\alpha' b', \alpha b)$. $\left(\text{Es ist } \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1.\right)$

Der einfache Beweis des Satzes sei hier der Vollständigkeit halber mitgeteilt. Da die Form B nichtnegativ ist, so läßt sie sich bekanntlich in der Gestalt darstellen

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{n} b_{\nu\mu} x_\nu \bar{x}_\mu = \sum_{\tau=1}^{n} \Big| \sum_{\mu=1}^{n} l_{\tau\mu} x_\mu \Big|^2 = \sum_{\tau=1}^{n} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} l_{\tau\nu} x_\nu \Big) \Big(\sum_{\mu=1}^{n} \bar{l}_{\tau\mu} \bar{x}_\mu \Big),$$

so daß

$$b_{\nu\mu} = \sum_{\tau=1}^{n} l_{\tau\nu} \bar{l}_{\tau\mu} \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, n).$$

Hieraus folgt

$$C = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \Big(a_{\nu\mu} \sum_{\tau=1}^{n} l_{\tau\nu} \bar{l}_{\tau\mu} x_\nu \bar{x}_\mu \Big) = \sum_{\tau=1}^{n} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} l_{\tau\nu} \bar{l}_{\tau\mu} x_\nu \bar{x}_\mu .$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$\alpha' \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\tau\nu} x_\nu|^2 \leqq \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} (l_{\tau\nu} x_\nu)(\bar{l}_{\tau\mu} \bar{x}_\mu) \leqq \alpha \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\tau\nu} x_\nu|^2,$$

also

$$\alpha' \sum_{\tau,\nu=1}^{n} |l_{\tau\nu} x_\nu|^2 \leqq C \leqq \alpha \sum_{\tau,\nu=1}^{n} |l_{\tau\nu} x_\nu|^2.$$

Da aber

$$\sum_{\tau,\nu=1}^{n} |l_{\tau\nu} x_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \Big(|x_\nu|^2 \sum_{\tau=1}^{n} |l_{\tau\nu}|^2 \Big) = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 b_{\nu\nu} \begin{cases} \leqq b \\ \geqq b', \end{cases}$$

so ist, wie behauptet,

$$\alpha' b' \leqq C \leqq \alpha b .$$

§ 2.

Anwendung auf trigonometrische Polynome.

Bekanntlich hat die Gleichung

$$(12) \qquad D_n(a_0 - \lambda, a_1, \dots, a_n) \equiv \begin{vmatrix} a_0 - \lambda, & a_1, & a_2 & \dots & a_n \\ a_{-1}, & a_0 - \lambda, & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n}, & a_{-n+1}, & a_{-n+2}, & \dots & a_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

nur reelle Wurzeln. Ist ferner ω und Ω die kleinste bzw. größte Wurzel, so füllt der Wertevorrat der Form $H_n(x)$ für $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$, wie leicht zu

rechnen, genau das abgeschlossene Intervall (ω, Ω) aus. Nach Satz I d der anschließenden Bemerkung folgt hieraus sofort der

Satz IV. *Ist*

$$\Re f_n(e^{\varphi i}) \equiv 1 + \Re \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} \geqq 0 \qquad \textit{für alle } \varphi,$$

ist

$$\omega \leqq a_0 + \Re \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu t_\nu e^{\nu\psi i} \leqq \Omega \qquad \textit{für alle } \psi.$$

Hier bedeutet ω bzw. Ω die kleinste bzw. größte Wurzel der Gleichung (12). *es gibt zu jedem ψ-Wert mindestens ein Polynom $f_n(z)$, für das in* (13) *links (rechts) die Gleichheit gilt.*

Nach Satz A werden alle zulässigen Polynome durch die Darellung (8) geliefert; um nun jene Polynome zu finden, für die in (13) ks (rechts) Gleichheit gilt, habe ich offenbar [vgl. (8) und (9)] alle ertesysteme der Variabeln x_ν zu bestimmen, für die $H_n(x)$ sein Minium (Maximum) erreicht. Diese ergeben sich durch Auflösung des earen homogenen Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} (a_0-\lambda)x_0 &+ a_{-1}x_1 + \ldots + a_{-n}x_n = 0,\\ a_1 x_0 &+ (a_0-\lambda)x_1 + \ldots + a_{-n+1}x_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n x_0 &+ a_{n-1}x_1 + \ldots + (a_0-\lambda)x_n = 0 \end{aligned}\right\} (\lambda = \omega, \text{ bzw. } \lambda = \Omega).$$

$u_0, u_1, \ldots, u_n$ eine Lösung $\left(\sum_0^n |u_\nu|^2 = 1\right)$, so liefern die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2} t_\nu e^{\nu\psi i} = u_0\bar{u}_\nu + u_1\bar{u}_{\nu+1} + \ldots + u_{n-\nu}\bar{u}_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

es der gesuchten Polynome.

Kenne ich nun für gewisse a_ν die kleinste (größte) Wurzel der (12), oder Schranken für diese Wurzeln, so gewinne ich mit Hilfe s Satzes IV gewisse Sätze über die Koeffizienten nichtnegativer trinometrischer Polynome. Dies soll im folgenden für einige Fälle ausführt werden.

1. Es sei

$$a_0 = 0, \; a_1 = i, \; \ldots, \; a_n = i,$$

nn ist bekanntlich [5])

$$D_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left[(\lambda+i)^{n+1} + (\lambda-i)^{n+1}\right],$$

[5]) Man vgl. O. Hölder, Über einige Determinanten, Leipziger Berichte 65 (1913), 10 bis 120. Eine Formel, aus welcher sich unsere Gleichung auch ableiten läßt, schon Herr J. Schur, loc. cit. [4]), S. 22.

und die Gleichung (12) geht in die folgende über:

$$(\lambda+i)^{n+1}+(\lambda-i)^{n+1}=0,$$

oder

$$\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{n+1}=-1.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{\lambda-i}{\lambda+i}=e^{\frac{\pi i+2k\pi i}{n+1}} \qquad (k=0,1,\ldots,n),$$

also

$$\lambda=i\,\frac{1+e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n+1}}}{1-e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n+1}}}=-\operatorname{cotg}\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

Offenbar ist

$$\omega=-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)}, \qquad \Omega=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)},$$

und wir erhalten den

Satz IV'. *Ist*

$$1+\sum_{\nu=1}^{n}(\lambda_\nu\cos\nu\varphi+\mu_\nu\sin\nu\varphi)\geqq 0 \qquad \textit{für alle } \varphi, \tag{2'}$$

so genügt das konjugierte trigonometrische Polynom der Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}(\lambda_\nu\sin\nu\psi-\mu_\nu\cos\nu\psi)\right|\leqq\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)} \qquad \textit{für alle } \psi.$$

Die Fälle der Gleichheit lassen sich nach der angegebenen Regel bestimmen und man findet, daß Gleichheit nur für

$$1+\frac{2n}{n+1}\cos\left(\varphi-\psi+\frac{\pi}{n+1}\right)+\ldots+\frac{2\cdot1}{n+1}\cos n\left(\varphi-\psi+\frac{\pi}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin(n+1)\left(\frac{\varphi-\psi}{2}+\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi-\psi+\frac{\pi}{n+1}\right)}\right]^2$$

bzw. für

$$\frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}\left(\varphi-\psi-\frac{\pi}{n+1}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi-\psi-\frac{\pi}{n+1}\right)}\right]^2$$

eintritt. Man hat nämlich nur das Gleichungssystem aufzulösen

$$\left.\begin{aligned}
\lambda x_0-ix_1-ix_2-\ldots-ix_n&=0,\\
ix_0-\lambda x_1-ix_2-\ldots-ix_n&=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
ix_0+ix_1+ix_2+\ldots-\lambda x_n&=0
\end{aligned}\right\}\quad \lambda=\mp\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)}$$

mit der Nebenbedingung $\sum_{\nu=0}^{n}|x_\nu|^2=1$.

ergibt sich

$$x_\nu = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, e^{\mp \frac{\nu i \pi}{n+1}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n).$$

wird also [vgl. Formel (15)]

$$\frac{1}{2} t_\nu e^{\nu \psi i} = \frac{n-\nu+1}{n+1}\, e^{\pm \frac{\nu \pi i}{n+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

d die gesuchten trigonometrischen Polynome sind — wie behauptet —

$$\frac{1}{n+1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} e^{+\frac{\nu i \pi}{n+1}} z^\nu \right|^2_{z = e^{(\varphi-\psi)i}}$$

$$= 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \left(n - \nu + 1 \right) \cos \nu \left(\varphi - \psi + \frac{\pi}{n+1} \right),$$

w.

$$\frac{1}{n+1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} e^{-\frac{\nu i \pi}{n+1}} z^\nu \right|^2_{z = e^{(\varphi-\psi)i}}$$

$$= 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \left(n - \nu + 1 \right) \cos \nu \left(\varphi - \psi - \frac{\pi}{n+1} \right).$$

2. Es sei

$$a_1 = 1, \quad a_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 2, 3, \ldots . n);$$

nn ist bekanntlich[6])

$$\omega = -2 \cos \frac{\pi}{n+2}, \quad \Omega = 2 \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

o ist unter der Bedingung (2)

$$-2 \cos \frac{\pi}{n+2} \leqq \Re\, t_1 e^{\psi i} \leqq 2 \cos \frac{\pi}{n+2} \quad \text{für alle } \psi,$$

heißt

$$|t_1| \leqq 2 \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Um die Fälle der Gleichheit zu bestimmen, haben wir das Gleichungs-tem aufzulösen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_0 + x_1 &= 0 \\ x_0 - \lambda x_1 + x_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n &= 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \pm 2 \cos \frac{\pi}{n+2}, \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$$

[6]) Man vgl. Fejér, loc. cit. [1]), S. 79.

Offenbar ist x_ν bis auf einen konstanten Faktor ϱ der Näherungsnenner ν-ter Ordnung des Kettenbruches

$$\lambda - \frac{1}{|\lambda} - \frac{1}{|\lambda} - \frac{1}{|\lambda} - \dots ,$$

also ist[7]) für $\lambda = 2\cos\frac{\pi}{n+2}$: $x_\nu = \varrho \sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}$

und für $\lambda = -2\cos\frac{\pi}{n+2}$: $x_\nu = \varrho(-1)^\nu \sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}$

$\Big\}\ (\nu = 0, 1, \dots, n).$

Demnach sind die gesuchten Polynome:

$$P_1(\varphi) = \varrho^2 \left| \sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}\, z^\nu \right|^2_{z=e^{(\varphi-\psi)i}},$$

$$P_2(\varphi) = \varrho^2 \left| \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}\, z^\nu \right|^2_{z=e^{(\varphi-\psi)i}},$$

wobei

$$\varrho^2 = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{n} \sin^2(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}}. \tag{16}$$

Offenbar geht $P_2(\varphi)$ in $P_1(\varphi)$ über, wenn man φ durch $\varphi - \pi$ ersetzt, das heißt, es ist $P_1(\varphi) = P_2(\varphi - \pi)$, und wir haben den

Satz V. *Ist*

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu \cos\nu\varphi + \mu_\nu \sin\nu\varphi) \geqq 0 \text{ für alle } \varphi , \tag{2'}$$

so ist

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} \leqq 2\cos\frac{\pi}{n+2},$$

und Gleichheit gilt nur für das trigonometrische Polynom

$$\varrho^2 \left| \sin\frac{\pi}{n+2} + \sin\frac{2\pi}{n+2}\cdot z + \dots + \sin\frac{(n+1)\pi}{n+2}\cdot z^n \right|^2_{z=e^{(\varphi-\psi)i}}$$

an den Stellen $\varphi = \psi$ und $\varphi = \psi + \pi$. Hier ist ϱ^2 durch (16) bestimmt[8]).

Auf ähnlichem Wege fand ich für die Koefffizienten des trigonometrischen Polynoms (2') die zuerst von Herrn Fejér bewiesene Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \leqq n ,$$

---

[7]) Man vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 279 bis 280.

[8]) Für Kosinuspolynome vgl. L. Fejér, loc. cit. [1]), S. 79 bis 80.

die weiteren Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \lambda_\nu - \mu_\nu i \right| \leqq n\,, \quad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left| \lambda_{2\nu} - \mu_{2\nu} i \right| \leqq \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left| \lambda_{2\nu+1} - \mu_{2\nu+1} i \right| \leqq \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

hträglich fand ich sehr einfache Beweise dieser Ungleichungen, die direkt auf Satz A stützen. Ich unterdrücke hier daher meinen uringlichen Beweis, und gebe den direkten Beweis in einer besonderen e[9]). Dort habe ich auch die Fälle, in denen Gleichheit auftritt, bemt.

§ 3.

Anwendung auf harmonische Funktionen.

Wir betrachten jetzt eine unendliche Folge der a_ν

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \quad (a_0 \text{ reell}), \quad a_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu i\,;$$

er sei $0 < \varrho < 1$. Wir bilden die Zahlenmenge

$$a_0 + \Re \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t_\nu \varrho^\nu e^{\nu\varphi i} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi\,,$$

$1, t_1, \ldots, t_n$ die Koeffizienten irgendeines Polynoms sind, das der ingung (2) genügt. Nach Satz I und der angefügten Bemerkung mt die Menge (17) mit dem Wertevorrat der unendlich vielen miteschen Formen

$$H_\varrho^{(n)}(x) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu}\, \varrho^{|\nu-\mu|}\, x_\nu\, \bar{x}_\mu \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad \sum_{\nu=0}^{n} |\, x_\nu\,|^2 = 1$$

ein.

Nun sei die Potenzreihe

$$P(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

$|z| < 1$ konvergent; ich beweise zunächst den *Hilfssatz:*

---

[9]) Erscheint in den Sitzungsberichten d. Kgl. Bayer. Akad. der Wissenschaften, m.-Phys. Klasse.

Es sei $2g_\varrho$ das Minimum, $2G_\varrho$ das Maximum der harmonischen Funktion

$$2\Re P(\varrho e^{\varphi i}) = a_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu \cos\nu\varphi + \beta_\nu \sin\nu\varphi)\,\varrho^\nu \qquad (\alpha_\nu - \beta_\nu i = a_\nu)$$

für $0 \leqq \varphi < 2\pi$; dann besteht (18) *aus dem offenen Intervall $(2g_\varrho, 2G_\varrho) = J$.*

Zum Beweise zeige ich zunächst, daß J in (18) bzw. in (17) enthalten ist. Offenbar ist die Zahlenmenge

$$(19) \qquad a_0 + 2\Re\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varrho^\nu \frac{n-\nu+1}{n+1} e^{\nu\varphi i} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi)$$

in (17) enthalten, denn es ist bekanntlich

$$1 + 2\Re\sum_{\nu=1}^{n} \frac{n-\nu+1}{n+1} e^{\nu\varphi i} \geqq 0 \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi.$$

Ferner ist

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty}\left[a_0 + 2\Re\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varrho^\nu \frac{n-\nu+1}{n+1} e^{\nu\varphi i}\right] = 2\Re P(\varrho e^{\varphi i});$$

ich kann also irgendeinen Punkt von J mit Punkten aus (17) beliebig annähern; und da (17) selbst ein Intervall ausfüllt, so ist J in (17) also auch in (18) enthalten.

Umgekehrt ist auch (18) in J enthalten; denn aus

$$\pi a_\nu \varrho^\nu = \int_0^{2\pi} \Re P(\varrho e^{\varphi i}) e^{-\nu\varphi i}\, d\varphi \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt

$$\pi \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu}\varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu = \int_0^{2\pi} \Re P(\varrho e^{\varphi i}) |x_0 + e^{-\varphi i} x_1 + \ldots + e^{-n\varphi i} x_n|^2\, d\varphi,$$

und hieraus

$$2\pi g_\varrho < \pi \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu}\varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu < 2\pi G_\varrho;$$

hier gilt sicher Ungleichheit, es sei denn, daß $a_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$; diesen trivialen Fall schließen wir aus.

Damit ist unser Hilfssatz bewiesen; hieraus und aus (20) ist auch klar, daß die Menge (19) mit (17) identisch ist.

Man lasse nun ϱ zwischen 0 und 1 variieren. Es sei $2g_\varrho^{(n)}$ der kleinste und $2G_\varrho^{(n)}$ der größte Wert der L-Form

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu}\varrho^{|\nu-\mu|} x_\nu \bar{x}_\mu \quad \text{für} \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2;$$

erner sei kurz

$$2\,g_1^{(n)} = 2\,g^{(n)}, \qquad 2\,G_1^{(n)} = 2\,G^{(n)}, \qquad H_1^{(n)}(x) = H^{(n)}(x).$$

ffenbar ist $2\,g^{(n)}$ die kleinste, $2\,G^{(n)}$ die größte Wurzel der Gleichung (12); erner ist nach dem Korollar zu Satz III

$$g^{(n)} \leqq g_\varrho^{(n)} < G_\varrho^{(n)} \leqq G^{(n)}.$$

lso besteht bei veränderlichem ϱ $(0 < \varrho < 1)$ der Wertevorrat der -Formen $H_\varrho^{(n)}(x)$ aus dem Intervall $(g^{(n)}, G^{(n)})$, mit eventuellem Aus- chluß der Grenzen. Daraus folgt aber sofort der

Satz VI. *Der Wertevorrat der harmonischen Funktion*

1) $$a_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu \cos \nu\varphi + \beta_\nu \sin \nu\varphi)\,\varrho^\nu \qquad (\alpha_\nu - \beta_\nu i = a_\nu)$$

ir $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $0 < \varrho < 1$ *stimmt mit dem Wertevorrat der unendlich- elen L-Formen*

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu}\, x_\nu \bar{x}_\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ für } \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$$

berein, bei eventuellem Ausschluß der Grenzen.

Insbesondere ist die unendliche L-Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_{\mu-\nu}\, x_\nu \bar{x}_\mu$ dann und ur dann beschränkt, wenn die Reihe (21) für $0 < \varrho < 1$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ onvergiert und daselbst beschränkt ist. Die gegenseitigen Grenzen immen dann überein [10]).

Ferner ist die harmonische Funktion dann und nur dann nicht- egativ, wenn die L-Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_{\mu-\nu}\, x_\nu \bar{x}_\mu$ nichtnegativ ist [11]).

Es sei bemerkt, daß aus der Voraussetzung der einseitigen Be- hränktheit der Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_{\mu-\nu}\, x_\nu \bar{x}_\mu$ schon die Konvergenz der Reihe (21) r $0 < \varrho < 1$ folgt. Denn es sei etwa

[10]) Dies haben schon Carathéodory und Fejér gezeigt in ihrer Arbeit: Über n Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffi- nten und über den Picard-Landauschen Satz, Rendic. del Circ. Matem. di Palermo (1911), S. 1 bis 22, Satz IX.

[11]) Dies ist aus den Untersuchungen von Carathéodory und Toeplitz be- nnt. Man vgl. z. B. F. Rieß, loc. cit. [2]) und die daselbst angeführte Literatur. rner G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis, pziger Berichte 63 (1911), S. 501 bis 511.

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu \geqq 2g \quad \text{für} \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1,$$

dann ist

$$-2g \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 + \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu \geqq 0,$$

also

$$\begin{vmatrix} a_0 - 2g & a_\nu \\ a_{-\nu} & a_0 - 2g \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

und hieraus folgt

$$|a_\nu|^2 \leqq (2g - a_0)^2.$$

(Eingegangen am 3. August 1917.)

ngleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Es sei die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

r $|z| < 1$ konvergent und *beschränkt*. Es existiere also eine Konstante M, daß

$$|f(z)| \leqq M \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

i zunächst $M = 1$; bekanntlich ist dann (Landausche Ungleichung)

$$|a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leqq 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1.3. \dots (2\nu-1)}{2.4. \dots 2\nu} \right)^2 \quad [1]$$

d (Fejérsche Ungleichung)

$$|(n+1)\, a_0 + n\, a_1 + \dots + a_n| \leqq n+1 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)\ [2].$$

[1]) Man vgl. z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, §§ 1, 2.

[2]) L. Fejér, Rend. del Circ. Matem. di Palermo 38 (1914), S. 79—97, insb. S. 95. — rr Steffensen (ebenda 38, S. 382) fand — unter der unwesentlichen Voraussetzung: $=0$ —

$$|s_0 + s_1 + \dots + s_n| < \frac{e}{2} \cdot (n+1).$$

n vgl. auch Landau, a. a. O. [1]), S. 9.

Übrigens ergibt sich — worauf mich Herr Fejér aufmerksam machte — (3) on aus einer älteren Fejérschen Formel (Math. Annalen 58 (1904), S. 51—69, . S. 54); demnach ist

$$\frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n} = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \left(\frac{\sin n \frac{\alpha - x}{2}}{\sin \frac{\alpha - x}{2}} \right)^2 d\alpha,$$

$s_0(x)$, $s_1(x)$, ... die Partialsummen der Fourierreihe von $F(x)$ bezeichnen.

Oder wenn zur Abkürzung

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird,

$$|s_n| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2$$

und

$$|s_0 + s_1 + \ldots + s_n| \leqq n + 1. \tag{F}$$

Es ist auch bekannt, daß in (2) Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn

$$f(z) \equiv e^{\gamma i} \frac{z^n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(-\frac{1}{z}\right)^\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (-z)^\nu} \qquad (\gamma \text{ eine reelle Konstante});$$

und es ist leicht einzusehen, daß in (3) Gleichheit nur im Falle

$$f(z) \equiv e^{\gamma i}$$

gilt.

In Weiterverfolgung des Landauschen Ideenganges leite ich diese Resultate aus einer gemeinsamen Quelle ab, die ich auch zur Aufstellung anderer Relationen ähnlichen Charakters benutze. Nachträglich habe ich indessen die Arbeit mit Rücksicht auf eine inzwischen erschienene Abhandlung des Herrn I. Schur an mehreren Stellen abgeändert[3]).

§ 1.

Satz I. *Zwei $n+1$-gliedrige Zahlenfolgen*

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n; \quad \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

seien durch die Identität miteinander verbunden:

$$(\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n)^2 = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_n z^n + \ldots, \tag{4}$$

Hieraus folgt leicht

$$\frac{n a_0 + (n-1) a_1 r + \ldots + a_{n-1} r^{n-1}}{n} = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\alpha i}) \left(\frac{\sin n\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 d\alpha \quad (0 < r < 1)$$

also

$$\left|\frac{n a_0 + (n-1) a_1 r + \ldots + a_{n-1} r^{n-1}}{n}\right| \leqq \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin n\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 d\alpha = 1 \quad (0 < r < 1)$$

hieraus ergibt sich (3) unmittelbar.

[3]) Man vgl. I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für Mathematik 147 (1917), S. 205–232. Vgl. weiter unten die §§ 1, 2 und 6 meiner Arbeit. Insbesondere verdankt § 6 seine Entstehung der Schurschen Arbeit.

s heißt, es sei

$$\lambda_0 \lambda_\nu + \lambda_1 \lambda_{\nu-1} + \ldots + \lambda_\nu \lambda_0 = \mu_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n);$$

ner genüge die Potenzreihe (1) *der Bedingung*

$$\Big| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \Big| \leqq 1 \text{ für } |z| < 1 .$$

ann ist

$$|\mu_n a_0 + \mu_{n-1} a_1 + \ldots + \mu_0 a_n| \leqq |\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 .$$

at die Gleichung

$$P(z) \equiv \lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n = 0$$

ine Wurzel im Kreise $|z| < 1$, *so tritt in* L *auch Gleichheit auf, und ar nur im Falle*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \cdot \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1} z + \ldots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n} .$$

nter $\bar{\lambda}_\nu$ ist hierbei die zu λ_ν konjugiert komplexe Zahl zu verstehen.

Den Beweis führte ich zuerst in Anlehnung an die von Herrn Landau m Beweise seiner Ungleichheit (2) benutzte Methode, die dem Falle $= 1, \mu_1 = 1, \ldots, \mu_n = 1$ entspricht. Um zu zeigen, daß in (L) *nur* für e Funktion (8) Gleichheit gilt, mußte ich jedoch einen tiefliegenden atouschen Satz über beschränkte Potenzreihen anwenden. Herr J. Schur, m mein Manuskript vorgelegen hat, machte mich freundlichst darauf fmerksam, daß sich der Satz einfacher unter Zuhilfenahme einer Un-eichung ableiten läßt, die er in einer inzwischen erschienenen Arbeit b. Ich führe nun auf diesem Wege den Beweis des Satzes und leite r Vollständigkeit halber auch die zu benutzende Schursche Ungleichung a. a. O. [3]), S. 227) in Kürze ab.

Setzt man

$$f(z) P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu z^\nu ,$$

daß also

$$a_0 \lambda_\nu + a_1 \lambda_{\nu-1} + \ldots + a_\nu \lambda_0 = v_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

$$a_k \lambda_n + a_{k+1} \lambda_{n-1} + \ldots + a_{k+n} \lambda_0 = v_{k+n} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

wird bekanntlich für $0 \leqq \varrho < 1$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 \varrho^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{\alpha i}) P(\varrho e^{\alpha i})|^2 \, d\alpha .$$

Vermöge der Bedingung (6) folgt hieraus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 \varrho^{2\nu} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(\varrho e^{\alpha i})|^2 \, d\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_\nu|^2 \varrho^{2\nu},$$

also ist auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2$ konvergent und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2,$$

und schließlich

$$\sum_{\nu=0}^{n} |v_\nu|^2 \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2. \tag{9}$$

Dies ist die Schursche Ungleichung. Damit hier Gleichheit gilt, muß jedenfalls die Beziehung bestehen:

$$v_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu = n+1, \; n+2, \; \ldots$$

Nun ist offenbar

$$\mu_n a_0 + \mu_{n-1} a_1 + \ldots + \mu_0 a_n = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu (a_0 \lambda_{n-\nu} + a_1 \lambda_{n-\nu-1} + \ldots + a_{n-\nu} \lambda_0)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu v_{n-\nu},$$

also

$$|\mu_n a_0 + \ldots + \mu_0 a_n| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu v_{n-\nu}| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \tfrac{1}{2}(|\lambda_\nu|^2 + |v_{n-\nu}|^2), \tag{10}$$

und schließlich mit Rücksicht auf (9):

$$|\mu_n a_0 + \mu_{n-1} a_1 + \ldots + \mu_0 a_n| \leqq |\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2. \tag{L}$$

Damit hier Gleichheit gilt, muß offenbar in den Beziehungen (9) und (10) die Gleichheit bestehen, es müssen also folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) $v_\nu = 0$ für $\nu = n+1, \; n+2, \; \ldots$;

2) die Zahlen $\lambda_\nu v_{n-\nu}$ $(\nu = 0, \ldots, n)$ haben dieselbe Amplitude, das heißt, es gibt eine Konstante γ, so daß

$$\lambda_\nu v_{n-\nu} = r_\nu e^{\gamma i} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \quad r_\nu \geqq 0;$$

3) $|\lambda_\nu| = |v_{n-\nu}|$ $\qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$

Aus 2) und 3) folgt $|\lambda_\nu|^2 = r_\nu$, also aus 2) für $\lambda_\nu \neq 0$:

$$v_{n-\nu} = \bar{\lambda}_\nu e^{\gamma i};$$

dies gilt wegen 3) auch für $\lambda_\nu = 0$.

Es ist demnach

$$f(z)P(z) = e^{\gamma i}(\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1}z + \ldots + \bar{\lambda}_0 z^n),$$

r
$$f(z) = e^{\gamma i}\frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1}z + \ldots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n}.$$

Liegen die Wurzeln von (7) außerhalb oder auf dem Rande des Ein-skreises, so ist auch klar, daß diese Funktion der Bedingung (6) ge-gt, denn es ist $|f(e^{\alpha i})| \equiv 1$; man sieht auch unmittelbar, daß jetzt (9) und in (L) Gleichheit gilt.

Damit ist der Satz I bewiesen.

§ 2.

Aus Satz I ergibt sich leicht der folgende Satz von Schur [a. a. O. [3]), z X]:

Satz A. Die Potenzreihe (1) ist dann und nur dann für $|z| < 1$ vergent und beschränkt, wenn die Bilinearform

$$A(x, y) = \sum_{\nu \leqq \mu} a_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu$$

hränkt ist. Die obere Grenze der Potenzreihe ist genau gleich der ren Grenze der Bilinearform.

Ist nämlich $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $|z| < 1$ konvergent und daselbst $z)| \leqq 1$, so besagt die Ungleichung (L), daß die quadratische Form komplexen Variabeln $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$:

$$K_n(\lambda, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu (a_0\lambda_{n-\nu} + a_1\lambda_{n-\nu-1} + \ldots + a_{n-\nu}\lambda_0)$$

$\sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2 = 1$ die obere Schranke 1 besitzt; also hat auch die Bili-form

$$K_n(k, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu (a_0\lambda_{n-\nu} + a_1\lambda_{n-\nu-1} + \ldots + a_{n-\nu}\lambda_0)$$

$\sum_{=0}^{n} |k_\nu|^2 = 1$ und $\sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2 = 1$ die obere Schranke Eins [4]). Ersetzt man hier urch $y_{n-\nu}$ und λ_ν durch x_ν, so erhält man für $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 \leqq 1$ und $\sum_{\nu=0}^{n} |y_\nu|^2 \leqq 1$:

[4]) Dies folgt sofort aus der Beziehung:

$$K_n(k, \lambda) = \tfrac{1}{4}[K_n(k+\lambda, k+\lambda) - K_n(k-\lambda, k-\lambda)].$$

vgl. E. Hellinger und O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unend-

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{n} y_{n-\nu}(a_0 x_{n-\nu} + a_1 x_{n-\nu-1} + \ldots + a_{n-\nu} x_0)\Big| \leqq 1,$$

das heißt

$$\Big|\sum_{\nu \leqq \mu \leqq n} a_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu\Big| \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

Ist umgekehrt (11) erfüllt, so erhält man zunächst für $x_0 = 1$, $y_n = 1$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-1} = 0$:

$$|a_n| \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

also $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ konvergiert für $|z| < 1$. Ferner folgt aus (11) für $x_\nu = e^{-\nu\alpha i}$, $y_\mu = e^{(\mu-n)\alpha i}$

$$\Big|\sum_{\nu \leqq \mu \leqq n} a_{\mu-\nu} e^{(\mu-\nu)\alpha i}\Big| \leqq n+1,$$

oder

$$|(n+1)a_0 + n a_1 e^{\alpha i} + \ldots + a_n e^{n\alpha i}| \leqq n+1,$$

das heißt

$$|s_0 + s_1(e^{\alpha i}) + \ldots + s_n(e^{\alpha i})| \leqq n+1;$$

also ist

$$\left|\frac{s_0 + s_1(z) + \ldots + s_n(z)}{n+1}\right| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1,$$

und da

$$\frac{s_0 + s_1(z) + \ldots + s_n(z)}{n+1} \to f(z) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

so ist auch

$$|f(z)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1. \tag{6'}$$

Aus Satz I kann man noch einen weiteren Schluß ziehen. Damit unter der Bedingung (6') schon der n-te Abschnitt der Bilinearform $A(x, y)$ die obere Grenze 1 erreicht, das heißt

$$\Big|\sum_{0 \leqq \nu \leqq \mu \leqq n} a_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu\Big| = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2}\,\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} |y_\nu|^2} \tag{12}$$

wird für ein geeignetes Wertesystem $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß

$$|K_n(\lambda, \lambda)| = \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2$$

wird. Das heißt in (L) muß Gleichheit gelten, also ist

---

lichen Matrizen, Mathem. Annalen 69 (1910), S. 289—330 (§ 4, S. 303—304). Die hier für reelle quadratische Formen angestellte Überlegung läßt sich sofort auf quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten übertragen.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = e^{\gamma i} \frac{\bar{\lambda}_n + \ldots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \ldots + \lambda_n z^n},$$

es ist ersichtlich, daß jetzt in (12) für $x_\nu = \lambda_\nu$, $y_\nu = \lambda_{n-\nu}$ Gleich- gilt.

Ist nun $\lambda_0 = 0$, so muß auch $\lambda_n = 0$ sein (da sonst $f(z)$ für $z = 0$ n Pol hätte), und dann ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = e^{\gamma i} \frac{\bar{\lambda}_{n-1} + \ldots + \bar{\lambda}_1 z^{n-1}}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} z^{n-1}};$$

würde schon der $(n-1)$-te Abschnitt $A_{n-1}(x, y) = \sum_{\nu \leqq \mu \leqq n-1} a_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu$ die e Grenze 1 erreichen. Damit also n der kleinste Index sei, für den $x, y)$ die obere Grenze 1 erreicht, muß $\lambda_0 \neq 0$ sein. Die Funktion $f(z)$ sich dann offenbar in der Form schreiben:

$$f(z) = e^{\gamma i} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z + w_\nu}{1 + \bar{w}_\nu z}, \qquad |w_\nu| \leqq 1.$$

re ferner etwa $|w_n| = 1$, also $\bar{w}_n = \frac{1}{w_n}$, so wäre

$$f(z) = e^{\gamma i} w_n \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{z + w_\nu}{1 + \bar{w}_\nu z},$$

würde wiederum schon A_{n-1} die Grenze 1 erreichen. Damit ist der bewiesen:

Satz B. Es bezeichne M_n die obere Grenze der Bilinearform $x, y)$, dann ist offenbar $M_n \leqq M_{n+1}$ und nach Satz A entweder $M_\nu < 1$ $= 0, 1, 2, \ldots)$, oder $M_0 < M_1 < \ldots < M_{n-1} < 1$, $M_n = M_{n+1} = \ldots = 1$. zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(z)$ von der Form ist:

$$f(z) = e^{\gamma i} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z + w_\nu}{1 + \bar{w}_\nu z}, \qquad |w_\nu| < 1.$$

Verzichtet man auf die in Satz B enthaltene Ergänzung, so läßt sich A auf kurzem, direktem Wege folgendermaßen beweisen:

Offenbar ist bei Integration über den Kreis $|z| = \varrho$ in positivem Sinne

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z^{\nu+1}} dz = \begin{cases} a_\nu & \text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{für } \nu = -1, -2, \ldots; \end{cases}$$

aus ergibt sich unmittelbar

$$A_n(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z}\left(\sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{x_\nu y_\mu}{z^{\mu-\nu}}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z}\left(\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu z^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{y_\nu}{z^\nu}\right)dz.$$

Nach Einführung der Substitution $z = \varrho e^{\alpha i}$ folgt hieraus

$$A_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varrho e^{\alpha i})\left(\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu \varrho^\nu e^{\nu\alpha i}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} y_\nu \varrho^{-\nu} e^{-\nu\alpha i}\right)d\alpha,$$

und es ergibt sich sofort

$$|A_n(x, y)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu \varrho^\nu e^{\nu\alpha i}\right|\left|\sum_{\nu=0}^{n} y_\nu \varrho^{-\nu} e^{-\nu\alpha i}\right| d\alpha$$

$$\leqq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left|\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu \varrho^\nu e^{\nu\alpha i}\right|^2 + \left|\sum_{\nu=0}^{n} y_\nu \varrho^{-\nu} e^{-\nu\alpha i}\right|^2\right\} d\alpha$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}|x_\nu|^2 \varrho^{2\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}|y_\nu|^2 \varrho^{-2\nu}\right\}.$$

Durch den Grenzübergang $\varrho \to 1$ erhält man nun hieraus

$$|A_n(x, y)| \leqq \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\{|x_\nu|^2 + |y_\nu|^2\},$$

also

(11′) $|A_n(x, y)| \leqq 1$ für $\sum_{\nu=0}^{n}|x_\nu|^2 \leqq 1$, $\sum_{\nu=0}^{n}|y_\nu|^2 \leqq 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Wie umgekehrt aus (11′) unmittelbar (6′) folgt, ist auf S. 168 gezeigt worden.

Die Sätze A und B lassen sich auch so formulieren (man vgl. Schur a. a. O. 3), S. 226—227):

1. Es ist dann und nur dann $|f(z)| \leqq 1$ für $|z| < 1$, wenn die Hermitesche Form

$$\mathfrak{H} = E - \bar{A}'A = \sum_{\nu=0}^{\infty}|x_\nu|^2 - \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x_{\nu+\mu}\right|^2$$

nicht negativ ist.

2. Die nichtnegative Hermitesche Form $\mathfrak{H}$ ist vom Range n stets und nur dann, wenn $f(z)$ vom Typus (13) ist.

Herr Schur hat *außerdem* bewiesen (a. a. O. Satz X*):

3. Die Hermitesche Form $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann nicht negativ, wenn ihre Abschnittsdeterminanten $\delta_1, \delta_2, \ldots$ entweder sämtlich positiv

) sind, oder wenn die n ersten unter ihnen positiv, die folgenden alle sind. Notwendig und hinreichend für das Eintreten des zweiten Falles daß $f(z)$ vom Typus (13) ist. Die Zahl n gibt hierbei zugleich den g der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}$ an.

Für Punkt 1 selbst (mit Verzicht darauf, die Bedeutung des Ranges Form $\mathfrak{H}$ und das Verhalten der Determinanten δ_ν zu charakterisieren) Herr Schur auch einen kurzen direkten Beweis, der sich auf seine leichung (9) stützt. Ich zeige, daß sich hieraus auch Punkt 2 direkt iten läßt.

Die Ungleichung (9) lautet ausführlich geschrieben:

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_0 \lambda_\nu + a_1 \lambda_{\nu-1} + \ldots + a_\nu \lambda_0|^2 \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2,$$

en wir hier nach Herrn Schur die Bezeichnungen ein:

$$\lambda_0 = u_n, \quad \lambda_1 = u_{n-1}, \quad \ldots, \quad \lambda_n = u_0,$$

rhalten wir

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \ldots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2,$$

wir haben nur zu entscheiden, wann hier bei passender Wahl der Gleichheit gilt. Hierzu ist notwendig (vgl. § 1, S. 165 — 166), daß

$$a_k u_0 + a_{k+1} u_1 + \ldots + a_{k+n} u_n = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

und es ist dann

$$f(z) = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} v_\nu z^\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} u_{n-\nu} z^\nu},$$

ei

$$v_{n-\nu} = a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \ldots + a_{n-\nu} u_n \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

Soll nun die Funktion $f(z)$ der Bedingung (6′) genügen, so muß sie ıbar innerhalb und auf dem Rande des Einheitskreises regulär sein, wir können die Beziehung aufstellen

$$\sum_{\nu=0}^{n} |v_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{\alpha i}) \sum_{\nu=0}^{n} u_{n-\nu} e^{\nu \alpha i} \right|^2 d\alpha \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

st ersichtlich, daß hier Gleichheit nur dann gilt, wenn

$$|f(e^{\alpha i})| \equiv 1$$

ist. Aus den Bedingungen (b_1) und (b_2) folgt nun nach einem bekannten Satz, daß $f(z)$ vom Typus (13) ist[5]).

Umgekehrt ist klar, daß für eine Funktion $f(z)$ vom Typus (13) in (9′) bei passender Wahl der u_ν Gleichheit gilt.

§ 3.

Eine leichte Verallgemeinerung der Relation (L) ergibt sich folgendermaßen. Es seien

$$w_1, w_2, \ldots, w_p$$

die p-ten Einheitswurzeln, also

$$w_\nu^p = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p),$$

und es sei r eine positive ganze Zahl zwischen den Grenzen

$$0 \leqq r \leqq p-1.$$

Dann folgt aus (6):

$$\frac{1}{p}\left|\sum_{\nu=1}^{p} w_\nu^{p-r}(a_0 + a_1 w_\nu z + a_2 w_\nu^2 z^2 + \ldots)\right| \leqq 1 \qquad (|z|<1),$$

also

$$|a_r z^r + a_{r+p} z^{r+p} + a_{r+2p} z^{r+2p} + \ldots| \leqq 1 \qquad (|z|<1),$$

und hieraus nach einem bekannten Schwarzschen Lemma

$$|a_r + a_{r+p} z^p + a_{r+2p} z^{2p} + \ldots| \leqq 1 \qquad (|z|<1),$$

also schließlich

$$|a_r + a_{r+p} z + a_{r+2p} z^2 + \ldots| \leqq 1 \qquad (0 \leqq r \leqq p-1, \quad |z|<1).$$

Daher ist nach Satz I

$$|\mu_n a_r + \mu_{n-1} a_{r+p} + \ldots + \mu_0 a_{r+np}| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2;$$

damit hier Gleichheit gilt, muß offenbar nach (8)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{r+\nu p} z^\nu \equiv e^{\gamma i} \cdot \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1} z + \ldots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n}$$

---

[5]) Dies ist eine unmittelbare Folge des Schwarzschen Spiegelungsprinzips aus der Theorie der analytischen Fortsetzungen. Man vgl. auch T. H. Gronwall, On Analytic Functions of Constant Modulus on a given Contour, Annals of Mathematics (2) 14 (1912—1913), S. 72—80 (§ 3). Einen andern, gleichfalls sehr einfachen Beweis hat mir Herr Fejér brieflich mitgeteilt. — Speziell für ganze Funktionen $f(z)$ vgl. auch O. Blumenthal, Sur le mode de croissance des fonctions entières, Bulletin de la Société mathématique de France 35 (1907), S. 213—232 (S. 214—215).

; also ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{r+\nu p}|^2 = 1$. Andererseits ist aber infolge der Be-

ung (6): $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 \leqq 1$; hieraus folgt

$$a_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \not\equiv r \,(\text{mod. } p).$$

Es ist also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{r+\nu p} z^{r+\nu p} = e^{\gamma i} z^r \cdot \frac{\bar\lambda_n + \bar\lambda_{n-1} z^p + \ldots + \bar\lambda_0 z^{np}}{\lambda_0 + \lambda_1 z^p + \ldots + \lambda_n z^{np}}$$

es gilt der

Satz I'. Unter den gleichen Voraussetzungen, wie in Satz I ist

$$|\mu_n a_r + \mu_{n-1} a_{r+p} + \ldots + \mu_0 a_{r+np}| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2$$

$0 \leqq r < p$, und Gleichheit gilt nur im Falle

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = e^{\gamma i} z^r \cdot \frac{\bar\lambda_n + \bar\lambda_{n-1} z^p + \ldots + \bar\lambda_0 z^{np}}{\lambda_0 + \lambda_1 z^p + \ldots + \lambda_n z^{np}}.$$

§ 4.

Betrachten wir nun einige spezielle Fälle der Theoreme I und I', die durch eine besondere Wahl der μ_ν ergeben.

Es ist offenbar für beliebige reelle oder komplexe Werte von k

$$-z)^{-2k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{-2k}{\nu} z^\nu = 1 + 2kz + \frac{2k(2k+1)}{1\cdot 2} z^2 + \ldots,$$

$$(1-z)^{-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{-k}{\nu} z^\nu = 1 + kz + \frac{k(k+1)}{1\cdot 2} z^2 + \ldots.$$

t man also

$$\mu_\nu = (-1)^\nu \binom{-2k}{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

st

$$\lambda_\nu = (-1)^\nu \binom{-k}{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

noch zur Abkürzung

$$a_n - \binom{-2k}{1} a_{n-1} + \ldots + (-1)^n \binom{-2k}{n} a_0 = S_n^{(2k-1)}$$

tzt, so folgt aus Satz I:

Unter der Bedingung (6) *ist*

$$|S_n^{(2k-1)}| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-k}{\nu}^2.$$

Bekanntlich sind die Größen

$$s_n^{(2k-1)} = \frac{\Gamma(2k)}{n^{2k-1}} S_n^{(2k-1)} \qquad \left(k > \tfrac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\right)$$

die Cesàroschen Mittel $(2k-1)$-ter Ordnung der Folge $s_0, s_1, s_2, \ldots$. Für reelle $k > \frac{1}{2}$ ist nun nach (14)

$$\left|s_n^{(2k-1)}\right| \leqq \frac{\Gamma(2k)}{n^{2k-1}}\left[1 + k^2 + \frac{k^2(k+1)^2}{(2!)^2} + \ldots + \frac{k^2(k+1)^2\ldots(k+n-1)^2}{(n!)^2}\right]$$

$$< \frac{\Gamma(2k)}{n^{2k-1}}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2k-2}\right] < c_k$$

also unterhalb einer von k abhängigen Konstante.

Für $\frac{1}{2} < k < 1$ zeigte dies schon Herr Landau[6]).

Aus Satz I folgt ferner, daß *für reelles* k *und* $0 \leqq k \leqq 1$ *in* (14) *Gleichheit gilt, falls* $f(z)$ *die Gestalt hat*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \frac{z^n P\left(\frac{1}{z}\right)}{P(z)},$$

wobei

$$P(z) = 1 + kz + \frac{k(k+1)}{1\cdot 2} z^2 + \ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1\cdot 2\ldots n} z^n;$$

denn nach einem Kakeyaschen Satz [vgl. z. B. Landau, a. a. O. [1]), § 2, S. 20] hat das Polynom $P(z)$ keine Nullstelle im Kreise $|z| < 1$ (seine Koeffizienten sind niemals wachsende positive Zahlen).

$$\text{Für } k = \tfrac{1}{2} \text{ ist } \mu_\nu = 1, \quad \lambda_\nu = (-1)^\nu \binom{-\frac{1}{2}}{\nu},$$

$$\text{für } k = 1 \text{ ist } \mu_\nu = \nu + 1, \quad \lambda_\nu = 1,$$

und man erhält die in der Einleitung zitierten Resultate.

Analoge Relationen erhält man aus Satz I'; insbesondere folgt für $k = \frac{1}{2}$:

$$|a_r + a_{r+p} + \ldots + a_{r+np}| \leqq 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1\cdot 3\ldots(2\nu-1)}{2\cdot 4\ldots 2\nu}\right)^2, \tag{15}$$

wobei aber $r < p$ vorausgesetzt ist.

Herr Fabry hat bei *beliebigem* r *und* p eine obere Schranke für den linksseitigen Ausdruck angegeben, und Herr Landau hat Fabrys Resultat auf kürzerem Wege abgeleitet[7]).

---

[6]) Landau, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe, Archiv der Mathematik und Physik (3) 21 (1913), S. 42—50 und S. 250—255; (3) 24 (1916), S. 250—260 (Dritte Abhandlung, S. 252—253, 257—259).

[7]) a. a. O. [6]), Erste Abhandlung, §§ 3—4.

§ 5.

Ich gebe hier noch eine etwas allgemeinere Relation an als die unter
. Die allgemeinen Kugelfunktionen sind die Koeffizienten der
wicklung

$$(1-2xz+z^2)^{-k}=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu^{(k)}(x)z^\nu \qquad (P_0^{(k)}(x)\equiv 1).$$

$P_\nu^{(k)}(x)$ ist eine ganze rationale Funktion von x, die für $k=\frac{1}{2}$ in das
gendresche Polynom übergeht. Nun ist ersichtlich, daß für $\mu_\nu = P_\nu^{(k)}(x)$,
$= P_\nu^{\left(\frac{k}{2}\right)}(x)$ ist.

Also ist unter der Bedingung (6)

$$\left|a_0P_n^{(k)}(x)+a_1P_{n-1}^{(k)}(x)+\ldots+a_n\right|\leqq\sum_{\nu=0}^{n}\left|P_\nu^{\left(\frac{k}{2}\right)}(x)\right|^2.$$

Um die rechte Seite dieser Ungleichung abzuschätzen, sei

$$-1\leqq x\leqq 1,$$

man setze

$$x=\cos\varphi;$$

n ist offenbar

$$(1-2xz+z^2)^{-k}=(1-ze^{\varphi i})^{-k}(1-ze^{-\varphi i})^{-k}$$

$$=\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{-k}{\nu}e^{\nu\varphi i}z^\nu\right]\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{-k}{\nu}e^{-\nu\varphi i}z^\nu\right].$$

Hieraus erhält man[8])

$$P_\nu^{(k)}(\cos\varphi)=(-1)^\nu\left[\binom{-k}{\nu}e^{\nu\varphi i}+\binom{-k}{\nu-1}\binom{-k}{1}e^{(\nu-2)\varphi i}\right.$$

$$\left.+\binom{-k}{\nu-2}\binom{-k}{2}e^{(\nu-4)\varphi i}+\ldots+\binom{-k}{\nu}e^{-\nu\varphi i}\right];$$

$k>0$ haben im Klammerausdruck sämtliche Koeffizienten dasselbe
zeichen $(-1)^\nu$, also ist

$$|P_\nu^{(k)}(\cos\varphi)|\leqq|P_\nu^{(k)}(1)| \qquad (k>0);$$

erhält man aus (16) für $x=1$:

$$P_\nu^{(k)}(1)=(-1)^\nu\binom{-2k}{\nu},$$

[8]) Für die Legendreschen Polynome $\left(k=\frac{1}{2}\right)$ findet sich diese Entwicklung schon Laplace, und Legendre schloß daraus, daß $|P^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)|\leqq 1$. Man vergleiche Heine, Handbuch der Kugelfunktionen (1. Auflage), Berlin 1861, S. 7—8.

also folgt aus (17)

$$\left| a_0 P_n^{(k)}(x) + a_1 P_{n-1}^{(k)}(x) + \ldots + a_n \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-k}{\nu}^2 \qquad (k > 0)^9).$$

Hieraus folgt (14) für $x = 1$. Nur in diesem Falle kann Gleichheit gelten.

Für $k = 1$ erhält man

$$\left| \frac{a_0 \sin(n+1)\psi + a_1 \sin n\varphi + \ldots + a_n \sin \varphi}{\sin \varphi} \right| \leqq n+1; \tag{18}$$

nun kann man überall a_ν durch $a_\nu e^{\nu\varphi i}$ ersetzen, denn mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ genügt auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\nu\varphi i} z^\nu$ der Bedingung (6); man erhält so aus (18)

$$\left| \frac{a_0 \sin(n+1)\varphi + a_1 e^{\varphi i} \sin n\varphi + \ldots + a_n e^{n\varphi i} \sin \varphi}{\sin \varphi} \right| \leqq n+1,$$

und hieraus folgt durch Multiplikation mit $e^{-n\varphi i}$

$$\left| \frac{a_0 e^{n\varphi i} \sin(n+1)\varphi + a_1 e^{(n-1)\varphi i} \sin n\varphi + \ldots + a_n \sin \varphi}{\sin \varphi} \right| \leqq n+1. \tag{19}$$

Da aber

$$e^{\nu\varphi i} \cdot \frac{\sin(\nu+1)\varphi}{\sin \varphi} = 1 + e^{2\varphi i} + \ldots + e^{2\nu\varphi i},$$

so findet man aus (19)

$$|s_0 + s_1 e^{\varphi i} + \ldots + s_n e^{n\varphi i}| \leqq n+1 \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi). \tag{20}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der Formel (F) (S. 164); Gleichheit gilt nur für $\varphi = 0$ und $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \equiv e^{\nu i}$.

§ 6.

Aus (20) erhält man für $n = 1$:

$$|s_0| + |s_1| \leqq 2,$$

und Gleichheit gilt nur für $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\nu i}$. Man kann nun die Frage stellen: ist unter der Bedingung (6) stets

$$|s_0| + |s_1| + \ldots + |s_n| \leqq n+1. \tag{21}$$ [10])

[9]) Diese Ungleichung gilt übrigens auch für $k < 0$.

[10]) Für Fourierreihen haben sich mit der Summe $|s_0| + |s_1| + \ldots + |s_n|$ schon die Herren Hardy und Littlewood in ihrer Arbeit, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, C. R. 156 (1913), S. 1307—1309, im Zusammenhange mit dem

Der Beweis dieser Ungleichung wurde von Herrn Schur erbracht
l ergibt sich aus seinem Beweisgang für einen allgemeineren Satz[11])
gendermaßen: es ist

$$f(z)(1+z+\ldots+z^n)=s_0+s_1z+\ldots+s_nz^n+\ldots,$$

für $0\leqq\varrho<1$

$$|s_0|^2+|s_1|^2\varrho^2+\ldots+|s_n|^2\varrho^{2n}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\varrho e^{\alpha i})(1+\varrho e^{\alpha i}+\ldots+\varrho^n e^{n\alpha i})|^2\,d\alpha$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1+\varrho e^{\alpha i}+\ldots+\varrho^n e^{n\alpha i}|^2\,d\alpha=1+\varrho^2+\ldots+\varrho^{2n};$$

raus ergibt sich für $\varrho\to 1$

$$|s_0|^2+|s_1|^2+\ldots+|s_n|^2\leqq n+1.$$

Damit hier Gleichheit gilt, muß offenbar

$$f(z)=\frac{s_0+s_1z+\ldots+s_nz^n}{1+z+\ldots+z^n}$$

n, und $s_0+s_1z+\ldots+s_nz^n$ muß dieselben Nullstellen besitzen, wie
$z+\ldots+z^n$, also

$$s_0+s_1z+\ldots+s_nz^n=a_0(1+z+\ldots+z^n),$$

hieraus

$$|a_0|=1,\quad a_1=0,\quad a_2=0,\ \ldots$$

Die Ungleichung (21) ist in (22) enthalten; denn es ist offenbar

$$|s_\nu|\leqq\tfrac{1}{2}|s_\nu|^2+\tfrac{1}{2},$$

$$|s_0|+\ldots+|s_\varrho|\leqq\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu|^2+\frac{1}{2}(n+1)\leqq n+1,$$

Gleichheit gilt nur im Falle (23).

§ 7.

Die Relation (15) legt die *Frage* nahe: Welches ist für *beliebige* nd p die genaue obere Schranke von $|a_r+a_{r+p}+\ldots+a_{r+np}|$ unter

érschen Summabilitätssatz beschäftigt. Man vgl. auch: Fekete, „Vizsgálatok ourier-sorokról, Mathematikai és természettudományi Értesítö" 34 (1916), S. 759 86, und Fejér, Fourierreihe und Potenzreihe, Monatshefte für Mathematik und sik 28 (1917), S. 64—76.

[11]) J. Schur, a. a. O. [3]), S. 227, Ungleichung (26). — Man erhält offenbar (22) Ungleichung (9) des § 1 für $\lambda_\nu=1$.

der Bedingung (6)? Die gesuchte Zahl sei mit $G(r, n, p)$ bezeichnet. Wollen wir diese Frage mit Hilfe des Satzes I beantworten, so haben wir vor allem zu

$$\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 1, \ldots,\ \mu_n = 1,\ \mu_{n+1} = 0, \ldots,\ \mu_{n+k} = 0 \qquad (k \geqq 1$$

die zugehörigen λ_ν zu bestimmen, also die Koeffizienten der Entwickelung

$$(1 + z + \ldots + z^n)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu z^\nu .$$

Dies gelingt leicht für den Fall $n = 1$; es ist dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu z^\nu = \sqrt{1+z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} z^\nu = 1 + \tfrac{1}{2} z + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2\nu-3)}{4 \cdot 6 \ldots 2\nu} z^\nu .$$

Ich zeige jetzt, daß

$$\sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} z^\nu \neq 0 \quad \text{für} \quad |z| < 1 . \tag{24}$$

Offenbar ist für $0 < \varrho < 1$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (-\varrho)^\nu = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \right| \varrho^\nu = \sqrt{1-\varrho} > 0 ,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \right| \varrho^\nu < 1 \quad \text{für} \quad 0 < \varrho < 1 .$$

Hieraus folgt

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} \left| \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \right| < 1 ,$$

also ist für $|z| < 1$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} z^\nu \right| \geqq 1 - \sum_{\nu=1}^{k+1} \left| \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \right| > 0 .$$

Damit ist (24) bewiesen. Also gilt nach Satz I′ (für $n = k+1$) der

Satz II. *Unter der Voraussetzung* (6) *ist*

$$|a_t + a_{t+p}| \leqq \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu}^2 \quad (t = r + kp,\ r < p,\ k > 0,\ p = 1, 2, \ldots), \tag{25}$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} z^r \cdot \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k+1} + \binom{\frac{1}{2}}{k} z^p + \ldots + z^{(k+1)p}}{1 + \frac{1}{2} z^p + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{k+1} z^{(k+1)p}} . \tag{26}$$

ist also

$$G(t, 1, p) = \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu}^3, \quad t \geqq p, \quad k = \left[\frac{t}{p}\right].$$

Dagegen hat man für $t < p$ also $k = 0$ aus (15):

') $$|a_r + a_{r+p}| \leqq \tfrac{5}{4} \quad (0 \leqq r < p)$$

d Gleichheit gilt nur für

3) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} z^r \cdot \frac{\frac{1}{2} + z^p}{1 + \frac{1}{2} z^p} \equiv e^{\gamma i} (\tfrac{1}{2} z^r + \tfrac{3}{4} z^{r+p} + \ldots).$$

ist also allgemein $G(t, 1, p) = \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu}^2$, $k = \left[\frac{t}{p}\right]$.

Ich zeige, daß in (25) und (27) die linke Seite durch die Summe r absoluten Beträge ersetzt werden darf. Dies folgt sofort, wenn man durch $a_\nu e^{\nu\varphi i}$ ersetzt, wo φ beliebig ist. Es gelten also die Ungleichungen:

$$|a_t| + |a_{t+p}| \leqq \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu}^2 \left(k = \left[\frac{t}{p}\right] \geqq 0, \; p = 1, 2, \ldots\right)$$

d im Falle (26) gilt sicher Gleichheit.

§ 8.

Aus (15) folgt für $n = 2$:

$$|a_r + a_{r+p} + a_{r+2p}| \leqq \frac{89}{64} \qquad (r < p),$$

d Gleichheit gilt nur im Falle

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \frac{\frac{3}{8} + \frac{1}{4} z + z^2}{1 + \frac{1}{4} z + \frac{3}{8} z^2}.$$

Ich bestimme jetzt die genaue obere Schranke von

$$|a_r + a_{r+p} + a_{r+np}| \quad (n > 2, \; r < p).$$

diesem Zwecke bestimme ich die zu

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \ldots, \quad \mu_{n-2} = 0, \quad \mu_{n-1} = 1, \quad \mu_n = 1$$

nörigen λ_ν, also die ersten $n+1$ Koeffizienten der Entwickelung

$$(1 + z^{n-1} + z^n)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu z^\nu.$$

enbar ist

$$1 + z^{n-1} + z^n = (1 + \tfrac{1}{2} z^{n-1} + \tfrac{1}{2} z^n + \ldots)^2 \quad \text{für} \quad n > 2,$$

daher

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 0, \ldots, \quad \lambda_{n-2} = 0, \quad \lambda_{n-1} = \tfrac{1}{2}, \quad \lambda_n = \tfrac{1}{2}.$$

Ferner ist für $|z| < 1$

$$|1 + \tfrac{1}{2} z^{n-1} + \tfrac{1}{2} z^n| > 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0,$$

also

$$1 + \tfrac{1}{2} z^{n-1} + \tfrac{1}{2} z^n \neq 0 \text{ für } |z| < 1.$$

Aus Satz I' folgt somit der

Satz III. *Unter der Voraussetzung* (6) *ist*

$$|a_r + a_{r+p} + a_{r+np}| \leqq \tfrac{3}{2} \quad (n > 2,\ r < p),$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \cdot z^r \frac{1 + z^p + 2z^{np}}{2 + z^{(n-1)p} + z^{np}}.$$

§ 9

Ich benutze jetzt den Landauschen Ideengang, um eine auf Polynome bezügliche Extremalaufgabe zu lösen.

Es sei

$$f_m(z) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu z^\nu$$

ein Polynom von genau m-tem Grade ($a_m \neq 0$), und

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu z^\nu\Big| \leqq 1 \text{ für } |z| \leqq 1.$$

Man findet leicht (vgl. Formel (C), S. 7)

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int f_m(z) \Big(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \ldots + \frac{m}{z^{m+1}}\Big) dz,$$

und hieraus

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_m(z)}{z^2} \Big(1 + \frac{1}{z} + \ldots + \frac{1}{z^{m-1}}\Big)^2 dz,$$

denn es ist jetzt

$$\int \frac{f_m(z)}{z^\nu} dz = 0 \quad \text{für} \quad \nu > m + 1.$$

Hieraus erhält man für $z = e^{\vartheta i}$:

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu a_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_m(e^{\vartheta i})}{e^{\vartheta i}} (1 + e^{-\vartheta i} + \ldots + e^{-(m-1)\vartheta i})^2 d\vartheta,$$

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{m} \nu a_\nu\Big| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{-\vartheta i}+\ldots+e^{-(m-1)\vartheta i}|^2\, d\vartheta = m,$$

Gleichheit gilt nur, wenn $|f_m(e^{\vartheta i})| \equiv 1$ und

$$\frac{f_m(e^{\vartheta i})}{e^{\vartheta i}}(1+e^{-\vartheta i}+\ldots+e^{-(m-1)\vartheta i})^2$$

stante Amplitude hat, also von der Gestalt ist

$$\frac{f_m(e^{\vartheta i})}{e^{\vartheta i}}(1+e^{-\vartheta i}+\ldots+e^{-(m-1)\vartheta i})^2 = e^{\gamma i} g(e^{\vartheta i}),$$

$$g(e^{\vartheta i}) \geqq 0 \text{ für } 0 \leqq \vartheta < 2\pi.$$

nn ist aber $g(e^{\vartheta i}) = |1+e^{-\vartheta i}+\ldots+e^{-(m-1)\vartheta i}|^2$.

raus folgt leicht $f_m(e^{\vartheta i}) = e^{\gamma i}\cdot e^{m\vartheta i}$.

r $f_m(z) = e^{\gamma i}\cdot z^m$.

Aus (29) erhält man nun sofort $\Big|\sum_{\nu=1}^{m} \nu a_\nu z^\nu\Big| \leqq m$ für $|z| \leqq 1$,

l hieraus $|f_m'(z)| \leqq m$ für $|z| \leqq 1$[12]).

§ 10.

Ich frage nun nach der genauen oberen Schranke von

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n|$$

alle Potenzreihen, die der Bedingung (6) genügen. Es ist also A_n so bestimmen, daß

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqq A_n,$$

l daß hier A_n durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Wollten unsere Methode anwenden, so müßten wir zunächst die ersten $n+1$ effizienten der Reihenentwickelung

$$[n+(n-1)x+\ldots+x^{n-1}]^{\frac{1}{3}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu x^\nu$$

timmen. Für beliebiges n scheint dies recht schwierig zu sein; für $= 2, 3, 4$ kommt man leicht zum Ziele und erhält so die Werte von A_3, A_4. Ich will hier A_n zwischen zwei Schranken einschließen.

[12]) Auf anderem Wege hat schon Herr M. Rieß dieses Resultat abgeleitet; vgl. e Arbeit, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen Polynome, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver.. 23 (1914), S. 354—368 (S. 357).

Nach (2) ist

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu\right| \leqq 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots 2\nu}\right)^2 = G_n\,^{13}),$$

und hieraus folgt durch Anwendung von (29):

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| < G_n,$$

also

$$A_n \leqq nG_n.$$

Andererseits ist offenbar

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = (n+1)\left(s_n - \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}\right),$$

also wird für die Funktion (man vgl. die Einleitung)

$$f(z) = \frac{z^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{1}{z}\right)^\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} z^\nu}$$

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| > (n+1)(G_n - 1);$$

es ist also zusammenfassend

$$(30) \qquad (n+1)(G_n - 1) \leqq A_n \leqq nG_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[13]) Die Konstanten G_n haben offenbar für die Potenzreihe dieselbe Bedeutung wie die Lebesgueschen Konstanten

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} \right| d\vartheta$$

für die Fourierreihe. Für ϱ_n gab Herr Fejér (Journal für Mathematik 146 (1915), S. 56) die Darstellung

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + z + z^2 + \ldots + z^{2n} \right|_{z=e^{i\vartheta}} d\vartheta;$$

ich verweise hier darauf, daß für G_n eine analoge Darstellung existiert. Setzt man

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (-z)^\nu\right)^2 = 1 + z + \ldots + z^n + \alpha_1 z^{n+1} + \ldots + \alpha_n z^{2n},$$

so ist offenbar

$$G_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + z + \ldots + z^n + \alpha_1 z^{n+1} + \ldots + \alpha_n z^{2n} \right|_{z=e^{i\vartheta}} d\vartheta.$$

Hieraus erhält man leicht eine asymptotische Abschätzung von A_n. kanntlich[14]) ist

$$G_n \cong \frac{1}{\pi} \log n\,, \quad \left(\text{d. h. } \lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{\log n} = \frac{1}{\pi}\right)$$

o aus (30)

$$A_n \cong \frac{1}{\pi} n \log n\,.$$

Schlußbemerkung. Durch die Substitutionen $z = Rx$, $a_\nu R^\nu = M c_\nu$ sen sich unsere Sätze unmittelbar auf Potenzreihen $\sum a_\nu z^\nu$ übertragen, im Kreise $|z| < R$ absolut unter der Schranke M liegen.

[14]) Man vgl. Landau, a. a. O. [1]), S. 23.

(Eingegangen am 3. August 1917.)

Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen.

Von

I. Schur in Berlin.

Im folgenden bezeichne ich die Koeffizientenmatrix $H = (h_{\varkappa\lambda})$ einer Hermiteschen Form

$$H = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda \qquad (\bar{h}_{\varkappa\lambda} = h_{\lambda\varkappa})$$

kurz als eine *Hermitesche Matrix*. Eine solche Matrix ist in den üblichen Bezeichnungen durch die Gleichung

$$\bar{H}' = H$$

charakterisiert; für das Zeichen $\bar{H}'$ soll im folgenden einfacher H^* geschrieben werden[1]). Ist die Form H positiv oder nichtnegativ, so bezeichne ich auch ihre Matrix als eine positive oder nichtnegative Hermitesche Matrix. Eine Matrix M des Grades n soll ferner *unitär* heißen, wenn die zugehörige lineare homogene Substitution unitär orthogonal ist, d. h. die Hermitesche Einheitsform

$$E_n = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_n \bar{x}_n$$

ungeändert läßt. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß $M^* = M^{-1}$ wird.

Die Hermitesche Form H ist bekanntlich dann und nur dann positiv, wenn ihre n Abschnittsdeterminanten

$$d_\nu = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1\nu} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{\nu 1} & h_{\nu 2} & \ldots & h_{\nu\nu} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1]) Vgl. A. Ostrowski, Über die Existenz einer endlichen Basis bei gewissen Funktionensystemen, Math. Annalen 78 (1917), S. 94—119 (S. 117).

tlich positiv sind. Beachtet man, daß auch die n Koeffizienten $h_{\nu\nu}$ tive reelle Zahlen sind, und bezeichnet man mit $\mathfrak{G}$ diejenige Per-tationsgruppe, deren Permutationen

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Ziffern $\nu+1, \nu+2, \dots, n$ ungeändert lassen, so läßt sich die Un-chung $d_\nu > 0$ auch in der Form

$$\sum \chi(G) h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n} > 0$$

reiben, wo G alle Permutationen von $\mathfrak{G}$ durchläuft und $\chi(G) = \pm 1$ setzen ist, je nachdem G eine gerade oder ungerade Permutation ist.

Im folgenden will ich zeigen, daß diese Ungleichungen eine über-chend weitgehende Verallgemeinerung zulassen:

I. *Ist H eine positive Hermitesche Form, so gilt die Ungleichung (2) jede beliebige Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ in den n Vertauschungsziffern $, \dots, n$ und für jeden der Frobeniusschen Gruppencharaktere $\chi(G)$ Gruppe $\mathfrak{G}$.*

Es wird sich noch genauer ergeben:

I*. *Ist $D = d_n$ die Determinante der positiven Form H und $m = \chi(E)$ Grad des Charakters $\chi(G)$, so ist stets*

$$\sum \chi(G) h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n} \geqq m D.$$

Ich werde auch angeben, in welchen Fällen hier das Gleichheitszeichen t (§ 4). Betrachtet man insbesondere den Hauptcharakter $\chi(G) = 1$, wenn $\mathfrak{G}$ auch ungerade Permutationen enthält, den *alternierenden* rakter von $\mathfrak{G}$, der entsteht, indem man $\chi(G)$ für gerade Permutationen ch 1 und für ungerade gleich -1 setzt, so ergibt sich

$$\sum h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n} \geqq D, \qquad \sum \pm h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n} \geqq D.$$

Hierin ist als Spezialfall die bekannte Hadamardsche Ungleichung[2])

$$h_{11} h_{22} \cdots h_{nn} \geqq D$$

halten.

Den Satz I werde ich aus einem wesentlich allgemeineren Satze folgern:

[2]) J. Hadamard, Résolution d'une question relative aux déterminants. Bulletin sciences mathématiques (2) 17 (1893), S. 240—248. — Aus der zweiten der Re-nen (3) folgt bei geeigneter Wahl der Gruppe $\mathfrak{G}$ auch die von E. Fischer in er Arbeit „Über den Hadamardschen Determinantensatz", Archiv der Mathe-ik und Physik (3) 13 (1908), S. 32—40, angegebene Verallgemeinerung der Un-chung (4).

II. *Es sei* $\mathfrak{G}$ *eine beliebige Permutationsgruppe in den* n *Vertauschungsziffern* $1, 2, \ldots n$. *Man betrachte irgendeine Darstellung* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{G}$ *durch unitäre Substitutionen (Matrizen), bei der der Permutation* (1) *von* $\mathfrak{G}$ *die Matrix* M_G *entspricht. Dann ist für jede positive Hermitesche Matrix* $H = (h_{\varkappa\lambda})$ *auch*

$$\mathsf{M} = \sum M_G h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n}, \tag{5}$$

die Summe über alle Permutationen G *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *erstreckt, eine positive Hermitesche Matrix*[3]).

Es wird sich sogar ergeben, daß, wenn von jedem Element der Hauptdiagonale von M die Determinante D von H subtrahiert wird, eine nicht negative Hermitesche Matrix entsteht.

Der Beweis des Satzes II, auf dem alles übrige beruht, stützt sich auf die Frobeniussche Theorie der Gruppencharaktere und auf eines der Resultate meiner Inaugural-Dissertation[4]).

Setzt man nur voraus, daß die Hermitesche Form H nichtnegativ ist, so ergibt sich aus dem Satze II durch einen Grenzübergang, daß auch M eine nichtnegative Hermitesche Matrix ist. Insbesondere kann in diesem Fall nur geschlossen werden, daß die in (2) und (3) auftretenden Summen positiv oder gleich Null sind.

In den beiden letzten Paragraphen dieser Arbeit behandle ich noch eine andere Frage. Eine einfache Methode zur Bildung nichtnegativer Hermitescher Formen mit endlich oder unendlich vielen Veränderlichen liefert bekanntlich die Integralrechnung. Es scheint aber nirgends hervorgehoben worden zu sein, daß man auf diese Weise alle Formen dieser Art erhält. Der Beweis hierfür ist leicht zu erbringen. Die so gewonnene Integraldarstellung für die Koeffizienten einer beliebigen nichtnegativen Hermiteschen Form läßt interessante Anwendungen zu, aus ihr geht auch deutlich hervor, daß jede Aussage über diese Klasse von Formen als ein Satz der Integralrechnung aufgefaßt werden kann.

§ 1.

Zurückführung des Satzes II auf den Fall, daß $\mathfrak{G}$ die symmetrische Gruppe ist.

Ist $\mathfrak{G}$ die zu betrachtende Permutationsgruppe, deren Ordnung gleich g sein möge, und ordnet man jedem Element G von $\mathfrak{G}$ eine Matrix m-ten

[3]) Daß M der Bedingung $\mathsf{M}^* = \mathsf{M}$ genügt, sobald H diese Eigenschaft hat, ist leicht zu sehen.

[4]) Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Berlin 1901, S. 1—74. — Im folgenden wird diese Arbeit kurz mit D. zitiert.

ides M_G zu, so bilden diese Matrizen eine *Darstellung* (m-ten Grades) von $\mathfrak{G}$, wenn für je zwei gleiche oder verschiedene Elemente A und B n $\mathfrak{G}$

$$M_A M_B = M_{AB}$$

Die Darstellung heißt eine *eigentliche*, wenn die Determinanten der atrizen M_G von Null verschieden sind; dies ist dann und nur dann Fall, wenn die der identischen Permutation E entsprechende Matrix die Einheitsmatrix des Grades m ist. Ferner nenne ich die Darlung $\mathfrak{M}$ *unitär*, wenn die Matrizen M_G sämtlich unitär sind. Eine täre Darstellung kann auch dadurch charakterisiert werden, daß M_E Einheitsmatrix und für jedes Element G von $\mathfrak{G}$

$$M_G^* = M_{G^{-1}}$$

Zwei Darstellungen desselben Grades nennt man einander *äquivalent*, nn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation ineinander übergeführt den können. Nach einem bekannten Satze[5]) ist jede Darstellung einer lichen Gruppe einer unitären Darstellung äquivalent. Hat man ferner ei unitäre Darstellungen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, die einander äquivalent sind, so nn man auch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation angeben, die $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{M}_2$ überführt[6]).

Es sei nun $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe n-ten Grades und, falls $= gk$ ist,

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{G}A_1 + \mathfrak{G}A_2 + \cdots + \mathfrak{G}A_k. \qquad (A_1 = E)$$

Nach einem von Frobenius[7]) angegebenen Verfahren kann man dann folgender Weise mit Hilfe einer gegebenen Darstellung $\mathfrak{M}$ des Grades m n $\mathfrak{G}$ (durch die Matrizen M_G) eine Darstellung des Grades mk von $\mathfrak{S}$ stellen. Man setze, wenn R ein in $\mathfrak{G}$ nicht vorkommendes Element von $\mathfrak{S}$ $M_R = 0$. Für jedes Element S von $\mathfrak{S}$ sind dann die k^2 Matrizen en Grades

$$M_{A_\alpha S A_\beta^{-1}} = M_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

deutig bestimmt. Dann bilden die $n!$ Matrizen des Grades mk

---

[5]) A. Loewy, Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées M. Hermite, Comptes Rendus 123 (1896), S. 168—171, und E. H. Moore, An versal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions, Math. Annalen 50 8), S. 213—219.

[6]) Vgl. G. Frobenius, Über die cogredienten Transformationen der bilinearen nen, Berliner Sitzungsberichte 1896, S. 7—16 (S. 13).

[7]) Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer ergruppen, Berliner Sitzungsberichte 1898, S. 501—515 (S. 507).

$$N_S = M_{A_\alpha S A_\beta^{-1}} = \begin{pmatrix} M_{11} M_{12} \cdots M_{1k} \\ M_{21} M_{22} \cdots M_{2k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_{k1} M_{k2} \cdots M_{kk} \end{pmatrix}$$

eine Darstellug $\mathfrak{N}$ der Gruppe $\mathfrak{S}$.

Ist insbesondere die Darstellung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ unitär, so gilt dasselbe auch für die Darstellung $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{S}$. Denn zunächst ist N_E die Einheitsmatrix des Grades mk, ferner gilt die Gleichung (6) auch dann, wenn G nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, weil in diesem Fall M_G^* und $M_{G^{-1}}$ in die Nullmatrix übergehen. Daher ist

$$N_S^* = M_{A_\beta S A_\alpha^{-1}}^* = M_{A_\alpha S^{-1} A_\beta^{-1}} = N_{S^{-1}}$$

Der Satz II sei nun schon bewiesen, wenn $\mathfrak{G}$ die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}$ bedeutet. Wenden wir ihn auf die unitäre Darstellung $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{S}$ an, so wird für jede positive Hermitesche Form $H = (h_{\varkappa\lambda})$ die Matrix des Grades mk

$$\mathsf{N} = \sum N_S h_{1\sigma_1} h_{2\sigma_2} \cdots h_{n\sigma_n},$$

die Summe über alle $n!$ Permutationen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

erstreckt, eine positive Hermitesche Matrix. Beachtet man nun, daß $A_1 = E$ sein soll, so erscheint die zu betrachtende, mit Hilfe der unitären Darstellung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ zu bildende Matrix M als die in den m ersten Zeilen und Spalten stehende Teilmatrix von N. Da nun bekanntlich jeder „Abschnitt" einer positiven Hermiteschen Form wieder eine positive Form ist, so ist zugleich mit N auch M eine positive Hermitesche Matrix.

§ 2.

Beweis des Satzes II für den Fall $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}$.

Wir nehmen nun an, es sei $\mathfrak{G}$ die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}$ und schreiben deutlicher

$$\mathsf{M} = \sum M_S h_{1\sigma_1} h_{2\sigma_2} \cdots h_{n\sigma_n}.$$

Es genügt offenbar allein den Fall zu betrachten, daß die zu untersuchende unitäre Darstellung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}$ irreduzibel ist. Denn ist $\mathfrak{M}$ reduzibel, so läßt sich $\mathfrak{M}$ durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation P in gewisse irreduzible Darstellungen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_r$ vollständig zerfällen, die ebenfalls sämtlich unitär sind. Tritt dann, wenn $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{M}_\varrho$ ersetzt wird, an Stelle von M die Matrix M_ϱ, so wird

$$P^{-1}\mathsf{M}P = P^{*}\mathsf{M}P = \begin{pmatrix} \mathsf{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathsf{M}_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathsf{M}_r \end{pmatrix}$$

ß man nun schon, daß die Hermiteschen Matrizen M_ϱ sämtlich po- sind, so hat zugleich $P^{*}\mathsf{M}P$ und folglich auch M diese Eigenschaft. Um nun den Satz II für jede irreduzible unitäre Darstellung $\mathfrak{M}$ der ppe $\mathfrak{S}$ zu beweisen, genügt es zu wissen, daß er für die *reguläre* Dar- ung $\mathfrak{R}$ des Grades $n!$ von $\mathfrak{S}$ richtig ist, die man durch Betrachtung Frobeniusschen Gruppenmatrix $(x_{PQ^{-1}})$ erhält. Entspricht nämlich t der Permutation S von $\mathfrak{S}$ die Matrix R_S, so kann R_S auch als die rix einer Permutation von $n!$ Vertauschungssymbolen aufgefaßt werden ist daher gewiß unitär (reell und orthogonal). Man setze

$$\mathsf{P} = \sum R_S h_{1\sigma_1} h_{2\sigma_2} \dots h_{n\sigma_n}.$$

n einem der Hauptsätze der Theorie der Gruppencharaktere ist nun zu betrachtende irreduzible Darstellung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R}$ als irreduzibler andteil enthalten[8]). Da $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ beide unitär sind, kann man eine äre Matrix Q des Grades $n!$ so bestimmen, daß $Q^{-1}\mathfrak{R}Q$ in $\mathfrak{M}$ und gewisse andere Darstellung $\mathfrak{M}_1$ zerfällt, die dann ebenfalls unitär muß. Hat nun M_1 für $\mathfrak{M}_1$ dieselbe Bedeutung wie M für $\mathfrak{M}$, so

$$Q^{-1}\mathsf{P}Q = Q^{*}\mathsf{P}Q = \begin{pmatrix} \mathsf{M} & 0 \\ 0 & \mathsf{M}_1 \end{pmatrix}.$$

e Hermitesche Matrix ist dann zugleich mit P positiv und daher auch M dieselbe Eigenschaft.

Wir haben also nur noch zu zeigen daß P eine positive Hermite- Matrix ist, sobald die Form $H = (h_{\varkappa\lambda})$ positiv ist. Dies ergibt sich ndermaßen: Es sei $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine Matrix n-ten Grades, deren n^2 ente als unabhängige Variable anzusehen sind. Man betrachte dann nach dem Kroneckerschen Kompositionsverfahren gebildete Matrix

$$\Pi_n(A) = A \times A \times \dots \times A$$

Grades n^n (vgl. D. § 7). Diese „Produktransformation" hat fol- e Eigenschaften:

1. Jedes Element von (8) hat die Form $a_{\varkappa_1\lambda_1} a_{\varkappa_2\lambda_2} \dots a_{\varkappa_n\lambda_n}$.

[8]) Th. Molien, Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutions- en, Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft zu Dorpat 1897, S. 259—274, G. Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Sub- onen, Berliner Sitzungsberichte 1897, S. 994—1015 (S. 1004).

2. Für je zwei Matrizen A und B des Grades n ist

$$\Pi_n(A)\,\Pi_n(B) = \Pi_n(AB). \tag{9}$$

3. Es ist stets

$$[\Pi_n(A)]^* = \Pi_n(A^*). \tag{10}$$

4. Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die charakteristischen Wurzeln von A, so sind die charakteristischen Wurzeln von (8) die n^n Produkte

$$\omega_{\varkappa_1}\,\omega_{\varkappa_2}\ldots\omega_{\varkappa_n} \qquad (\varkappa_\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

Aus (10) folgt, daß wenn $A = H$ eine Hermitesche Matrix ist, auch $\Pi_n(H)$ diese Eigenschaft hat. Ist insbesondere H positiv, so sind die n Zahlen ω_ν reelle positive Zahlen und, da alsdann die n^n Produkte (11) ebenfalls positiv sind, so ist auch $\Pi_n(H)$ eine positive Hermitesche Matrix.

Die Matrix $\Pi_n(A)$ kann man in der Form

$$\Pi_n(A) = \sum \begin{bmatrix} \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n \\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \end{bmatrix} a_{\varkappa_1\lambda_1}\, a_{\varkappa_2\lambda_2} \ldots a_{\varkappa_n\lambda_n} \tag{12}$$

schreiben, wo $\begin{bmatrix} \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n \\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \end{bmatrix}$ eine Matrix des Grades n^n mit konstanten Koeffizienten bedeutet und

$$\begin{bmatrix} \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n \\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n \\ \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n \end{bmatrix}$$

zu setzen ist, wenn die Produkte

$$a_{\varkappa_1\lambda_1}\, a_{\varkappa_2\lambda_2} \ldots a_{\varkappa_n\lambda_n} \quad \text{und} \quad a_{\mu_1\nu_1}\, a_{\mu_2\nu_2} \ldots a_{\mu_n\nu_n}$$

sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren voneinander unterscheiden. Die Summe (11) ist hierbei über alle verschiedenen Produkte von je n der n^2 Variabeln $a_{\varkappa\lambda}$ zu erstrecken (vgl. D., § 8). Aus (9) folgt nun, daß insbesondere die $n!$ Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{bmatrix} \qquad (\sigma_\varkappa \neq \sigma_\lambda) \tag{13}$$

eine (uneigentliche) Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}$ bilden, bei der die Matrix (13) der Permutation (7) entspricht (vgl. D., § 10). Bezeichnet man mit R_S die Hauptteilmatrix des Grades $n!$ von (13), in der sich diejenigen Zeilen und Spalten schneiden, die in der Hauptdiagonale von $\Pi_n(A)$ das Produkt $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ enthalten, so bilden die $n!$ Matrizen R_S eine *eigentliche* Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}$. Hierbei enthält jede Zeile und jede Spalte von R_S nur an einer Stelle das Element 1, während alle

gen Elemente gleich 0 sind. Ist insbesondere S von der identischen nutation verschieden, so stehen in der Hauptdiagonale von R_S lauter en. Hieraus folgt aber, daß die durch die R_S gebildete Darstellung Gruppe $\mathfrak{S}$ nichts anderes als die früher betrachtete reguläre Darstellung t.

Diese Betrachtung lehrt uns nun, daß die zu untersuchende Matrix P eine Hauptteilmatrix von $\Pi_n(H)$ erscheint. Da wir aber gesehen n, daß diese Hermitesche Matrix zugleich mit H positiv ist, so gilt elbe auch für P.

Damit ist der Satz II vollständig bewiesen[9]).

§ 3.

Beweis des Satzes I. Zerlegbare Hermitesche Formen.

Durchläuft die Permutation G die Elemente einer Gruppe $\mathfrak{G}$ der nung g, so bilden die g Zahlen $\chi(G)$ einen *Charakter der Gruppe* $\mathfrak{G}$, n sich eine (eigentliche) Darstellung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ angeben läßt, bei der Spur der dem Element G entsprechenden Matrix M_G gleich $\chi(G)$ wird. Zahl $m = \chi(E)$ gibt insbesondere den Grad der Darstellung $\mathfrak{M}$ an und auch der *Grad des Charakters* $\chi(G)$ genannt. Allgemein ist $\chi(G)$ Summe von m Einheitswurzeln, also

$$|\chi(G)| \leqq m.$$

Gleichheitszeichen steht hier nur dann, wenn M_G von der Form ϱE_m wo ϱ eine Einheitswurzel und E_m die Einheitsmatrix des Grades m utet. Zwei Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind dann und nur dann nder äquivalent, wenn sie zu demselben Charakter gehören. Da nun Darstellung von $\mathfrak{G}$ einer unitären Darstellung äquivalent ist, so kann, n $\chi(G)$ ein gegebener Charakter von $\mathfrak{G}$ ist die zugehörige Darstellung $\mathfrak{M}$ unitär gewählt werden. Ist nun

$$H = \sum_{\varkappa,\lambda}^{m} h_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa \bar{x}_\lambda \qquad (h_{\varkappa\lambda} = h_{\lambda\varkappa}) \ .$$

positive Hermitesche Form und M die durch $\mathfrak{M}$ und H bestimmte ix (5), so wird

$$s = \sum \chi(G)\, h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n}$$

[9]) Man kann diesen Satz auch ohne Benutzung der regulären Darstellung $\mathfrak{R}$ von weisen, indem man von der Tatsache Gebrauch macht, daß jeder eigentlichen tellung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}$ eine „invariante Operation" $T(A)$ von nicht identisch ver-indender Determinante entspricht (vgl. D., § 15). Hierbei hat man außerdem zu zeigen, daß, wenn die Darstellung $\mathfrak{M}$ unitär ist, $T(A)$ stets so gewählt en kann, daß $[T(A)]^* = T(A^*)$ wird. Dies ergibt sich ohne Mühe auf Grund . a. O. entwickelten Verfahrens zur Herstellung der Operation $T(A)$.

nichts anderes als die Spur von M. Da nach Satz II die Hermitesche Form M positiv ist, so ist auch s eine positive reelle Zahl. Dies liefert den Satz I.

Etwas schwieriger gestaltet sich der Beweis des Satzes I*. Er erfordert einige vorbereitende Bemerkungen.

Sind

$$x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\ \ldots,\ x_{\alpha_k} \qquad (\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k) \tag{14}$$

irgendwelche k unter den n Variabeln

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \tag{15}$$

und setzt man in der Hermiteschen Form H die $n-k$ übrigen Variabeln gleich 0, so geht H in eine Hermitesche Form der k Variabeln (14) über, die ich eine *Teilform* von H nennen und mit $H(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k})$ bezeichnen will. Ihre Determinante $D^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}$ ist eine Hauptunterdeterminante k-ten Grades der Determinante D von H. Die Form H nenne ich nun *zerlegbar oder zerfallend*, wenn sich die n Variabeln (15) in zwei Systeme

$$x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\ \ldots,\ x_{\alpha_k} \quad \text{und} \quad x_{\beta_1},\ x_{\beta_2},\ \ldots,\ x_{\beta_l} \qquad (k+l=n)$$

einteilen lassen, so daß

$$H = H(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}) + H(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_l})$$

wird. Ist das der Fall, so kann man stets die Indizes $1, 2, \ldots, n$ in zwei oder mehr Systeme

$$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_q;\ \mu_1, \ldots, \mu_r; \ldots$$

derart einteilen, daß

$$H = H(x_{\varkappa_1}, \ldots, x_{\varkappa_p}) + H(x_{\lambda_1}, \ldots, x_{\lambda_q}) + H(x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_r}) + \cdots \tag{16}$$

wird, wobei die einzelnen Summanden sich nicht weiter zerfällen lassen. Die Determinante D von H wird dann gleich dem Produkt ihrer Hauptunterdeterminanten

$$D^{(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p)},\ D^{(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)},\ D^{(\mu_1, \ldots, \mu_r)}, \ldots$$

Unter der *zu einer gegebenen Hermiteschen Form H gehörenden Permutationsgruppe* $\mathfrak{H}$ verstehe ich im folgenden, wenn H nicht zerlegbar ist, die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}$ und, wenn H eine zerlegbare Form vom Typus (16) ist, diejenige Untergruppe

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}^{(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_q; \ldots)}$$

der Ordnung $p!\,q! \ldots$ von $\mathfrak{S}$, deren Permutationen nur die Indizes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ untereinander vertauschen, ebenso die Indizes $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ usw. Ist insbesondere H eine Diagonalform, so bedeutet $\mathfrak{H}$ die allein aus der identischen Permutation E bestehende Einheitsgruppe $\mathfrak{E}$.

Ich werde nun von folgenden Hilfsätzen Gebrauch zu machen haben:

Hilfssatz 1. *Ist die Hermitesche Form H nicht zerlegbar, so dasselbe auch für mindestens eine unter den n Teilformen*

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wären nämlich diese n Teilformen sämtlich zerlegbar, so müßte es, die Teilformen $H(x_\nu) = h_{\nu\nu}\bar{x}_\nu x_\nu$ gewiß nicht zerlegbar sind, eine Zahl $n-1$ derart geben, daß unter den $\binom{n}{k}$ Formen $H(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k})$ destens eine nicht zerfällt, während jede Teilform mit $k+1$ Variabeln egbar wird. Durch eine geeignete Umordnung der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n erreicht werden, daß schon die Form $H(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nicht zerleg- wird. Dann müßte für jedes $\nu > k$ die Teilform $H(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_\nu)$ H zerfallen und dies könnte nur eintreten, wenn

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_\nu) = H(x_1, x_2, \ldots, x_k) + H(x_\nu)$$

r, was dasselbe ist,

$$h_{1\nu} = h_{2\nu} = \ldots = h_{k\nu} = 0$$

l. Hieraus würde aber folgen, daß H in $H(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ und $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ zerfällt, was der über H gemachten Voraussetzung erspricht.

Hilfssatz 2. *Ist H eine beliebige Hermitesche Form, die keine gonalform ist, so erzeugen diejenigen Transpositionen $T = (\varkappa, \lambda)$, für die Koeffizienten $h_{\varkappa\lambda}$ von H nicht Null sind, die zu H gehörende mutationsgruppe* $\mathfrak{H}$.

Man erkennt leicht, daß es genügt, diesen Satz allein für den Fall beweisen, daß H eine nicht zerlegbare Form ist. Wir haben also zu en, daß in diesem Fall die durch die zu betrachtenden Transpositionen ugte Gruppe $\mathfrak{T}$ mit der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}$ übereinstimmt. Wir men hierzu an, diese Behauptung, die für $n = 2$ gewiß richtig ist, sei Formen mit weniger als n Variabeln schon bewiesen, und wählen, nach dem Hilfssatz 1 jedenfalls möglich ist, einen Index α, so daß h die Teilform

$$H_\alpha = H(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_n)$$

H nicht zerfällt. Für diese Form möge die Gruppe $\mathfrak{T}_\alpha$ dieselbe Betung haben wie $\mathfrak{T}$ für die Form H. Dann ist $\mathfrak{T}_\alpha$ eine Untergruppe von $\mathfrak{T}$, mit der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_\alpha$ in den $n-1$ Vertauschungsrn $1, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, n$ übereinstimmt. Bekanntlich gibt es r keine von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_\alpha$ verschiedene Untergruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$, in der $\mathfrak{S}_\alpha$ Untergruppe enthalten ist. Wäre nun $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}_\alpha$, so müßten, weil $\mathfrak{S}_\alpha$ ie der Transpositionen (ν, α) enthält, die $n-1$ Koeffizienten

$$h_{1\alpha},\ h_{2\alpha},\ \ldots,\ h_{\alpha-1,\alpha},\ h_{\alpha+1,\alpha},\ \ldots,\ h_{n\alpha}$$

sämtlich gleich Null sein und daher würde H in die beiden Teilformen H_α und $H(x_\alpha)$ zerfallen. Da dieser Fall auszuschließen ist, so muß $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}$ sein.

Es sei nun $\mathfrak{G}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{M}$ eine unitäre Darstellung des Grades m von $\mathfrak{G}$, bei der dem Element

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{G}$ die (unitäre) Matrix

$$M_G = (c_{\mu\nu}^G) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m)$$

entspricht. Ich setze dann, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_m$ unabhängige komplexe Variable sind und $\bar{u}$ wie immer die zu u konjugierte komplexe Größe bedeutet,

$$f(G) = \sum_{\mu,\nu}^{m} c_{\mu\nu}^G u_\mu \bar{u}_\nu.$$

Diese Form ist nur dann eine Hermitesche Form, wenn

$$M_G^* = M_{G^{-1}} = M_G$$

ist, was jedenfalls zutrifft, wenn $\mathfrak{G}$ entweder die identische Permutation E oder eine Permutation der Ordnung 2 ist. Speziell ist

$$f(E) = \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu \bar{u}_\mu$$

die Hermitesche Einheitsform in den m Variabeln u_μ. Es gilt nun folgender

Hilfssatz 3. *Es seien A und B zwei Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$. Ist für ein spezielles Wertsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$*

$$|f(A)| = f(E), \qquad |f(B)| = f(E), \tag{18}$$

so wird

$$f(A)f(B) = f(E)f(AB). \tag{19}$$

Es genügt, wie man leicht erkennt, den Fall

$$f(E) = \sum_{\mu=1}^{m} |u_\mu|^2 = 1 \tag{20}$$

zu behandeln. Man bestimme dann, was bekanntlich möglich ist, eine unitäre Matrix

$$U = (u_{\mu\nu}), \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m)$$

in der

$$u_{11} = u_1, \quad u_{12} = u_2, \quad \ldots, \quad u_{1m} = u_m$$

wird, und betrachte die zu $\mathfrak{M}$ äquivalenten, ebenfalls unitäre Darstellung $U\mathfrak{M}U^{-1}$ von $\mathfrak{G}$, bei der dem Element G die Matrix

$$N_G = UM_GU^{-1} = UM_GU^* = (d^G_{\mu\nu})$$

pricht. Hierbei wird

$$d^G_{\mu\nu} = \sum_{\varrho,\sigma}^{m} u_{\mu\varrho} c^G_{\varrho\sigma} \bar{u}_{\nu\sigma},$$

speziell

$$d^G_{11} = \sum_{\varrho,\sigma}^{m} c^G_{\varrho\sigma} u_\varrho \bar{u}_\sigma = f(G).$$

Größen d^A_{11} und d^B_{11} sind daher wegen (18) und (20) vom absoluten rage 1. Da ferner für jedes Element G von $\mathfrak{G}$ die Matrix N_G unitär folglich

$$\sum_{\mu=1}^{m} |d^G_{1\mu}|^2 = \sum_{\mu=1}^{m} |d^G_{\mu 1}|^2 = 1$$

), so müssen die Koeffizienten

$$d^A_{1\nu},\ d^A_{\nu 1},\ d^B_{1\nu},\ d^B_{\nu 1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, m)$$

tlich gleich Null sein. Aus $N_{AB} = N_A N_B$ folgt daher

$$d^{AB}_{11} = \sum_{\mu=1}^{m} d^A_{1\mu} d^B_{\mu 1} = d^A_{11} d^B_{11}.$$

liefert die zu beweisende Gleichung (19).

Aus dem Hilfssatz 3 ergibt sich insbesondere:

Hilfssatz 4. *Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ein spezielles Wertsystem, das t aus lauter Nullen besteht. Ist für eine oder mehrere in der Gruppe $\mathfrak{G}$ altene Transpositionen T*

$$f(T) = -f(E),$$

st auch für jedes Element R der durch diese Transpositionen er- ten Untergruppe von $\mathfrak{G}$

$$f(R) = \zeta(R) f(E),$$

$\zeta(R)$ gleich ± 1 zu setzen ist, je nachdem R eine gerade oder eine erade Permutation ist.

§ 4.

Präzisere Fassung des Satzes II. Beweis des Satzes I*.

Die früher betrachtete Matrix M, die mit Hilfe der Hermiteschen n H und der unitären Darstellung $\mathfrak{M}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ gebildet wurde,

---

[10]) Hieraus folgt zugleich, daß stets $|f(G)| \leq f(E)$ ist.

läßt sich unter Benutzung der zuletzt eingeführten Bezeichnungen als die Koeffizientenmatrix der Hermiteschen Form

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \sum_G f(G) h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n}$$

deuten. Der Satz II besagt, daß diese Form zugleich mit der Form H positiv ist. Es gilt aber noch der weitergehende Satz:

III. *Ist D die Determinante der positiven Hermiteschen Form H, so ist*

$$F - Df(E) = F(u_1, u_2, \ldots, u_m) - D(u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + \cdots + u_m\bar{u}_m) \tag{21}$$

eine nichtnegative Hermitesche Form. Für ein spezielles Wertsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$, das nicht aus lauter Nullen besteht, ist dann und nur dann

$$F - Df(E) = 0, \tag{22}$$

wenn $\mathfrak{G}$ die zu H gehörende Permutationsgruppe $\mathfrak{H}$ als Untergruppe enthält und für jedes Element R von $\mathfrak{H}$

$$f(R) = \zeta(R) f(E) \tag{23}$$

ist.

Sind die zuletzt genannten Bedingungen erfüllt, so ist, wie man unmittelbar erkennt, die Gleichung (22) gewiß richtig. Unter Berücksichtigung der Hilfssätze 2 und 4 können wir also schließen, daß nur folgendes zu beweisen ist: Für jedes spezielle Wertsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$, das nicht aus lauter Nullen besteht, ist

$$F \geqq Df(E)$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier nur dann, wenn jede Transposition $T = (\varkappa, \lambda)$, für die $h_{\varkappa\lambda}$ von Null verschieden ist, in der Gruppe $\mathfrak{G}$ vorkommt und der Bedingung $f(T) = -f(E)$ genügt. Der Einfachheit wegen können wir auch annehmen, daß

$$f(E) = \sum_{\mu=1}^{m} |u_\mu|^2 = 1$$

ist.

Es sei also $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ein solches Wertsystem. Ist dann α einer der Indizes $1, 2, \ldots, n$, so sei wie früher H_α die Teilform (17) von H und $\mathfrak{G}_\alpha$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Permutationen den Index α ungeändert lassen. Unter D_α verstehe man die Determinante von H_α und und unter F_α die Summe

$$F_\alpha = \sum f(G_\alpha) h_{1\gamma_1} \cdots h_{\alpha-1,\gamma_{\alpha-1}} h_{\alpha+1,\gamma_{\alpha+1}} \cdots h_{n\gamma_n},$$

wo G_α alle Permutationen von $\mathfrak{G}_\alpha$ durchläuft. Dann wird

$$F = F_\alpha h_{\alpha\alpha} + F', \qquad D = D_\alpha h_{\alpha\alpha} + D',$$

F' und D' von $h_{\alpha\alpha}$ nicht mehr abhängen. Ich denke mir nun die -1 von $h_{\alpha\alpha}$ verschiedenen Koeffizienten $h_{\varkappa\lambda}$ von H festgehalten und setze $h_{\alpha\alpha}$ durch eine (reelle) Variable t. Bei der aus H hervorgehenden hermiteschen Form

$$H^{(t)} = \Sigma h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda + t x_\alpha \bar{x}_\alpha$$

ten dann an Stelle von F und D die Ausdrücke

$$F^{(t)} = F_\alpha t + F', \qquad D^{(t)} = D_\alpha t + D'.$$

Für $t = 0$ ist nun $H^{(0)}$ gewiß keine positive Form mehr und da ihre ilform H_α noch positiv ist, so muß ihre Determinante $D^{(0)} = D'$ eine cht positive Zahl sein[11]). Läßt man nun t von $h_{\alpha\alpha}$ gegen 0 abnehmen, gibt es daher einen wohlbestimmten Wert $t_0 \geqq 0$ derart, daß $H^{(t)}$ für $> t_0$ eine positive und für $t < t_0$ eine indefinite Form wird. Für $t = t_0$ dann $H^{(t_0)}$ offenbar eine nichtnegative Form von verschwindender Determinante, d. h. es wird

$$D^{(t_0)} = 0, \qquad t_0 = -\frac{D'}{D_\alpha}.$$

ür $t > t_0$ ist ferner nach Satz II gewiß $F^{(t)} > 0$, also ist auch $F^{(t_0)} \geqq 0$. t nun $F_\alpha > D_\alpha$, so wird, weil $h_{\alpha\alpha} > t_0$ ist.

$$F - D = (F_\alpha - D_\alpha) h_{\alpha\alpha} + F' - D' > F^{(t_0)} - D^{(t_0)} = F^{(t_0)} \geqq 0.$$

Soll daher $F \leqq D$ sein, so muß für jedes α auch

4) $$F_\alpha \leqq D_\alpha$$

in. Ist nun β ein von α verschiedener Index aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ d bezeichnet man mit $F_{\alpha\beta}$ und $D_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten von $h_{\beta\beta}$ in den sdrücken F_α und D_α, so lehrt dieselbe Überlegung, angewandt auf die rm H_α und die Gruppe $\mathfrak{G}_\alpha$, daß die Ungleichung (24) nur dann behen kann, wenn auch $F_{\alpha\beta} \leqq D_{\alpha\beta}$ ist. Setzt man diese Betrachtung rt, so erkennt man: Sind $\varkappa$ und λ zwei beliebige Indizes aus der Reihe $2, \ldots, n$ und bezeichnet man mit $\Phi_{\varkappa\lambda}$ und $\Delta_{\varkappa\lambda}$ die Koefffizienten von

$$\frac{h_{11} h_{22} \cdots h_{nn}}{h_{\varkappa\varkappa} h_{\lambda\lambda}}$$

den Entwicklungen von F und D, so kann nur dann $F \leqq D$ sein, nn auch $\Phi_{\varkappa\lambda} \leqq \Delta_{\varkappa\lambda}$ ist. Nun ist aber

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = h_{\varkappa\varkappa} h_{\lambda\lambda} - h_{\varkappa\lambda} h_{\lambda\varkappa} = h_{\varkappa\varkappa} h_{\lambda\lambda} - |h_{\varkappa\lambda}|^2$$

d, wenn T die Transposition $(\varkappa, \lambda)$ bedeutet, wegen $f(E) = 1$

$$\Phi_{\varkappa\lambda} = h_{\varkappa\varkappa} h_{\lambda\lambda} + f(T) |h_{\varkappa\lambda}|^2 \quad \text{oder} \quad = h_{\varkappa\varkappa} h_{\lambda\lambda},$$

---

[11]) Dies wird gewöhnlich etwas anders bewiesen, vgl. Hadamard, loc. cit. [2]) 242, und E. Fischer, loc. cit. [2]) S. 34.

je nachdem T in der Gruppe $\mathfrak{G}$ vorkommt oder nicht. Folglich wird

$$\Phi_{\varkappa\lambda} - \Delta_{\varkappa\lambda} = [1 + f(T)]\,|h_{\varkappa\lambda}|^2 \quad \text{oder} \quad = |h_{\varkappa\lambda}|^2.$$

Da nun aber $|f(T)| \leqq f(E) = 1$ ist [vgl. die Fußnote [10])], so ist jedenfalls

$$\Phi_{\varkappa\lambda} \geqq \Delta_{\varkappa\lambda},$$

und ist insbesondere $h_{\varkappa\lambda}$ von Null verschieden, so steht hier das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $\mathfrak{G}$ die Transposition $T = (\varkappa, \lambda)$ enthält und $f(T) = -1$ wird. Sind nun diese Bedingungen für alle nicht verschwindenden Koeffizienten $h_{\varkappa\lambda}$ erfüllt, so wird $F = D$. In allen übrigen Fällen ist mindestens einmal $\Phi_{\varkappa\lambda} > \Delta_{\varkappa\lambda}$ und daher $F > D$.

Damit ist der Satz III vollständig bewiesen.

Ist wie früher $\chi(G)$ der Charakter der von uns betrachteten unitären Darstellung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$, so wird die Spur der Hermiteschen Form (21) gleich

$$\sum_G \chi(G)\, h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n} - mD. \tag{25}$$

Da die Form (21) nicht negativ ist, so muß diese Differenz positiv oder Null sein, und den Wert Null erhält sie nur dann, wenn die Form (21) identisch gleich Null ist. Der zweite Teil des Satzes III lehrt uns ferner, daß dieser Fall nur dann eintritt, wenn $\mathfrak{G}$ die zu H gehörende Permutationsgruppe $\mathfrak{H}$ enthält und die Gleichung (23) für jedes Element R von $\mathfrak{H}$ bei beliebiger Wahl der Größen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ besteht. Dann müssen auch die Spuren der auf beiden Seiten von (23) stehenden Formen übereinstimmen, d. h. es muß

$$\chi(R) = m\zeta(R) \tag{26}$$

werden. Sind diese Bedingungen umgekehrt erfüllt, so ist gewiß die Differenz (25) gleich Null. Dies liefert den Satz I* in folgender präziserer Fassung:

IV. *Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Permutationsgruppe in den n Vertauschungsziffern* 1, 2, …, n *und $\chi(G)$ ein Charakter des Grades m von $\mathfrak{G}$, so ist für jede positive Hermitesche Form H mit der Determinante D*

$$s = \sum \chi(G)\, h_{1\gamma_1} h_{2\gamma_2} \cdots h_{n\gamma_n} \geqq mD.$$

Das Gleichheitszeichen steht hier dann und nur dann, wenn $\mathfrak{G}$ die zu H gehörende Permutationsgruppe $\mathfrak{H}$ als Untergruppe enthält, und für jedes Element R von $\mathfrak{H}$ die Gleichung (26) *gilt.*

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß aus (26) auch umgekehrt die Gleichung (23) folgt (vgl. den Anfang des § 3). In Verbindung mit dem Hilfssatz 4 (oder auch direkt) ergibt sich hieraus, daß die Gleichung (26) für alle Elemente R von $\mathfrak{H}$ besteht, wenn sie für die in $\mathfrak{H}$ vorkommenden Transpositionen richtig ist.

§ 5.

Folgerungen aus dem Satze IV.

Für eine Diagonalform

$$H = h_{11}x_1\bar{x}_1 + h_{22}x_2\bar{x}_2 + \cdots + h_{nn}x_n\bar{x}_n$$

d stets $s = mD$. Enthält aber insbesondere $\mathfrak{G}$ keine Transposition T r ist für jede in $\mathfrak{G}$ vorkommende Transposition $\chi(T)$ von $-m$ ver- ieden, so ist für jede positive Hermitesche Form, die keine Diagonal- n ist, $s > mD$. Diese Bedingung ist gewiß erfüllt, wenn $\mathfrak{G}$ die Ein- tsgruppe $\mathfrak{E}$ ist oder, wenn $n > 2$ ist und $\mathfrak{G}$ entweder die alternierende ıppe $\mathfrak{A}$ oder die zyklische Gruppe $\mathfrak{C}$ der Ordnung n bedeutet, die rch den Zyklus

$$C = (1, 2, \ldots, n)$$

eugt wird. In den ersten beiden Fällen sei $\chi(G)$ der Hauptcharakter ı $\mathfrak{G}$, also $\chi(G) = 1$.

Für $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ wird dann $s = h_{11}h_{22}\cdots h_{nn}$ und es ergibt sich, daß für e positive Hermitesche Form H

$$D \leqq h_{11}h_{22}\cdots h_{nn}$$

d, und daß hier das Gleichheitszeichen nur dann steht, wenn H eine gonalform ist. Dies ist der in der Einleitung erwähnte Hadamard- e Satz.

Ist ferner $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$, so wird für den Hauptcharakter $\chi(G) = 1$

$$s = P = \sum h_{1\alpha_1}h_{2\alpha_2}\cdots h_{n\alpha_n},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ alle $\frac{n!}{2}$ geraden Permutationen durchläuft. Setzt man nso

$$Q = \sum h_{1\beta_1}h_{2\beta_2}\cdots h_{n\beta_n},$$

bei für $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ alle $\frac{n!}{2}$ ungeraden Permutationen zu setzen sind, wird

$$D = P - Q.$$

Die Ausdrücke P und Q kann man passend *den positiven und den ativen Teil der Determinante* D nennen. Aus IV. ergibt sich nun en $P - D = Q$ der Satz

V. *Ist H eine positive Hermitesche Form, so ist der positive Teil P r Determinante D stets eine positive und der negative Teil Q eine ht negative reelle Zahl. Den Wert Null erhält Q dann und nur dann, n H eine Diagonalform ist.*

In dem dritten vorhin erwähnten Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}$ erhält man, wenn ε eine n-te Einheitswurzel ist, einen Charakter $\chi(G)$ von $\mathfrak{G}$, indem man

$$\chi(C^\nu) = \varepsilon^\nu, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

setzt. Die Ungleichung $s \geqq mD$ läßt sich dann in der Form

$$D \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^\nu h_{1,1+\nu} h_{2,2+\nu} \cdots h_{n,n+\nu}$$

schreiben, wobei $h_{\varkappa,\varkappa+\nu}$ durch $h_{\varkappa,\varkappa+\nu-n}$ zu ersetzen ist, wenn $\varkappa + \nu > n$ ist. Auch hier steht das Gleichheitszeichen nur dann, wenn die positive Hermitesche Form H eine Diagonalform wird.

§ 6.

Beispiele zu den Sätzen III und IV.

Die Fälle $n = 1, 2, 3$ liefern noch nichts besonders Bemerkenswertes. Interessante und, wie es scheint, nicht triviale Relationen erhält man aber schon im Falle $n = 4$.

Es sei zunächst $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_4$ die alternierende Gruppe des Grades 4. Diese Gruppe, die durch die beiden Permutationen

$$A = (1,2)(3,4), \qquad B = (1,2,3)$$

erzeugt wird, besitzt außer dem Hauptcharakter noch zwei lineare Charaktere $\chi_\nu(G)$, die durch die Gleichungen

$$\chi_\nu(A) = 1, \qquad \chi_\nu(B) = \varrho^\nu, \qquad (\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \nu = 1, -1)$$

gekennzeichnet sind. Setzt man zur Abkürzung

$$a = h_{11}h_{22}h_{33}h_{44}, \quad b = h_{12}h_{21}h_{34}h_{43}, \quad c = h_{13}h_{31}h_{24}h_{42}, \quad d = h_{14}h_{41}h_{23}h_{32},$$
$$\alpha = h_{11}h_{23}h_{34}h_{42}, \quad \beta = h_{22}h_{13}h_{34}h_{41}, \quad \gamma = h_{33}h_{12}h_{24}h_{41}, \quad \delta = h_{44}h_{12}h_{23}h_{31},$$

so liefert der Satz IV für jede positive Hermitesche Form H mit vier Veränderlichen, deren Determinante wie immer mit D zu bezeichnen ist,

$$a + b + c + d + 2\Re(\alpha\varrho^\nu + \beta\varrho^{-\nu} + \gamma\varrho^\nu + \delta\varrho^{-\nu}) \geqq D,$$

wobei unter $\Re(u)$ wie üblich der reelle Teil der Größe u zu verstehen ist. Für reelle $h_{\varkappa\lambda}$, d. h. für positive quadratische Formen H ergibt sich insbesondere

$$a + b + c + d - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \geqq D. \tag{27}$$

Das Gleichheitszeichen steht hier in allen Fällen nur dann, wenn H eine Diagonalform ist.

Außer den drei linearen Charakteren besitzt die Gruppe $\mathfrak{A}_4$ noch einen einfachen Charakter des Grades 3. Die zugehörige irreduzible Darstellung

on $\mathfrak{A}_4$ erhält man in unitärer Form am einfachsten, indem man die ren Transformationen bestimmt, welche die drei Linearformen

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \qquad x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \qquad x_1 - x_2 - x_3 + x_4$$

ren, wenn x_1, x_2, x_3, x_4 den 12 Permutationen von $\mathfrak{A}_4$ unterworfen en. Die zugehörige positive Hermitesche Matrix M wird dann

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} a+b-c-d, & \alpha-\bar{\beta}-\gamma+\bar{\delta}, & \bar{\alpha}-\beta+\bar{\gamma}-\delta \\ \bar{\alpha}-\beta-\bar{\gamma}+\delta, & a-b+c-d, & \alpha+\beta-\gamma-\bar{\delta} \\ \alpha-\bar{\beta}+\gamma-\bar{\delta}, & \bar{\alpha}+\beta-\bar{\gamma}-\delta, & a-b-c+d \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind also die drei in der Hauptdiagonale von M stehen- Ausdrücke positiv und mindestens gleich D. Die erste sich so er- nde Ungleichung lautet ausführlich geschrieben

$$h_{11}h_{22}h_{33}h_{44} + |h_{12}|^2|h_{34}|^2 \geqq |h_{13}|^2|h_{24}|^2 + |h_{14}|^2|h_{23}|^2 + D.$$

Ein genaueres Resultat erhält man, indem man die durch die Per- ationen

$$(1,2) \quad \text{und} \quad (1,3,2,4)$$

igte Gruppe der Ordnung 8 betrachtet und auf jeden ihrer vier linearen aktere den Satz IV anwendet. Die vier Ungleichungen, die sich hier- ergeben, kann man zu der Formel

$$h_{11}h_{22}h_{33}h_{44} + |h_{12}|^2|h_{34}|^2 \pm |h_{13}|^2|h_{24}|^2 \pm |h_{14}|^2|h_{23}|^2 \geqq$$
$$|h_{11}h_{22}|h_{34}|^2 + |h_{12}|^2 h_{33}h_{44} \pm 2\,\Re(h_{13}h_{24}h_{32}h_{41})| + D$$

mmenfassen. Das Gleichheitszeichen steht hier nur dann, wenn

$$h_{13} = h_{14} = h_{23} = h_{24} = 0$$

Zwei weitere, analog gebildete Ungleichungen erhält man die Indize d 3 oder 2 und 4 miteinander vertauscht.

Die hier angegebenen Ungleichungen bleiben auch richtig, wenn man voraussetzt, daß H eine nicht negative Hermitesche Form ist. Die D ist dann gleich Null zu setzen.

Es sei noch bemerkt, daß man aus den Ungleichungen, die die Sätze III IV liefern, noch weitere erhalten kann, indem man beachtet, daß zu- h mit $H = \sum h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda$ auch die Hermiteschen Formen

$$\sum h^p_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda, \qquad \sum h^p_{\varkappa\lambda} h^q_{\lambda\varkappa} x_\varkappa \bar{x}_\lambda \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

iv sind [12]), und daß für jedes System von $r > n$ Indizes $\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots \leqq \nu_r$ der Reihe $1, 2, \ldots, n$ die Form

[12]) Vgl. meine Arbeit, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinear- en mit unendlich vielen Veränderlichen, Journal für Mathematik 140 (1911), -28 (S. 14).

$$\sum_{\varrho,\sigma}^{r} h_{\nu_\varrho,\nu_\sigma} x_\varrho \bar{x}_\sigma$$

nichtnegativ ist. Geht man z. B. von einer positiven Hermiteschen Form H mit drei Variabeln aus und betrachtet die nichtnegative Form mit vier Variabeln, die zur Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{33} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{33} \end{pmatrix}$$

gehört, so liefert die Ungleichung (28) die Relation

$$h_{11} h_{22} h_{33}^2 + |h_{12}|^2 h_{33}^2 \geqq 2 |h_{13}|^2 |h_{23}|^2.$$

§ 7.

Die Jacobische Transformation einer nichtnegativen Hermiteschen Form mit unendlich vielen Veränderlichen.

Es sei

$$H = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda \qquad (\bar{h}_{\varkappa\lambda} = h_{\lambda\varkappa})$$

eine beliebige Hermitesche Form mit n Veränderlichen. Setzt man

$$(29) \qquad D_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu}^{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\nu} = \begin{vmatrix} h_{\varkappa_1\lambda_1} & h_{\varkappa_1\lambda_2} \ldots h_{\varkappa_1\lambda_\nu} \\ h_{\varkappa_2\lambda_1} & h_{\varkappa_1\lambda_2} \ldots h_{\varkappa_2\lambda_\nu} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_{\varkappa_\nu\lambda_1} & h_{\varkappa_\nu\lambda_2} \ldots h_{\varkappa_\nu\lambda_\nu} \end{vmatrix},$$

so ist die hierzu konjugiert komplexe Größe gleich $D_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\nu}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu}$. Insbesondere sind die Hauptunterdeterminanten $D_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\nu}^{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\nu}$ von H reelle und, wenn H eine nichtnegative Form ist, nichtnegative Zahlen. Zwischen den Determinanten (29) besteht die Beziehung

$$(30) \quad D_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\lambda}^{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\lambda} D_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\mu}^{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\mu} - \left| D_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\mu}^{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\lambda} \right|^2 = D_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu}^{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu} D_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\lambda,\mu}^{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\nu,\lambda,\mu}.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise, daß der Rang r der Form H in folgender Weise gekennzeichnet werden kann: Es gibt mindestens eine Hauptunterderminante r-ten Grades $D_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r}^{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r}$, die nicht verschwindet, während die aus ihr durch einmalige oder zweimalige Ränderung entstehenden Hauptunterderminanten

$$(31) \qquad D_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_r,\lambda}^{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_r,\lambda} \quad \text{und} \quad D_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_r,\lambda,\mu}^{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_r,\lambda,\mu}$$

lich Null sind. Ist insbesondere H eine nichtnegative Form, so kann erste der Determinanten (31) nicht verschwinden, wenn die zweite von verschieden ist. In diesem Falle gibt es daher, solange $\varrho < r$ ist, jeder nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante des Grades ϱ lestens eine aus ihr durch einmalige Ränderung hervorgehende Haupt-rdeterminante des Grades $\varrho + 1$, die ebenfalls nicht Null ist.

Sind speziell die r ersten Abschnittsdeterminanten

$$D_\varrho = D^{1,2,\ldots,\varrho}_{1,2,\ldots,\varrho}$$

Null verschieden und setzt man

$$u_\varrho = \sum_{\varkappa=\varrho}^{n} x_\varkappa D^{1,\ldots,\varrho-1,\varkappa}_{1,\ldots,\varrho-1,\varrho}, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

ilt für H die Jacobische Zerlegungsformel

$$H = \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{u_\varrho \bar{u}_\varrho}{D_{\varrho-1} D_\varrho}. \qquad (D_0 = 1)$$

ch Koeffizientenvergleichen folgt hieraus

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{1}{D_{\varrho-1} D_\varrho} D^{1,\ldots,\varrho-1,\varkappa}_{1,\ldots,\varrho-1,\varrho} D^{1,\ldots,\varrho-1,\varrho}_{1,\ldots,\varrho-1,\lambda}$$

Ich denke mir nun eine nicht negative Hermitesche Form

$$H = \sum_{\varkappa,\lambda}^{x} h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda$$

unendlich vielen Veränderlichen gegeben. Das Summenzeichen soll bei nur eine rein symbolische Bedeutung haben, vorausgesetzt wird glich, daß $h_{\varkappa\lambda}$ und $h_{\lambda\varkappa}$ konjugiert komplexe Größen sind und daß jedes n

$$H_n = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda$$

nichtnegative Hermitesche Form ist. Der Rang r der Form H, die größte unter den Zahlen ν für die eine der Determinanten (29) Null verschieden ist, kann endlich oder unendlich sein. Der Fall 0, in dem alle Koeffizienten $h_{\varkappa\lambda}$ gleich Null sind, wollen wir von der achtung ausschließen. Auf Grund der früher gemachten Bemerkung das Verhalten der Hauptunterdeterminanten einer nichtnegativen miteschen Form mit endlich vielen Veränderlichen können wir ein bestimmtes System von Indizes

$$1 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \cdots$$

lgender Weise bestimmen: $\varkappa_1$ soll die kleinste Zahl bedeuten, für die $= h_{\varkappa_1\varkappa_1}$ von Null verschieden (also positiv) ist, ferner sei $\varkappa_2$ die kleinste

Zahl, für die $D^{\varkappa_1, \varkappa_2}_{\varkappa_1, \varkappa_2} > 0$ ist, ebenso $\varkappa_3$ die kleinste Zahl, die der Bedingung $D^{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3} > 0$ genügt, usw. Diese Zahlen will ich die *charakteristischen Indizes der Form H* nennen. Nur dann, wenn H von endlichem Range r ist, ist die Anzahl der $\varkappa_\mu$ endlich und zwar gleich r. Unter $\varkappa_{r+1}$ ist in diesem Fall im folgenden das Zeichen ∞ zu verstehen.

Die Determinanten

$$\Delta_\mu = D^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

sind nach Voraussetzung reelle positive Zahlen. Setzt man für jedes α

$$p_{\alpha \varkappa_\mu} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{\mu-1}\Delta_\mu}} D^{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \alpha}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \varkappa_\mu}, \qquad (\Delta_0 = 1)$$

so wird

$$\bar{p}_{\alpha \varkappa_\mu} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{\mu-1}\Delta_\mu}} D^{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \varkappa_\mu}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \alpha}.$$

Ist insbesondere $\alpha < \varkappa_\mu$, so wird

$$D^{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \alpha}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \alpha} = 0$$

und hieraus folgt wegen (30), daß $p_{\alpha \varkappa_\mu} = 0$ wird. Setzt man daher, wenn γ keiner der Zahlen $\varkappa_\mu$ gleich ist, $p_{\alpha\gamma} = 0$, so wird in allen Fällen $p_{\alpha\beta} = 0$, sobald $\alpha < \beta$ ist.

Ist nun $\varkappa$ eine beliebige positive ganze Zahl und bedeutet m die wohlbestimmte Zahl, für die $\varkappa_m \leqq \varkappa < \varkappa_{m+1}$ wird, so ist für jedes $\lambda \leqq \varkappa$

$$\begin{array}{cccc}
h_{\varkappa_1 \varkappa_1}, & \ldots, & h_{\varkappa_1 \varkappa_m}, & h_{\varkappa_1 \varkappa}, \quad h_{\varkappa_1 \lambda} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
h_{\varkappa_m \varkappa_1}, & \ldots, & h_{\varkappa_m \varkappa_m}, & h_{\varkappa_m \varkappa}, \quad h_{\varkappa_m \lambda} \\
h_{\varkappa \varkappa_1}, & \ldots, & h_{\varkappa \varkappa_m}, & h_{\varkappa\varkappa}, \quad h_{\varkappa\lambda} \\
h_{\lambda \varkappa_1}, & \ldots, & h_{\lambda \varkappa_m}, & h_{\lambda\varkappa}, \quad h_{\lambda\lambda}
\end{array}$$

die Koeffizientenmatrix einer nichtnegativen Hermiteschen Form vom Range m, deren m erste Abschnittsdeterminanten die Werte $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ haben, also von Null verschieden sind. Wendet man auf diese Form die Zerlegungsformel (32) an, so ergibt sich insbesondere

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{\Delta_{\mu-1}\Delta_\mu} D^{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\mu - 1, \varkappa}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\mu - 1, \varkappa_\mu} D^{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\mu - 1, \varkappa_\mu}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\mu - 1, \lambda}$$

oder, was dasselbe ist,

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{m} p_{\varkappa, \varkappa_\mu} \bar{p}_{\lambda, \varkappa_\mu}.$$

Diese Gleichung läßt sich unter Berücksichtigung der früher gemachten Festsetzungen über die Zahlen $p_{\varkappa\lambda}$ auch in der Form

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} p_{\varkappa\nu}\,\overline{p}_{\lambda\nu} = \sum_{\nu=1}^{\lambda} p_{\varkappa\nu}\,\overline{p}_{\lambda\nu}$$

eiben. Hieraus folgt

$$h_{\lambda\varkappa} = \overline{h}_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} p_{\lambda\nu}\,\overline{p}_{\varkappa\nu} = \sum_{\nu=1}^{\lambda} p_{\lambda\nu}\,\overline{p}_{\varkappa\nu}$$

daher ist die Gleichung (33) auch für $\varkappa < \lambda$ richtig.
Bezeichnet man nun die unendliche Matrix

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

P, so bedeutet die Gleichung (33) in den Bezeichnungen des Matrizen-
ıls nur, daß $PP^* = P\overline{P}'$ mit der Koefffizientenmatrix $(h_{\varkappa\lambda})$ der Form
bereinstimmt. Wir können also den Satz aussprechen:

VI. *Zu jeder nichtnegativen Hermiteschen Form H mit unendlich n Veränderlichen läßt sich eine unendliche Matrix P vom Typus* (34) *estimmen, daß die Koeffizientenmatrix von H gleich PP^* wird. Sind $_2, \ldots$ die charakteristischen Indizes der Form H, so genügt es, wenn ne der Zahlen $\varkappa_\mu$ ist,*

$$p_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{\mu-1}\,\Delta_\mu}}\, D^{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\mu - 1, \varkappa}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\mu - 1, \varkappa_\mu}$$

wenn λ von allen Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ verschieden ist, $p_{\varkappa\lambda} = 0$ zu n. Sind demnach die $h_{\varkappa\lambda}$ sämtlich reell, so können auch die $p_{\varkappa\lambda}$ eelle Zahlen gewählt werden.

Auf dieses Analogon zur Jacobischen Transformation einer quadra-
en Form mit endlich vielen Veränderlichen hat im Falle $r = \infty$,
μ bereits O. Toeplitz[13]) aufmerksam gemacht und hieraus wichtige
erungen gezogen.

§ 8.

Beziehungen zur Integralrechnung.

Es seien

$$f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots$$

dlich viele reelle oder komplexe Funktionen einer reellen Variabeln t,
n einem endlichen oder unendlichen Intervall $a < t < b$ definiert sein

[13]) Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich Veränderlichen, Göttinger Nachrichten 1907, S. 101—109.

sollen. Versteht man unter $\bar{f}_\varkappa(t)$ die zu $f_\varkappa(t)$ konjugiert komplexe Funktion und setzt man nur voraus, daß die Integrale

$$h_{\varkappa\lambda} = \int_a^b f_\varkappa(t)\,\bar{f}_\lambda(t)\,dt \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

als eigentliche oder uneigentliche Integrale einen Sinn haben, so lassen sich diese Zahlen bekanntlich als die Koeffizienten einer nichtnegativen Hermiteschen Form H deuten. In der Tat sind $h_{\varkappa\lambda}$ und $h_{\lambda\varkappa}$ konjugiert komplexe Größen, ferner wird für jedes n und für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$H_n = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda = \int_a^b |f_1(t)\,x_1 + \cdots + f_n(t)\,x_n|^2\,dt \geq 0.$$

Nimmt man insbesondere an, daß die Funktionen $f_\chi(t)$ im Intervall $a < t < b$ sämtlich stetig sind, so ist die Determinante von H_n dann und nur dann gleich Null, wenn die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linear abhängig sind[14]). Die charakteristischen Indizes $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ der Form H haben in diesem Fall eine sehr einfache Bedeutung: $f_{\varkappa_1}$ ist die erste nicht identisch verschwindende Funktion, $f_{\varkappa_2}$ die erste Funktion, die von $f_{\varkappa_1}$ linear unabhängig ist usw. Der Rang r von H gibt insbesondere die Anzahl der linear unabhängigen unter den Funktionen (35) an. Ein bemerkenswertes Beispiel liefert der Fall

$$a = 0, \qquad b = \infty, \qquad f_\varkappa(t) = e^{-\frac{t}{2}} t^{p_\varkappa - \frac{1}{2}}, \qquad h_{\varkappa\lambda} = \Gamma(p_\varkappa + \bar{p}_\lambda),$$

wobei $p_1, p_2, \ldots$ beliebige Größen mit positiven reellen Bestandteilen bedeuten können.

Es liegt nun die Frage nahe, ob man auf diese Weise alle nichtnegativen Hermiteschen Formen erhalten kann. Auf Grund des Satzes V erkennt man leicht, daß diese Frage im bejahenden Sinne zu beantworten ist.

VII. *Ist $H = \Sigma h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda$ eine nichtnegative Hermitesche Form mit endlich oder unendlich vielen Veränderlichen, so kann man für jedes Intervall (a, b) eine Folge von endlich oder unendlich vielen Funktionen $f_1(t), f_2(t), \ldots$ bestimmen, so daß die Gleichungen* (36) *bestehen.*

Man wähle nämlich im Intervall (a, b) irgendein System von reellen normiert orthogonalen Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$, d. h. ein System von Funktionen, die den Gleichungen

$$\int_a^b \varphi_\alpha^2\,dt = 1, \qquad \int_a^b \varphi_\alpha \varphi_\beta\,dt = 0 \qquad (\alpha \neq \beta)$$

[14]) Vgl. z. B. E. Fischer, loc. cit. [3]), S. 39.

nügen. Ferner bestimme man die Konstanten p_{11}, p_{21}, p_{22}, ... derart, ß die Koeffizienten $h_{\varkappa\lambda}$ die Darstellung (33) zulassen. Setzt man dann

$$f_\varkappa(t) = p_{\varkappa 1}\varphi_1(t) + p_{\varkappa 2}\varphi_2(t) + \ldots + p_{\varkappa\varkappa}\varphi_\varkappa(t),$$

wird

$$\int_a^b f_\varkappa(t)\bar{f}_\lambda(t)\,dt = p_{\varkappa 1}\bar{p}_{\lambda 1} + p_{\varkappa 2}\bar{p}_{\lambda 2} + \ldots + p_{\varkappa\varkappa}\bar{p}_{\lambda\varkappa} = h_{\varkappa\lambda}.$$

Es ergibt sich zugleich, daß, wenn die Konstanten $h_{\varkappa\lambda}$ sämtlich reell d, auch die $f_\varkappa(t)$ als reelle Funktionen gewählt werden können. Sind besondere a und b endliche Zahlen, so lassen sich die $\varphi_\varkappa(t)$ und dem- ch auch die $f_\varkappa(t)$ als gewöhnliche oder als trigonometrische Polynome hlen.

Aus dem Satze VII geht hervor, daß jede Ungleichung für die Koeffi- nten einer nicht negativen Hermiteschen Form als eine Relation ischen gewissen Integralen geschrieben werden kann, also vom Typus r vielbenutzten Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right|^2 \leqq \int_a^b |f|^2\,dt \int_a^b |g(t)|^2\,dt$$

. Beschränkt man sich auf die Betrachtung reeller Funktionen und tzt man zur Abkürzung für je zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = (fg), \qquad \frac{(fg)}{\sqrt{(ff)(gg)}} = (f,g),$$

besagen z. B. die in § 5 angegebenen Ungleichungen (27) und (28) nur, ß für je vier reelle Funktionen f, g, φ, ψ folgende Relationen bestehen:

$$1 + (f,g)^2(\varphi,\psi)^2 + (f,\varphi)^2(g,\psi)^2 + (f,\psi)^2(g,\varphi)^2 \geqq$$
$$(f,g)[(\varphi,f)(\varphi,g) + (\psi,f)(\psi,g)] + (\varphi,\psi)[(f,\varphi)(f,\psi) + (g,\varphi)(g,\psi)] + \Delta$$

d

$$1 + (f,g)^2(\varphi,\psi)^2 \geqq (f,\varphi)^2(g,\psi)^2 + (f,\psi)^2(g,\varphi)^2 + \Delta.$$

ierbei bedeutet Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} (f,f), & (f,g), & (f,\varphi), & (f,\psi) \\ (g,f), & (g,g), & (g,\varphi), & (g,\psi) \\ (\varphi,f), & (\varphi,g), & (\varphi,\varphi), & (\varphi,\psi) \\ (\psi,f), & (\psi,g), & (\psi,\varphi), & (\psi,\psi) \end{vmatrix},$$

e in jedem Falle nichtnegativ ist und für stetige Funktionen nur dann rschwindet, wenn die vier Funktionen linear abhängig sind.

(Eingegangen am 1. September 1917.)

Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik

Von

T. Carleman in Upsala.

Ich werde im folgenden ein Variationsproblem betreffend die Kapa zität eines Zylinderkondensators behandeln. Als Hilfsmittel dient di Theorie der konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche

Unter einem Zylinderkondensator versteht man bekanntlich ei System von zwei leitenden Zylinderflächen mit parallelen Erzeugenden von denen die eine ganz im Innern der anderen enthalten und durc das Vakuum oder einen Isolator von ihr getrennt ist. Ferner solle die Höhen der Zylinder groß gegen die Querschnitte sein. Die Kapazitä definiert man als Elektrizitätsmenge pro Höheneinheit des inneren Zy linders, wenn dieser das Potential Eins hat, während der Außenzylinde zur Erde abgeleitet ist, d. h. das Potential Null besitzt.

Bei der mathematischen Behandlung betrachtet man die Zylinde als unendlich lang. Das Schnittgebilde unseres Kondensators mit eine Ebene senkrecht zu den Erzeugenden möge aus zwei geschlossenen, wede sich selbst noch sich gegenseitig schneidenden Kurven, der äußeren C und der inneren C_1, bestehen. Das Zwischengebiet nennen wir Ω. E wird im folgenden stets angenommen, daß der Isolator zwischen de Zylinderflächen überall dieselbe Dielektrizitätskonstante D besitzt. Be deutet nun U diejenige harmonische Funktion, welche auf C_0 und C die Randwerte 0 bzw. 1 annimmt, so ist die Kapazität durch

$$K = \frac{D}{4\pi} \int_C \frac{\partial U}{\partial n} ds \tag{1}$$

gegeben. Dabei bedeutet C eine beliebige C_1 umschließende Kurve, di nicht außerhalb C_0 verläuft, und $\frac{\partial}{\partial n}$ eine Ableitung in der Richtun der nach C_1 weisenden Normale.

Betreffs der Variation der Kapazität bei Änderung der Zylinde flächen möge folgender Satz zur Orientierung dienen: Die Kapazität

nes Kondensators, dessen Querschnittskurven C_0' und C_1' nicht außerlb Ω verlaufen, ist größer oder gleich K. Gleichheit besteht nur nn, wenn das Kurvensystem $C_0'C_1'$ mit C_0C_1 identisch ist.

Es genügt, den Satz in folgenden beiden Spezialfällen zu beweisen:

1. C_0' identisch mit C_0;
2. C_1' „ „ C_1.

enn bezeichnet man die zu einem Kurvenpaar C_0C_1 gehörige Kapazität it $K(C_0C_1)$, so folgt aus

$$K(C_0'C_1) - K(C_0C_1) \geqq 0,$$

$$K(C_0'C_1') - K(C_0'C_1) \geqq 0$$

e Ungleichung

$$K(C_0'C_1') - K(C_0C_1) \geqq 0.$$

n Falle 1. ist $U' - U$ (unter U' die zu U analoge Funktion für das urvenpaar $C_0'C_1'$ verstanden) eine im Gebiete zwischen C_0 und C_1' haronische Funktion, die auf C_0 verschwindet. Auf C_1' hingegen gilt $' - U \geqq 0$, denn in Ω ist überall $U \leqq 1$. Hieraus folgt, daß auf C_0

)
$$\frac{\partial}{\partial n}(U' - U) \geqq 0$$

. Das Gleichheitszeichen kann nur dann überall gelten, wenn $U' - U$ entisch verschwindet, d. h. wenn C_1' mit C_1 zusammenfällt. Aus (1) nd (2) folgert man nun

$$K' - K = \frac{D}{4\pi}\int_{C_0} \frac{\partial}{\partial n}(U' - U)\, ds \geqq 0,$$

. z. b. w. Der Fall 2. läßt sich in genau analoger Weise erledigen.

Wenn C_1 und C_0 Kreise mit den Radien R_1 bzw. R_0 und dem Mittelnktsabstand d sind, so berechnet sich die Kapazität aus der Gleichung

)
$$\frac{1}{2K} = \log(2R_0R_1) - \log \Psi,$$

$$\Psi = R_0^2 + R_1^2 - d^2 - \sqrt{[(R_0 + R_1)^2 - d^2]\,[(R_0 - R_1)^2 - d^2]}.$$

ür konzentrische Kreise bekommt man

)
$$K = \frac{1}{2\log\frac{R_0}{R_1}}.$$

Wir lassen jetzt die Kurven C_0 und C_1 variieren mit der Bedingung, aß die Längen konstant bleiben. Es ist einleuchtend, daß die Kapatät beliebig hohe Werte annimmt, wenn C_0 und C_1 sich beinahe behren. Dies läßt sich übrigens mit Hilfe der Formel (3) und des voranhenden Satzes streng beweisen. Daß die Kapazität beliebig kleine

Werte annehmen kann, sieht man etwa folgendermaßen ein. Es sei γ ein Kreis mit dem Radius R, der im Innern von C_0 liegt. Um dessen Mittelpunkt beschreiben wir einen anderen Kreis γ_ε mit beliebig kleinem Radius ε. Nun können wir immer innerhalb γ_ε eine Kurve C_1 von beliebiger Länge konstruieren. Die zu $C_0 C_1$ gehörige Kapazität ist aber gemäß dem oben bewiesenen Satze kleiner als die Kapazität eines Kondensators mit den Querschnittslinien γ und γ_ε, d. h. kleiner als

$$\frac{1}{2 \log \frac{R}{\varepsilon}},$$

was mit ε gegen Null strebt.

Hingegen gilt folgender Satz:

Unter allen Zylinderkondensatoren, deren Außen- und Innenzylinder konstante Querschnittsflächen besitzen[1]*, hat derjenige die kleinste Kapazität, welcher aus zwei konzentrischen Kreiszylindern besteht.*

Wenn man Ω auf ein anderes zweifach zusammenhängendes Gebiet Ω^* konform abbildet, geht U in eine harmonische Funktion U^* über, die auf C_0^* und C_1^* 0 bzw. 1 wird. Bedeutet $z^* = f(z)$ die abbildende Funktion, so hat man

$$\frac{\partial U^*}{\partial n^*} = \frac{1}{|f'(z)|} \frac{\partial U}{\partial n},$$

$$ds^* = |f'(z)| ds.$$

Daraus folgt

$$K^* = \frac{D}{4\pi} \int_{C^*} \frac{\partial U^*}{\partial n^*} ds^* = \frac{D}{4\pi} \int_{C} \frac{\partial U}{\partial n} ds = K.$$

Die Kapazität ist also eine Invariante gegenüber konformen Transformationen.

Wir betrachten nun diejenige konforme Abbildung, die Ω auf einen Kreisring mit den Radien l und 1 ($l < 1$) transformiert. l ist bekanntlich durch C_0 und C_1 völlig bestimmt.

Wir können also gemäß (4) unser Problem auch so formulieren:

Für welche Kurven $C_0 C_1$, die Flächenstücke von konstanten Inhalten begrenzen, wird l ein Minimum?

Sei $F(z)$ diejenige analytische Funktion, welche den Kreisring auf Ω abbildet. Wir entwickeln $F(z)$ in eine Laurent-Reihe um den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise:

---

[1]) Dieser Satz gilt auch bei der allgemeineren Nebenbedingung, daß der äußere Inhalt von C_1 und der innere Inhalt von C_0 vorgeschriebene Werte behalten.

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n) r^n e^{in\varphi}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi) r^n + i \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n \sin n\varphi + \beta_n \cos n\varphi) r^n$$

$$= X + iY.$$

Der Kreis mit dem Radius r $(l < r < 1)$ geht in eine Kurve C über, welche eine Fläche vom Inhalte

$$\int_0^{2\pi} X dY = \int_0^{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r^p (\alpha_p \cos p\varphi - \beta_p \sin p\varphi) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} q r^q (\alpha_q \cos q\varphi - \beta_q \sin q\varphi) d\varphi$$

umgrenzt. Wegen bekannter Orthogonalitätsbeziehungen erhält man hieraus

$$\int_C X dY = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \alpha_n^2 r^{2n} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \beta_n^2 r^{2n} - \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n \alpha_n \alpha_{-n} + \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n \beta_n \beta_{-n}$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n|^2 r^{2n},$$

letzteres wegen

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n \alpha_n \alpha_{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} n \beta_n \beta_{-n} = 0.$$

Man kann ohne Schwierigkeit zeigen, daß die Reihe rechter Hand in Formel (5) für $r = 1$ konvergiert und den inneren Inhalt von C_0 repräsentiert. Ebenso erhält man für $r = l$ den äußeren Inhalt von C_1. Daß die Kurven C_0 und C_1 Flächen mit konstantem Inhalt πR^2 bzw. $\pi \varrho^2$ $(\varrho < R)$ umgrenzen sollen, kann also durch die Gleichungen

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n |c_n|^2 = R^2, \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} n |c_n|^2 l^{2n} = \varrho^2$$

ausgedrückt werden.

Dieses Gleichungssystem können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 l^{2n} = \varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n |c_{-n}|^2 \frac{1}{l^{2n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 = R^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n |c_{-n}|^2.$$

Wegen $l < 1$ ist

$$l^2 > l^4 > l^6 > \ldots,$$

mithin auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 l^2 \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 l^{2n} = \varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2 \frac{1}{l^{2n}}. \tag{9}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_n = \ldots = 0. \tag{10}$$

Ferner haben wir wegen $\frac{1}{l^{2n}} > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2 \frac{1}{l^{2n}} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2.$$

Gleichheit findet dann und nur dann statt, wenn

$$c_{-1} = c_{-2} = \ldots = c_{-n} = \ldots = 0. \tag{11}$$

Aus (9) folgt nun

$$l^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 \geqq \varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2,$$

woraus man unter Berücksichtigung von (8) erhält

$$l^2 \geqq \frac{\varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2}{R^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2}$$

und schließlich wegen $\varrho < R$

$$l^2 \geqq \frac{\varrho^2}{R^2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn sowohl (10) als auch (11) erfüllt sind. In diesem Falle ist aber $F(z) = c_0 + c_1 z$ und somit C_0 und C_1 konzentrische Kreise mit den Radien R bzw. ϱ. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Zürich, Oktober 1917.

(Eingegangen am 29. November 1917.)

ber einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie.

Zweite Abhandlung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Wie ich schon im Nachtrage zu meiner ersten Abhandlung hervorhoben habe, bewiesen die Herren Hardy und Littlewood neuerdings: *enn* II *wahr ist, so ist* I *wahr*. In etwas vereinfachter Darstellung[1]) ge ich hier ihren Beweis vor.

---

[1]) Meine Abkürzung beruht z. B. darauf, daß sie $\psi(z)$ in der Gestalt

$$\psi(z) = e^z + \int_0^\infty \frac{e^{-wz}\,dw}{\pi^2 + \log^2 w}$$

ben und für den Beweis von Hilfssatz 2 eine Abhandlung von Herrn W. H. Young anziehen.

Übrigens beweisen sie nicht nur meinen Hilfssatz 5, sondern mit dem gleichen satz sogar, für $\Re(y) > 0$,

$$f(y) = -\sum_{\varrho} \Gamma(\varrho)\, y^{-\varrho} + \Phi_1(y) + y \log \frac{1}{y}\, \Phi_2(y),$$

$\Phi_1(y)$ und $\Phi_2(y)$ ganze Funktionen sind. Aber in dem hierfür als Paradigma geführten Abschnitt 2. 21 machen sie ein Versehen, indem sie auf S. 135 aus inem *Handbuch*, S. 336, die Formel $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log|t|)$, gleichmäßig für $\sigma \leqq -1$, ieren und anwenden. Weder steht diese Formel dort (vielmehr $O(\log|s|)$), noch sie richtig. Denn dann wäre ein festes $a > 0$ vorhanden, so daß $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ $\sigma \leqq -1$, $t = a$ beschränkt ist; wegen

$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{s\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

re also $\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right|$ für $\sigma \geqq 2$, $t = a$ beschränkt, also für ganzzahliges $h > 2$

Hilfssatz 1: *Es sei* $z>0$. *Für das offenbar konvergente Integral*

$$\psi(z)=\int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{\Gamma(s)}\,ds$$

gilt auf der Strecke $0<z<\frac{1}{3}$

$$\psi(z)>\frac{c_1}{z\log^2\frac{1}{z}},\qquad c_1>0.$$

Beweis: Für $0<s<1$ ist $\frac{1}{\Gamma(s)}>c_2 s$, $c_2>0$; für $0<z<\frac{1}{3}$ ist also

$$\psi(z)>\int_0^{\frac{1}{\log\frac{1}{z}}}\frac{z^{s-1}}{\Gamma(s)}\,ds>\frac{c_2}{z}\int_0^{\frac{1}{\log\frac{1}{z}}}z^s s\,ds=\frac{c_2}{z\log^2\frac{1}{z}}\int_0^1 z^{\frac{x}{\log\frac{1}{z}}}x\,dx$$

$$=\frac{c_2}{z\log^2\frac{1}{z}}\int_0^1 e^{-x}x\,dx=\frac{c_1}{z\log^2\frac{1}{z}}.$$

Hilfssatz 2: *Für* $n>1$ *ist*

$$\frac{1}{\log n}=\int_0^\infty e^{-nz}\psi(z)\,dz.$$

Beweis:

$$\frac{1}{\log n}=\int_0^\infty\frac{ds}{n^s}=\int_0^\infty\frac{ds}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-nz}z^{s-1}\,dz=\int_0^\infty e^{-nz}\,dz\int_0^\infty\frac{z^{s-1}}{\Gamma(s)}\,ds.$$

Hilfssatz 3: *Es sei* a_n *für* $n\geqq 2$ *reell,*

$$\varphi(y)=\sum_{n=2}^\infty a_n e^{-ny}$$

für $y>0$ *konvergent (also als Potenzreihe absolut konvergent und stetig).*

$$\left|\frac{\Gamma'(h+ai)}{\Gamma(h+ai)}-\frac{\Gamma'(2+ai)}{\Gamma(2+ai)}\right|=\left|\frac{1}{2+ai}+\frac{1}{3+ai}+\cdots+\frac{1}{h-1+ai}\right|$$

beschränkt, entgegen der Divergenz der harmonischen Reihe.

Aber der Hardy-Littlewoodsche Beweis von (1) ist sofort in Ordnung zu bringen. Es ist nur im Paradigma auf S. 135, Z. 8 so weiterzurechnen:

$$\left|\int_{q-i\infty}^{q+i\infty}\Gamma(s)y^{-s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right|=O\left\{\frac{|y|^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\frac{1}{2}\pi-\vartheta)|t|}\log\sqrt{q^2+t^2}\,dt\right\}\to 0$$

bei $m\to\infty$, $q=-m-\frac{1}{2}\to-\infty$, wegen $\log\sqrt{q^2+t^2}=\frac{1}{2}\log(q^2+t^2)<\frac{1}{2}(q^2+t^2)$

und der Konvergenz von $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\frac{1}{2}\pi-\vartheta)|t|}\,dt$, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\frac{1}{2}\pi-\vartheta)|t|}t^2\,dt$.

werde für $y > 0$

$$\omega(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log n} e^{-ny}$$

etzt. Es sei

$$\liminf_{y=0} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{\frac{1}{y}}} > 0.$$

nn ist

$$\liminf_{y=0} \frac{\omega(y)}{\sqrt{\frac{1}{y}} : \log \frac{1}{y}} > 0.$$

Beweis: Da für $y > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} |a_n| e^{-ny} e^{-nz} \psi(z)\, dz = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{\log n} e^{-ny}$$

nvergiert, ist dort

$$(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n e^{-ny} e^{-nz} \psi(z) dz = \int_0^{\infty} \psi(z) \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-n(y+z)} dz = \int_0^{\infty} \psi(z)\, \varphi(z+y)\, dz.$$

ach Voraussetzung gibt es ein y_0 der Strecke $0 < y_0 < \frac{2}{3}$ und ein $\varkappa > 0$, daß für $0 < y \leqq y_0$

$$\varphi(y) > \frac{\varkappa}{\sqrt{y}}$$

. Nach Hilfssatz 2 konvergiert $\int_{\frac{1}{2}y_0}^{\infty} e^{-2z} \psi(z)\, dz$, also $\int_{\frac{1}{2}y_0}^{\infty} \psi(z) \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-nz} dz$;

r $y > 0$ ist also

$$\left| \int_{\frac{1}{2}y_0}^{\infty} \psi(z)\, \varphi(z+y)\, dz \right| \leqq \int_{\frac{1}{2}y_0}^{\infty} \psi(z) \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-nz} dz,$$

o die rechte Seite von y frei ist. Für $0 < y \leqq \frac{1}{2} y_0$ ist aber nach Hilfssatz 1

$$\int_0^{\frac{1}{2}y_0} \psi(z)\, \varphi(z+y)\, dz > \int_0^{\frac{1}{2}y_0} \frac{c_1}{z \log^2 z} \frac{\varkappa}{\sqrt{z+y}} dz \geqq c_1 \varkappa \int_0^{y} \frac{dz}{z \log^2 z \sqrt{z+y}}$$

$$> \frac{c_1 \varkappa}{\sqrt{2y}} \int_0^{y} \frac{dz}{z \log^2 z} = \frac{c_1 \varkappa}{\sqrt{2}\sqrt{y} \log \frac{1}{y}};$$

aher ist

$$\liminf_{y=0} \frac{\omega(y)}{\sqrt{\frac{1}{y}} : \log \frac{1}{y}} \geqq \frac{c_1 \varkappa}{\sqrt{2}} > 0.$$

Hilfssatz 4: *Es durchlaufe $\varrho = \beta + \gamma i$ die von $-1, -3, -5, \ldots$ verschiedenen Wurzeln der in § 1 meiner ersten Abhandlung genannten ganzen Funktion $L(s)$. Dann ist*

$$\frac{1}{2}\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{1-\varrho}\right)=\sum_{\gamma>0}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{1-\varrho}\right)=\sum_{\gamma>0}\frac{1}{\varrho(1-\varrho)}<\frac{1}{3}.$$

Beweis: Nach S. 497 des *Handbuchs* genügt die ganze Funktion

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s)=\xi(s), \tag{2}$$

welche genau die ϱ zu Wurzeln hat, der Funktionalgleichung

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=-\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)}; \tag{3}$$

nach S. 506 ist

$$\xi(s)=Ae^{Bs}\prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}},$$

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=B+\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{1-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)=\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}-B=\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}-\frac{\xi'(0)}{\xi(0)}=2\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}=\log\frac{4}{\pi}+\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+2\frac{L'(1)}{L(1)}$$

$$=\log\frac{4}{\pi}-C-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\log n}{n},$$

wobei C die Eulersche Konstante bedeutet, also

$$=2\log 2-\log\pi-C+\frac{8}{\pi}\left(\frac{\log 3}{3}-\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}-\frac{\log 9}{9}+\ldots\right)$$

$$<2\log 2-\log\pi-C+\frac{8}{\pi}\frac{\log 3}{3}<1{,}4-1{,}14-0{,}57+\frac{8}{3{,}1}\frac{1{,}1}{3}$$

$$=-0{,}31+\frac{8{,}8}{9{,}3}<-0{,}31+0{,}95=0{,}64<\frac{2}{3}.$$

Hilfssatz 5: *Es werde für $y>0$*

$$f(y)=\sum_{p,m}\chi(p^m)\log p\,e^{-p^m y}$$

gesetzt. Dann ist bei $y\to 0$

$$f(y)=-\sum_{\varrho}\Gamma(\varrho)y^{-\varrho}+O(1).$$

($\sum_{\varrho}$ konvergiert absolut, weil für $0<\sigma<1$ gleichmäßig $\Gamma(s)=O(e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\frac{1}{2}})$ ist und $\sum_{\gamma>0}e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}\gamma^{\frac{1}{2}}$ konvergiert.)

Beweis: Für $y > 0$ ist bekanntlich[1])

$$2\pi i e^{-y} = \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} ds,$$

$$f(y) = \sum_{p,m} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \chi(p^m) p^{-ms} \log p \, ds$$

$$= \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \sum_{p,m} \chi(p^m) p^{-ms} \log p \, ds = -\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \frac{L'(s)}{L(s)} ds.$$

Man wende nun den Cauchyschen Satz auf den letzten Integranden das Rechteck mit den Ecken $2 \pm Ti$, $-\frac{1}{2} \pm Ti$ an, wo $T > 0$ wurzelsei. Die Residuensumme ist $\sum_{|\gamma|<T} \Gamma(\varrho) y^{-\varrho} + \frac{L'(0)}{L(0)}$. Jetzt wachse T zelfrei ins Unendliche. Dann strebt $\int_{2-Ti}^{2+Ti}$ nach dem Obigen gegen $2\pi i f(y)$. Die Integrale über die Horizontalseiten streben gegen 0; folgt aus Formel (8) meiner ersten Abhandlung nebst

$$\Gamma(\sigma + ti) = O(e^{-\frac{\pi}{2}t} t^{\frac{3}{2}}) \qquad (-\tfrac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2)$$

der nach dem Paradigma jenes § 4 durch halbkreisförmige Ausbuchg zu begründenden Relation

$$\sum_{\varrho}'' \int_{2+Ti}^{-\frac{1}{2}+Ti} \Gamma(s) y^{-s} \frac{ds}{s-\varrho} = O(e^{-\frac{\pi}{2}T} T^{\frac{3}{2}} \log T) = o(1).$$

ner strebt $\int_{-\frac{1}{2}+Ti}^{-\frac{1}{2}-Ti}$ gegen $\int_{-\frac{1}{2}+\infty i}^{-\frac{1}{2}-\infty i}$; dies Integral konvergiert sogar absolut, l für $\sigma = -\frac{1}{2}$ nach (2) und (3)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}) = -\frac{1}{2}\log\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} - \frac{1}{2}\log\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} - \frac{L'(1-s)}{L(1-s)} = O(\log t),$$

$$\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)} = O(e^{-\frac{\pi}{2}t} t^{-1} \log t)$$

Zugleich folgt hieraus

$$\int_{+\infty i}^{\frac{1}{2}-\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \frac{L'(s)}{L(s)} ds \Big| \leqq y^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \Gamma(-\tfrac{1}{2}+ti) \frac{L'(-\frac{1}{2}+ti)}{L(-\frac{1}{2}+ti)} \Big| dt = O(y^{\frac{1}{2}}),$$

[1]) Vgl. z. B. S. 215–216 meiner Arbeit *Über die Hardysche Entdeckung unendvieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellem Teil* $\frac{1}{2}$ [Mathematische Annalen, 76 (1915), S. 212–243].

also
$$-2\pi i f(y) = 2\pi i \sum_{\varrho} \Gamma(\varrho) y^{-\varrho} + 2\pi i \frac{L'(0)}{L(0)} + O(y^{\frac{1}{2}})$$
$$= 2\pi i \sum_{\varrho} \Gamma(\varrho) y^{-\varrho} + O(1).$$

Hilfssatz 6: *Es sei wahr, daß alle* $\beta = \frac{1}{2}$ *sind. Dann ist*
$$\sum_{\varrho} |\Gamma(\varrho)| < 0{,}84.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 4 ist wegen $\beta = \frac{1}{2}$
$$\sum_{\gamma>0} \frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2} < \frac{1}{3},$$
also jedes positive $\gamma > \sqrt{3-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{11}{4}} > \frac{3}{2}$. Nun ist für $\gamma > \frac{3}{2}$
$$e^{\frac{\pi}{2}\gamma} > 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\gamma^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\gamma^3 = 1 + \frac{\pi^2}{8}\left(1+\frac{\pi}{6}\gamma\right)\gamma^2 > \frac{1}{2} + \frac{3{,}1^2}{8}\left(1+\frac{3}{6}\frac{3}{2}\right)\gamma$$
$$> \frac{1}{2} + \frac{9{,}6}{8}\frac{7}{4}\gamma^2 = \frac{1}{2} + 2{,}1\,\gamma^2 > 2\left(\frac{1}{4}+\gamma^2\right),$$
folglich, wegen
$$|\Gamma(\tfrac{1}{2}+\gamma i)|^2 = \Gamma(\tfrac{1}{2}+\gamma i)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-\gamma i) = \frac{\pi}{\sin\pi(\frac{1}{2}+\gamma i)} = \frac{\pi}{\cos\pi\gamma i} = \frac{2\pi}{e^{\pi\gamma}+e^{-\pi\gamma}} <$$
$$\sum_{\varrho} |\Gamma(\varrho)| = 2\sum_{\gamma>0} |\Gamma(\tfrac{1}{2}+\gamma i)| < 2\sum_{\gamma>0} \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{\pi}{2}\gamma}} < \sqrt{2\pi}\sum_{\gamma>0}\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2} < \sqrt{6{,}3}\,\frac{1}{3}$$
$$= \sqrt{0{,}7} < 0{,}84.$$

Satz: *Es werde (wie in der ersten Abhandlung) für* $y > 0$
$$g(y) = -\sum_{p} \chi(p) e^{-py}$$
gesetzt. Es sei wahr, daß alle $\beta = \frac{1}{2}$ *sind (Postulat* II*). Dann ist*
$$\liminf_{y=0} \frac{g(y)}{\sqrt{\frac{1}{y}} : \log\frac{1}{y}} > 0,$$
also a fortiori (Tschebyschefs Behauptung I*)*
$$g(y) \to \infty.$$

Beweis: Wird für $y > 0$
$$\varphi(y) = -\sum_{p} \chi(p) \log p\, e^{-py}$$
gesetzt, so ist
$$-f(y) = \varphi(y) - \sum_{p} \log p\, e^{-p^2y} + \log 2\, e^{-4y} + O\sum_{\substack{p,m\\ m>2}} \log p\, e^{-p^m y}.$$

Aus $A(x) = \sum_{p\leqq\sqrt{x}} \log p \sim \sqrt{x}$ folgt, daß von einer Stelle h an $A(x) > 0{,}98\sqrt{x}$ ist, also für $y > 0$

$$\log p\, e^{-p^2 y} = \sum_{n=1}^{\infty} (A(n) - A(n-1)) e^{-n^2 y} = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) (e^{-n^2 y} - e^{-(n+1)^2 y})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A(n) y \int_n^{n+1} e^{-u^2 y}\, du = y \int_1^{\infty} A(u) e^{-u^2 y}\, du > 0{,}98\, y \int_1^{\infty} \sqrt{u}\, e^{-u^2 y}\, du$$

$$= 0{,}98\, y \left(\int_0^{\infty} \sqrt{u}\, e^{-u^2 y}\, du + O(1) \right) = \frac{0{,}98}{\sqrt{y}} \int_0^{\infty} \sqrt{v}\, e^{-v^2}\, dv + O(y)$$

$$= 0{,}98\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \frac{1}{\sqrt{y}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

$B(x) = \sum_{\substack{p^m \leqq x \\ m \geqq 2}} \log p = O\left(\sqrt[3]{x}\right)$ folgt

$$\sum_{\substack{p, m \\ m > 2}} \log p\, e^{-p^m y} = y \int_1^{\infty} B(u) e^{-u^2 y}\, du = O\left(y \int_0^{\infty} \sqrt[3]{u}\, e^{-u^2 y}\, du \right)$$

$$= O\left(y^{-\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \sqrt[3]{v}\, e^{-v}\, dv \right) = O(y^{-\frac{1}{3}}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Daher ist mit Rücksicht auf Hilfssatz 5 und 6 für alle hinreichend nen positiven y

$$\varphi(y) = \sum_{p} \log p\, e^{-p^2 y} - \log 2\, e^{-4y} - O \sum_{\substack{p, m \\ m > 2}} \log p\, e^{-p^m y} - f(y)$$

$$> 0{,}96\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{\varrho} |\Gamma(\varrho)| = \frac{\varkappa}{\sqrt{y}},$$

$\varkappa > 0{,}48\sqrt{\pi} - 0{,}84 > 0{,}48\,\frac{7}{4} - 0{,}84 = 0$ ist. Aus Hilfssatz 3 folgt die Behauptung.

Berlin, den 26. Dezember 1917.

(Eingegangen am 26. Dezember 1917.)

Über das infinitäre Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn die charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat.

Von

Georg Hamel in Aachen.

Herr Perron hat in einer gleichbetitelten Arbeit[1]) den Satz bewiese „Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$y'' + py' + qy = 0$$

den Bedingungen genügen:

(A) $$p \leqq 0, \quad q \leqq 0 \quad \text{für } x > x_0$$

und

(B) $$\lim_{x=+\infty} p = 0. \quad \lim_{x=+\infty} q = 0,$$

so ist für jedes nicht identisch verschwindende reelle oder imaginä Integral y

(C) $$\lim_{x=+\infty} \frac{y'}{y} = 0.\text{“}$$

Vorher gibt Herr Perron schöne Beispiele dafür, daß Bedingung (B) nicl genügt, ja daß es entgegen einer Behauptung Poincarés vorkomme kann, daß für kein einziges Integral (C) erfüllt ist.

Damit aber (C) eintritt, und zwar für alle Integrale, ist (A) keine wegs notwendig, wie an einem Beispiel gezeigt werden wird. Doch lasse sich die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für den Eintritt vo (C) bei Erfülltsein von (B) so formulieren:

Satz 1. *„Damit bei Erfülltsein von* (B) *alle Integrale die Gleichun* (C) *erfüllen, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes Intervall* $(a, b$

---

[1]) Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie 1917, Abt. A, 9. Abhandlung.

as oberhalb eines gewissen x_0 gelegen ist, und jede reelle stetige und ifferentiierbare Funktion w, die an den Enden dieses Intervalles ver-chwindet

$$\int_a^b g(x)q(x)w(x)^2dx \leqq \int_a^b g(x)w'(x)^2\,dx,$$

obei $g(x) = e^{\int p\,dx}$ ist. Sicher genügt also schon $q \leqq 0$, doch ist auch las nicht notwendig." (p und q sind, wie stets im folgenden, *reell* vor-usgesetzt.)

Beweis: Notwendig ist jedenfalls, daß y oberhalb einer gewissen Grenze nicht mehr verschwindet, denn sonst könnte sich

$$z = \frac{y'}{y}$$

nicht einer bestimmten Grenze nähern, weil y und y' nicht gleichzeitig verschwinden können.

Also muß z oberhalb eines gewissen x_0 regulär und endlich sein. Die Funktion z genügt aber der Differentialgleichung

$$z' + z^2 + pz + q = 0.$$

Multiplikation mit gw^2 und Integration von a bis b ergibt

$$\int_a^b gw^2(z' + z^2 + pz + q)\,dx = 0$$

oder nach Umformung durch partielle Integration, unter Benutzung der für w im Satz angegebenen Eigenschaften

$$\int_a^b g\left[(z^2 + pz + q)w^2 - 2ww'z - zw^2\frac{g'}{g}\right]dx = 0$$

oder wegen $\frac{g'}{g} = p$

$$\int_a^b g(wz - w')^2\,dx + \int_a^b gqw^2\,dx - \int_a^b gw'^2dx = 0.$$

Daraus aber folgt wegen $g > 0$

$$\int_a^b gqw^2dx \leqq \int_a^b gw'^2dx \qquad \text{(D)}$$

als *notwendige* Bedingung für (C).

Aber (D) ist auch *hinreichend*[2]). Wenn (D) erfüllt ist, hat

[2]) Vergleiche dazu eine ähnliche Beweisführung in § 11 meiner Arbeit „Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten", Math. Annalen (73) 1912, S. 371—412. Die hier vorgenommene Vereinfachung verdanke ich einer brieflichen Anregung Carathéodorys.

$$(1) \qquad \int_a^b g w'^2 dx - \int_a^b g q w^2 dx$$

für alle an den Grenzen verschwindende w positive Werte und also die untere Grenze Null. Mithin liefert $w \equiv 0$ das Minimum des Ausdrucks (1). Also muß auch die Jacobische Bedingung erfüllt sein. Die Extremalen von (1) genügen aber der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}(gw') + gqw = 0$$

oder

$$w'' + pw' + qw = 0,$$

d. h. unserer Differentialgleichung. Wenn also ein Integral dieser Differentialgleichung noch im Punkte a verschwindet, kann es nicht noch einmal vor b verschwinden, und da b beliebig war, kann es also überhaupt nicht mehr verschwinden.

Damit ist bewiesen, daß alle reellen Integrale unserer Differentialgleichung einmal aufhören zu verschwinden, daß also

$$z = \frac{y'}{y}$$

von einem gewissen x_0 ab endlich ist.

Die Funktion z genügt der Differentialgleichung

$$z' + z^2 + pz + q = 0.$$

Nun sind folgende Möglichkeiten vorhanden:

1. z' wechselt immer noch einmal das Zeichen, z hat also noch immer wieder Maxima und Minima. Diese genügen aber der Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

oder

$$z = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

und gehen daher, sofern sie existieren, wegen (B) gegen Null. Wenn die Maxima und Minima von z das tun und solche noch immer wieder vorkommen, muß auch z gegen Null gehen.

2. z' behält von einem gewissen x ab sein Zeichen. Dann gibt es noch folgende beiden Möglichkeiten:

a) z nähert sich einem bestimmten endlichen Grenzwert a. Dann muß sich z' dem Werte

$$-a^2 - pa - q \to -a^2$$

nähern, der aber nur Null sein kann, da sich sonst z nicht einem endlichen bestimmten Werte nähern könnte. Also wäre $a = 0$, w. z. b. w.

b) Der Wert $|z|$ wächst über alle Grenzen. Dann aber folgte aus Differentialgleichung

$$-\frac{z'}{z^2} = 1 + \frac{p}{z} + \frac{q}{z^2} = 1 + \varepsilon,$$

$\lim \varepsilon = 0$, also nach Integration

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} = \int_{x_0}^{x} (1 + \varepsilon)\, dx.$$

Der rechtsstehende Ausdruck geht aber gegen Unendlich, also muß auch der linksstehende tun und also ist

$$\lim z = 0.$$

r Satz ist damit für reelle y bewiesen.

Um ihn für *komplexe* y zu zeigen, genügt es,

$$\frac{y_1' + iy_2'}{y_1 + iy_2} = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{y_1^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} = P + iQ$$

betrachten.

Nun ist aber von einem gewissen x ab

$$|y_1'| < \varepsilon |y_1| \quad \text{und} \quad |y_2'| < \varepsilon |y_2|,$$

ε beliebig klein, also ist

$$|P| < \varepsilon, \qquad |Q| < \varepsilon \frac{2|y_1 y_2|}{y_1^2 + y_2^2} \leqq \varepsilon.$$

d damit ist der Satz im vollen Umfange bewiesen.

Um ein Beispiel zu geben, wo $q > 0$, genügt es, ein stets endliches z zugeben, das gegen Null konvergiert und für welches

$$-q = z' + z^2$$

hinreichend große x immer noch einmal negativ ist.

Dann hat die Differentialgleichung

$$y'' + qy = 0$$

her ein Integral, für welches (C) erfüllt ist; da aber jedes reelle Integral mal aufhören muß zu verschwinden, wenn eines es tut — die Nullen reeller Integrale trennen sich voneinander nach einem wohlbekannten Satze —, so hat die Differentialgleichung lauter Integrale von Eigenschaft (C).

Nun nehme man

$$z = \frac{\sin x}{x}$$

$$-q = z' + z^2 = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2},$$

s tatsächlich für hinreichend große x immer wieder das Zeichen wechselt.

Geht aus dem vorstehenden Beweis schon hervor, daß immer

$$\frac{y'}{y} \to 0,$$

wenn dies nur für ein reelles y der Fall ist, so kann man weiter beweisen, daß dies für alle wirklich komplexen Integrale y gilt, wenn es für ein solches richtig ist. Ein wirklich komplexes Integral nenne ich ein solches, das sich von einem reellen nicht nur um eine multiplikative komplexe Konstante unterscheidet.

Es gilt also der folgende

Satz 2. *Es gibt drei Typen von Differentialgleichungen*

$$y'' + py' + qy = 0$$

mit $p \to 0$, $q \to 0$:

Entweder ist

$$\text{(C)} \qquad \frac{y'}{y} \to 0$$

für alle Integrale ohne Ausnahme, oder für alle wirklich komplexen Integrale, aber kein reelles, oder aber für kein Integral erfüllt.

Beweis: Man kann für je zwei reelle Integrale setzen

$$y_1 = u \cos v, \qquad y_2 = u \sin v,$$

u heiße die Amplitude, v die Phase.

Dann ist (siehe § 3 der zitierten Annalenarbeit) wegen

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = c e^{-\int p\,dx}$$

$$v = c \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2}\,dx,$$

während u der Differentialgleichung

$$\text{(2)} \qquad \frac{u''}{u} - \frac{c^2 e^{-2\int p\,dx}}{u^4} + p\frac{u'}{u} + q = 0$$

genügt.

Für das komplexe Integral $\eta = y_1 + iy_2$ ist

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{y_1' + iy_2'}{y_1 + iy_2} = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{y_1^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} = \frac{u'}{u} + i\,\frac{c e^{-\int p\,dx}}{u^2},$$

so daß $\frac{\eta'}{\eta}$ dann und nur dann gegen Null konvergiert, wenn

$$\text{(E)} \qquad \frac{u'}{u} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2} \to 0$$

gehen.

Nun ist für irgendein reelles Paar unabhängiger Integrale das Qua-
t der Amplitude

$$U^2 = Ay_1^2 + 2By_1y_2 + Cy_2^2 \quad \text{mit} \quad AC - B^2 > 0, \quad A > 0$$

er

$$= u^2 (A\cos^2 v + 2B\cos v \sin v + C\sin^2 v) = u^2 [\alpha^2 + \beta^2 \cos 2(v - v_0)]$$

$\beta^2 < \alpha^2$.

Wenn also $\frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2}$ gegen Null geht, so tut dasselbe $\frac{e^{-\int p\,dx}}{U^2}$, denn ist $U^2 > (\alpha^2 - \beta^2)\,u^2$.

Ferner ist

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u} - \frac{2\beta^2 \sin 2(v - v_0)}{\alpha^2 + \beta^2 \cos 2(v - v_0)}\,v' = \frac{u'}{u} - \frac{2\beta^2 \sin 2(v - v_0)}{\alpha^2 + \beta^2 \cos 2(v - v_0)} \cdot \frac{ce^{-\int p\,dx}}{u^2}.$$

Wenn also die Bedingungen (E) für ein u erfüllt sind, sind sie auch jedes andere U erfüllt. Denn es ist ja

$$\left|\frac{U'}{U}\right| < \left|\frac{u'}{u}\right| + 2\,|c|\,\frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

mit ist auch der zweite Satz bewiesen.

Aus dem bisherigen und aus der Differentialgleichung (2) aber er-
nt man noch folgendes:

Satz 3. *Wählt man in allgemeinster Weise eine reelle positive,*
eimal differenziierbare Funktion u und irgendeine reelle Funk-
n p, so daß

$$p \to 0, \quad \frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2} \to 0, \quad \frac{u'}{u} \to 0, \quad \frac{u''}{u} \to 0,$$

erhält man mit

$$q = -\frac{u''}{u} + \frac{e^{-2\int p\,dx}}{u^4} - p\,\frac{u'}{u}$$

e Differentialgleichungen

$$y'' + py' + q = 0$$

welche (B) *erfüllt ist und alle wirklich komplexen Integrale die*
genschaft (C) *haben. Ist außerdem noch*

$$\int \frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2}\,dx \to \infty.$$

üllt, so gilt (C) *für die reellen Integrale nicht, wenn hingegen das*
stehende Integral beschränkt ist, gilt (C) *ausnahmslos für alle Integrale.*

Denn das vorstehende Integral ist die Phase v. Wächst diese ins
endliche, so haben alle reellen Integrale unendlich viele Nullstellen,
lernfalls hingegen nur endlich viele. Und davon allein hängt es, ab-

gesehen von den Bedingungen (B), ab, ob für die reellen Integrale (C) erfüllt ist oder nicht.

Zusatz: *Man kann die vorstehenden Bedingungen ersetzen durch*

(B) $$p \to 0, \quad q \to 0$$

sowie

(F) $$\frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2} \to 0$$

allein.

Denn sowie (F) erfüllt ist, folgt aus (2), daß u einer Differentialgleichung

$$u'' + pu' + q_1 u = 0$$

genügt, wo

$$q_1 = q - \frac{e^{-2\int p\,dx}}{u^4} \to 0.$$

Da aber u nie Null wird, nähert sich nach dem Beweise des ersten unserer Sätze $\frac{u'}{u}$ dem Werte Null.

Je nachdem also außer (B) *noch* (F) *erfüllt ist oder nicht, haben alle komplexen Integrale die Eigenschaft* (C) *oder aber keines von ihnen.*

Man kann nun den zweiten Typ (alle wirklich komplexen Integrale haben die Eigenschaft (C), die reellen dagegen nicht) ähnlich wie in Satz (1) auch durch p, q allein charakterisieren.

Wenn die Bedingungen des Satzes (1) nicht erfüllt sind, wird

$$\int_a^b g\,q\,w^2\,dx \leqq \int_a^b g\,w'^2\,dx$$

nicht mehr für alle Intervalle a bis b, wohl aber noch für hinreichend kleine Intervalle erfüllt sein, und zwar gibt der größte zulässige Wert von b den zu a konjugierten Punkt des Variationsproblems

$$\int_a^b g\,(w'^2 - q\,w^2)\,dx = \text{Min.}$$

Satz 4. *Nehmen wir irgendein x_0 und sei x_1 der zu x_0 gehörende konjugierte Punkt des vorstehenden Variationsproblems.*

Sei ferner

$$x_0 \leqq a < x_1,$$

a_1 zu a, a_2 zu a_1 usw. a_n zu a_{n-1} konjugiert. Dann ist hinreichend und notwendig dafür, daß alle wirklich komplexen Integrale die Eigenschaft (C) *haben, die reellen dagegen nicht, daß gleichmäßig in a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{da_n}{da} = \infty.$$

Dabei können die $a_1, a_2 \ldots$ *auch so definiert werden, daß stets*

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu} g(w'^2 - qw^2)\,dx \geqq 0$$

alle in a_ν *und* b_ν *verschwindenden* w, *solange* $b_\nu \leqq a_{\nu+1}$ *ist.*

Beweis. Wegen $y_1 = u\cos v$, $y_2 = u\sin v$, kann jedes in a verschwindende Integral durch

$$y = Cu\sin v$$

gestellt werden, wobei

$$v = c\int_a^x \frac{e^{-\int p\,dx}}{u^2}\,dx = \int_a^x Q\,dx$$

$Q = c\dfrac{e^{-\int p\,dx}}{u^2}$ der imaginäre Teil von $\dfrac{y_1' + iy_2'}{y_1 + iy_2}$, dessen Konvergenz gen Null nach dem Zusatz zu Satz 3 für den in Rede stehenden zweiten p charakteristisch ist.

Da aber y_1 und y_2 die Extremalen des genannten Variationsproblems d, so ist der zu a gehörende konjugierte Punkt a_1 durch

$$\int_a^{a_1} Q\,dx = \pi,$$

gemein der Punkt a_ν durch

$$\int_a^{a_\nu} Q\,dx = \nu\pi$$

iniert. Daraus aber folgt

$$\frac{da_\nu}{da} = \frac{Q(a)}{Q(a_\nu)}.$$

Wird nun a auf das Intervall x_0 bis x_1 beschränkt, so kann in jedem zelnen Falle, da in u ein konstanter Faktor frei ist, $Q(a) = 1$ genommen werden, so daß

$$\frac{da_\nu}{da} = \frac{1}{Q(a_\nu)}.$$

Soll also $\lim\limits_{x=\infty} Q(x) = 0$ sein, so muß

$$\lim_{n=\infty} \frac{da_n}{da} = \infty$$

n. Umgekehrt, wenn dies gleichmäßig in a der Fall ist, so ist sicher

$$\lim_{n=\infty} Q(a_n) = 0.$$

Da aber jedes x ein a_n ist, d. h. sukzessive konjugierter Punkt eines a im Intervall von x_0 bis x_1, so ist auch

$$\lim_{x=\infty} Q(x) = 0,$$

denn es ist ja $|Q(a_n)| < \varepsilon$ für hinreichend große n und alle a des Intervalls von x_0 bis x_1. Damit ist der Beweis geliefert.

Aachen, den 14. Dezember 1917.

(Eingegangen am 29. Dezember 1917.)

Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen.

Erste Abhandlung.

Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Betrachten wir eine in gleichförmiger Rotation um eine feste Achse griffene homogene Flüssigkeitsmasse von der Dichte f, deren Teilchen ander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Liegt die Winkel- schwindigkeit ω unterhalb des Wertes $\Omega' = [0{,}1871 \cdot 2\pi\varkappa f]^{\frac{1}{2}}$ ($\varkappa$ = Gauß- ne Gravitationskonstante), so gibt es, wie man seit längerer Zeit weiß, ei verschiedene Ellipsoidkörper als Figuren des relativen Gleichgewichtes[1]) die beiden Maclaurinschen Rotationsellipsoide sowie das von Jacobi tdeckte dreiachsige Ellipsoid. Die drei Gleichgewichtsfiguren ändern h stetig mit ω. Für $\omega = \Omega'$ fallen das Jacobische und dasjenige aclaurinsche Ellipsoid, dessen Abplattung geringer ist, zusammen. Für alle terhalb einer weiteren Schranke $\Omega'' = [0{,}2247 \cdot 2\pi\varkappa f]^{\frac{1}{2}}$ gelegenen Werte $> \Omega'$ gibt es nur noch zwei Gleichgewichtsellipsoide — die Maclaurin- hen. Sie ändern sich mit ω stetig und fallen für $\omega = \Omega''$ zusammen. berhalb des Wertes Ω'' sind Ellipsoide als Gleichgewichtsfiguren nicht ehr möglich. Das „Rotationsmoment" der Flüssigkeit[2]) wächst bei den aclaurinschen Ellipsoiden von dem Werte Null (für $\omega = 0$, entsprechend ner Kugel) stetig ins Unendliche (eine unendliche Kreisscheibe senk-

---

[1]) Der Einfachheit halber wird im folgenden in der Regel kurz von „Gleich- wichtsfiguren" die Rede sein.

[2]) Genauer: das Moment der Bewegungsgröße um die Rotationsachse.

recht zur Umdrehungsachse als Gleichgewichtsfigur, $\omega = 0$). Die Winkel- geschwindigkeit hat, als Funktion des Rotationsmomentes aufgefaßt, ein Maximum gleich Ω''. Für $\omega = \Omega'$ zweigt von der Folge der Maclaurin- schen Ellipsoide diejenige der Jacobischen Figuren ab. Das Rotations- moment wächst mit sinkendem ω ins Unendliche ($\omega = 0$ entspricht ein unendlich langer Zylinder mit Erzeugenden senkrecht zur Umdrehungsachse).

Zusammenfassend werden wir sagen: Für alle positiven $\omega < \Omega'$ gibt es drei, für $\Omega' \leqq \omega < \Omega''$ zwei „lineare Reihen" von Gleichgewichts- figuren[3]). Die Werte Ω' und Ω'' sind „Verzweigungsstellen", — hier hängen verschiedene lineare Reihen miteinander zusammen.

Eine solche Auffassung führt naturgemäß zu der Frage, ob es nicht weitere lineare Reihen von Gleichgewichtsfiguren gibt, die mit Ellipsoid- figuren zusammenhängen. Genauer formuliert, lautet die Fragestellung so: Gibt es für hinreichend kleine $|\Delta\omega|$ zu dem Werte $\omega + \Delta\omega$ ($\omega \leqq \Omega''$) der Winkelgeschwindigkeit gehörige, von den Ellipsoiden verschiedene Gleichgewichtsfiguren, die für $\Delta\omega \to 0$ stetig in ein zu ω gehöriges Ellipsoid übergehen?

Der erste, der die Existenz neuer Gleichgewichtsfiguren im An- schluß an diejenigen von Maclaurin und Jacobi vermutet hat, scheint Tschebyschef gewesen zu sein. Nach Angaben des Herrn Liapounoff hat Tschebyschef den russischen Mathematikern verschiedentlich die Auf- gabe gestellt, die Existenz jener Gleichgewichtsfiguren, vor allem in der Umgebung der Verzweigungsstelle Ω'', festzustellen[4]). Als den voraussicht- lich zum Ziele führenden Weg hat Tschebyschef das Verfahren der sukzessiven Approximationen bezeichnet.

Das Vorhandensein unendlich vieler Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der klassischen Ellipsoidkörper ist bereits durch die ersten auf Anregung von Tschebyschef unternommenen Untersuchungen von Herrn Liapounoff wahrscheinlich geworden. In seiner im Jahre 1884 in russischer Sprache veröffentlichten Dissertation zeigt Herr Liapounoff, indem er sich auf die Betrachtung einer ersten Näherung beschränkt, daß es unendlich viele Verzweigungswerte der Winkelgeschwindigkeit gibt, in denen neue lineare Reihen von Gleichgewichtsfiguren abzweigen. Die ausführliche, im Jahre 1904 in französischer Übersetzung ohne wesent- liche Änderungen neu erschienene Abhandlung enthält darüber hinaus ein-

---

[3]) Eine präzise Fassung des Begriffes einer linearen Reihe von Gleichgewichts- figuren vergleiche Kapitel I § 1.

[4]) Vgl. A. Liapounoff, „Sur un problème de Tchebychef", Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St-Pétersbourg, Band 17 der achten Reihe, Nr. 3, 1905, S. 1–31 (insbes. S. 1–2).

ende, auf der Untersuchung der zweiten Variation beruhende Stabili-
betrachtungen[5]).

Die von Herrn Liapounoff unter Zugrundelegung einer ersten erung bestimmten hypothetischen Gleichgewichtsfiguren sind ohne ntnis seiner damals den weiteren Kreisen noch unzugänglichen Unter-ungen von Poincaré in einer bekannten Abhandlung wieder entdeckt den[6]). Auch Poincaré begnügt sich mit einer ersten Näherung und chränkt sich an manchen Stellen selbst auf Erwägungen von heuristi-m Wert, indem er aus dem Verhalten mechanischer Systeme mit einer lichen Anzahl Freiheitsgrade durch Analogie Schlüsse auf das Verhalten ogener Flüssigkeiten zieht[7]). Die Ansätze von Poincaré gehen inso-über die ersten Ansätze von Herrn Liapounoff hinaus, als sie auf ebige, z. B. ringförmige, oder auch aus mehreren Einzelmassen be-ende, *als bekannt vorauszusetzende* Ausgangsfiguren anwendbar er-inen.

Ein wesentlicher von Poincaré postulierter Existenzsatz besagt, daß *einer jeden Gleichgewichtsfigur im allgemeinen eine (der reguläre l), in besonderen Fällen mehr als eine lineare Reihe von Gleichgewichts-ren (der Verzweigungsfall) ausgeht*[8])[9]). Bei den Flüssigkeitsellipsoiden

[5]) Vgl. A. Liapounoff, „Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre liquide animé d'un mouvement de rotation", Annales de Toulouse, (2) 6 (1904), –116.

[6]) Vgl. H. Poincaré, „Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouve-t de rotation", Acta mathematica, 7 (1885), S. 259–352 sowie die dieser Haupt-it vorangehenden Noten C. R. 100 (1885), S. 1068–1070 und C. R. 101 (1885), 07–309. Man vergleiche ferner H. Poincaré, „Sur la stabilité de l'équilibre figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation", Phil. Transactions 98 (1902), S. 333–373 und „Figures d'équilibre d'une masse fluide", Paris 1902 e G. H. Darwin, „The Stability of the Pear Shaped Figure of Equilibrium of a ating Mass of Liquid", Phil. Transactions A. 200 (1903), S. 251–314.

Eine recht klare, in Einzelheiten über die zum Teil skizzenhaft gehaltenen Dar ngen von Poincaré hinausgehende Darstellung der Poincaréschen Methode ihrer wesentlichen Ergebnisse gibt die Dissertation von K. Schwarzschild, Poincarésche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssig-smasse", Neue Annalen der K. Sternwarte München, Bd. III, 1896, S. 1—69. tere Literatur siehe, Encyclopédie des Sciences Mathématiques, Édition française, e IV, volume 5, Fascicule 2, „Développements concernant l'hydrodynamique", osé d'après l'article allemand de A. E. H. Love par P. Appell, H. Beghin et Villat, 1914 (S. 155–160).

[7]) In der in der Fußnote [6]) an vierter Stelle zitierten späteren Arbeit wird zweite Näherung betrachtet.

[8]) Vgl. K. Schwarzschild, loc. cit. [6]) S. 28—41. Eine präzise Fassung des es wird weiter unten in den Kapiteln II und III gegeben.

[9]) Thomson und Tait geben in ihrem bekannten Werk, „Treatise on Natural osophy", zweite Auflage, Band I, zweiter Teil, 1883, § 778, S. 332–335, ohne Beweis

bietet der reguläre Fall nichts neues; — man erhält die bekannten zu den Nachbarwerten der Winkelgeschwindigkeit gehörigen Ellipsoide. Anders wenn der Verzweigungsfall vorliegt. Hier ist die Existenz neuer von den Ellipsoiden verschiedener Gleichgewichtsfiguren anzunehmen. Der Aufstellung und der Diskussion der, wie bereits erwähnt, zuerst von Herrn Liapounoff kurz vorher gefundenen Kriterien für das Auftreten des Verzweigungsfalles ist ein großer Teil der ersten Poincaréschen Arbeit gewidmet.

Einen strengen Beweis der Existenz unendlich vieler Gleichgewichtsfiguren in der Nähe der Maclaurinschen und der Jacobischen Ellipsoide sowie eine vollständige Erledigung der daran anknüpfenden Stabilitätsfragen hat nach einer Reihe von Jahren Herr Liapounoff in einer Folge groß angelegter Abhandlungen geliefert[10]). Nachdem in der ersten Abhandlung die Methode und die Hauptergebnisse skizziert worden sind, wird in der unter 2. genannten Arbeit unter wesentlicher Zuhilfenahme der Laméschen Funktionen[11]) der fragliche Beweis durch Entwicklung in Potenzreihen und eine Majorantenmethode erbracht (vgl. die Bemerkungen am Schluß des I. und des III. Kapitels dieser Arbeit). Die auf 2. zeitlich folgende Arbeit 6. behandelt das Stabilitätsproblem. Die unter 3.

---

einige Sätze über die Existenz und die Stabilität von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten an. Für hinreichend große Werte des Rotationsmomentes gibt es ringförmige sowie aus mehreren konzentrischen Ringen bestehende Figuren, ferner Gleichgewichtsfiguren, die in mehrere einfach zusammenhängende Massen zerfallen.

Die wirkliche Existenz jener von Ellipsoiden verschiedenen Gleichgewichtsfiguren, die im Sinne der Poincaréschen Theorie als Ausgangspunkt zur Bestimmung linearer Reihen neuer Gleichgewichtsfiguren dienen könnten, ist meines Wissens bis jetzt noch nicht streng bewiesen. Literatur hierzu vgl. den in der Fußnote [6]) zitierten Enzyklopädieartikel.

[10]) Vgl. A. Liapounoff, 1. „Sur un problème de Tchebychef", Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St-Pétersbourg, Band 17 der achten Reihe, Nr. 3, 1905, S. 1–31; 2. „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation. Première partie. Étude générale du problème". Mémoire présenté à l'Académie impériale des sciences, 1906, S. 1–225; 3. „Deuxième partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin", 1909, S. 1–202; 4. „Troisième partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi", 1912, S. 1–227; 5. „Quatrième partie. Nouvelles formules pour la recherche des figures d'équilibre", 1914, S. 1–112; 6. „Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation", Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St-Pétersbourg, Band 22 der ersten Reihe, Nr. 5, 1908, S. 1–140; 7. „Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation", Annales de l'École Normale, (3) 26 (1909), S. 473–483.

[11]) Die bereits in der in der Fußnote [5]) zitierten Arbeit, wie auch von Poincaré a. a. O. gebraucht worden sind.

und 5. zitierten Abhandlungen sind der ins Einzelne gehenden Durchrung der gewonnenen allgemeinen Ergebnisse gewidmet. In der zut genannten Arbeit werden überdies die allgemeinen Resultate der handlung 2. unter Zugrundelegung eines modifizierten Systems (krummger) Koordinaten wiedergewonnen. Die Abhandlung 7. behandelt das der Arbeit 2. nur zum Teil erledigte Problem der Vollständigkeit der ltenen Lösungen.

Die eingehenden, sehr umfangreichen Untersuchungen von Herrn apounoff sind den besonderen Eigenschaften der ellipsoidischen Gleichvichtsfiguren angepaßt und dürften sich nicht ohne schwierige Spezialrachtungen und auch dann nicht in allen Teilen auf andere Gleichvichtsfiguren übertragen lassen. Aber auch in dem besonderen Falle der claurinschen und Jacobischen Ellipsoide erscheint es erwünscht, für allgemeinen Existenzsätze einen kürzeren Beweis zu besitzen.

In der vorliegenden Abhandlung wird der von Poincaré postulierte istenzsatz in voller Allgemeinheit bewiesen. In dem ersten Kapitel rd das Problem auf die Auflösung einer nichtlinearen Integro-Differenlgleichung (§ 4, Formel (68)), die in einer entsprechend spezialisierten stalt bereits bei Herrn Liapounoff vorkommt[12]), zurückgeführt. Diese eichung wird sodann durch sukzessive Approximationen gelöst. Eine uptrolle spielt hierbei eine gewisse lineare homogene Integralgleichung apitel II, Formel (1)). Sie hat, wenn die Gleichgewichtsfigur, von der gegangen wird, aus Umdrehungskörpern um die Rotationsachse besteht, ndestens eine, sonst mindestens zwei linear unabhängige Nullösungen. d diese trivialen Nullösungen die einzigen von Null verschiedenen Lögen der Integralgleichung, so liegt der reguläre Fall vor (II. Kapitel); t es weitere Nullösungen, so hat man mit einem Verzweigungsfall zu (III. Kapitel). Die von Herrn Liapounoff und von Poincaré für ipsoide aufgestellten Kriterien erscheinen damit in einem neuen Licht.

Der Konvergenzbeweis wird durch ein geeignetes Auswahlverfahren racht, das schneller zum Ziele führt, als die von Liapounoff benutzte jorantenmethode. Als wesentlich erweist sich hierbei die Einführung mplexer Werte der Parameter des Problems, insbesondere der komxen Winkelgeschwindigkeit. Neben der Konvergenz der sukzessiven proximationen wird dabei auch die Konvergenz der Potenzreihen wonnen, die den in dem besonderen Falle der Ellipsoidkörper als Ausgsfiguren von Herrn Liapounoff betrachteten Entwicklungen entechen. Durch die systematische Benutzung funktionentheoretischer

[12]) Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. [4]) S. 8, loc. cit. [10]) Abhandlung 2., S. 22, loc. [10]) Abhandlung 5., S. 16.

Hilfsmittel gestaltet sich auch die Ableitung der Integro-Differentialgleichung des Problems im I. Kapitel besonders übersichtlich.

Damit in den beiden vorhin als möglich hingestellten Fällen neue Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ausgangsfigur wirklich existieren, müssen noch unendlich viele Bedingungsgleichungen erfüllt sein. Diese sind in dem regulären Falle von selbst erfüllt, wenn der Ausgangskörper eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse und eine durch diese hindurchgehende Ebene zu Symmetrieebenen hat. Alle bis jetzt bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren haben diese Eigenschaft. Wahrscheinlich gibt es keine anderen Gleichgewichtsfiguren[13]). In dem Verzweigungsfalle sind jene Bedingungen von selbst erfüllt, wenn es überdies möglich ist, ein System nicht trivialer Lösungen anzugeben, die in bezug auf die beiden Symmetrieebenen symmetrisch sind und mit den trivialen Lösungen zusammen ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen darstellen. Wahrscheinlich gibt es keine anderen Gleichgewichtsfiguren.

In dem vierten Kapitel wird der folgende Satz bewiesen. Die Gesamtheit der reellen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ausgangsfigur, die von Jordanschen Flächen begrenzt sind, ein von dem Volumen jener Figur hinreichend wenig verschiedenes Volumen haben und zu einem Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit in der Umgebung des Wertes ω_1 gehören, ist durch die in den Kapiteln II und III gefundenen reellen Figuren erschöpft. Dieses Resultat ist in dem besonderen Falle der Flüssigkeitsellipsoide als Ausgangsfiguren von Herrn Liapounoff in den Abhandlungen 2. und 7. abgeleitet worden. Es gilt ferner der folgende weitergehende Satz: *Es sei eine von einer endlichen Anzahl Jordanscher Flächen begrenzte, aus einer oder mehrerer Massen bestehende Gleichgewichtsfigur vom bestimmten Volumen gegeben, und es möge die Schwerkraft, d. h. die Resultierende aus Anziehungs- und der Zentrifugalkraft, auf allen Randkomponenten von Null verschieden sein. Man kann dann in mannigfaltiger Weise Systeme Gaußscher Parameter bestimmen, so daß die kartesischen Koordinaten der Punkte auf einer jeden Randkomponente, als Funktionen jener Parameter aufgefaßt, stetige Ableitungen aller Ordnungen haben.* Wahrscheinlich sind die Randflächen stets analytisch und regulär. Herr Liapounoff beweist demgegenüber nur, daß die neuen Gleichgewichtsfiguren eine stetige Normale haben. Das in der vorliegenden Arbeit bewiesene weitergehende Resultat gestattet das Verfahren auf die gefundenen neuen Figuren wieder anzuwenden. Man

[13]) In der Nachbarschaft einer etwa vorhandenen Gleichgewichtsfigur ohne die beiden Symmetrieebenen würden auch in dem regulären Falle nur ausnahmsweise weitere Figuren des relativen Gleichgewichtes liegen können. Im allgemeinen würde man darum allemal mit isolierten Gleichgewichtsfiguren zu tun haben.

ı also schrittweise weiter kommen, bis man durch Singularitäten auf-
lten wird, die in der Natur der Sache liegen. Solche Singularitäten
ben sich z. B., wenn die Schwerkraft in einzelnen Punkten auf der
rfläche einer Gleichgewichtsfigur verschwindet.

Das letzte, fünfte Kapitel enthält den Beweis einiger für das Ge-
en der Methode wesentlicher Hilfssätze. Um den Zusammenhang
Betrachtungen nicht zu unterbrechen, ist der Beweis auf den Schluß
Arbeit verlegt worden.

Das im folgenden eingeschlagene Verfahren ist mannigfaltiger weiterer
endungen fähig. Ich hoffe auf diese später zurückkommen zu können.

Erstes Kapitel.

Problemstellung.

§ 1.

In dem Raume der kartesischen Koordinaten x, y, z sei eine Anzahl ($\geqq 1$)
iete, deren Gesamtheit mit T bezeichnet werden soll, gegeben. Die
renzung S von T besteht aus einer Anzahl geschlossener, doppel-
ktfreier, stetig gekrümmter Flächenschalen („Komponenten"), die ein-
er nicht berühren. Bekanntlich kann jede Komponente von S von
r endlichen Anzahl Gebiete dachziegelartig überdeckt werden, so daß
einem jeden Teilgebiete entweder x eine eindeutige Funktion von y
z, oder etwa y eine ebensolche Funktion von x und z darstellt.
Lage der Punkte auf S denken wir uns durch ein geeignetes System
ıßscher Parameter ξ und η bestimmt. Im allgemeinen gehört zu
m jeden der soeben erwähnten Teilgebiete ein besonderes System der
ameter ξ und η. Es seien

$$x = X(\xi, \eta), \qquad y = Y(\xi, \eta), \qquad z = Z(\xi, \eta)$$

Gleichungen von S. Wir nehmen an, daß die Funktionen X, Y
Z stetige Ableitungen aller Ordnungen haben[14]). Der Ausdruck

$$\left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^2$$

offenbar nirgends gleich Null.

Den Raum T denken wir uns mit einer homogenen Flüssigkeit der
ıte f erfüllt, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz
ehen. Weitere Kräfte liegen nicht vor, insbesondere soll der Außen-

[14]) Diese Voraussetzung bildet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Sie ist,
wir im Kapitel IV § 1 zeigen werden, stets erfüllt, wenn T, wie im vorliegenden
e, eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit mit stetiger Normale darstellt.

druck gleich Null sein. Wir bezeichnen die laufenden Koordinaten eines Punktes auf S mit X, Y, Z, das Newtonsche Potential von T mit $V(x, y, z)$, die Gaußsche Gravitationskonstante mit $\varkappa$.

Die Flüssigkeit soll um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω wie ein starrer Körper gleichförmig rotieren. Damit T eine[15]) Figur des relativen Gleichgewichtes sei, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Der Ausdruck

$$V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(X^2 + Y^2) \tag{3}$$

muß auf einer jeden Komponente von S einen konstanten Wert haben[16]).

2. Die Resultierende aus Anziehungs- und der Zentrifugalkraft muß auf S nach innen gerichtet sein oder verschwinden.

Wir nehmen an, daß ω unterhalb der Poincaréschen Schranke $\sqrt{2\pi\varkappa}$ liegt. Die vorstehenden Bedingungen sind dann, wie man weiß, auch hinreichend; im Innern der Flüssigkeitsmasse herrscht Druck.

Bekanntlich ist die Rotationsachse (z-Achse) eine Hauptträgheitsachse des Körpers[17]). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt legen und der x- und der y-Achse die Richtung der beiden anderen Hauptträgheitsachsen geben. Bei der Diskussion der Endformeln werden wir meist die weitere Voraussetzung machen, daß die Ebenen $z = 0$ und $y = 0$ Symmetrieebenen des Körpers T sind[18]).

Indem Stabilitätsfragen zunächst außer Betracht bleiben, wollen wir untersuchen, ob es für Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_1 in einem hinreichend kleinen Intervall, das ω in seinem Innern oder auf dem Rande enthält, in der Umgebung des Körpers T weitere Figuren T_1 des relativen Gleichgewichtes gibt, die eine *lineare Reihe* bilden. Darunter ist folgendes zu verstehen.

Die Berandung S_1 von T_1 soll aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktloser, stetig gekrümmter Flächenschalen bestehen, die einander

---

[15]) Nicht notwendig stabile.

[16]) Gehören zwei oder mehr Komponenten der Berandung desselben Gebietes, d. h. derselben zusammenhängenden Flüssigkeitsmasse, an, so haben die zugehörigen Konstanten den gleichen Wert.

[17]) Der Einfachheit halber ist im folgenden stets von *einem* (unter Umständen aus mehreren getrennten Massen bestehenden) Körper die Rede.

[18]) Alle bisher bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren haben eine durch die Rotationsachse hindurchgehende Ebene sowie eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse zu Symmetrieebenen. Ihre Schnittlinie ist offenbar eine Hauptträgheitsachse des Körpers. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir in diesem Falle das Achsenkreuz so orientieren, daß die Ebenen $z = 0$ und $y = 0$ Symmetrieebenen von T werden.

t berühren, den einzelnen Komponenten von S umkehrbar eindeutig ordnet sind und gegen diese für $\omega_1 \to \omega$ konvergieren [19]).

Ist T_1 eine Gleichgewichtsfigur, so sind augenscheinlich Körper, die durch beliebige Verschiebung oder Drehung von T_1 um die z-Achse lt, ebenfalls Gleichgewichtsfiguren. Desgleichen ist, wie man sich leicht zeugt, jeder in bezug auf den Koordinatenursprung zu T_1 ähnliche per eine zu der Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehörige Gleichgewichtsfigur.

Sind X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 laufende Koordinaten zweier Punkte einem beliebigen Paar zusammengehöriger Komponenten von S und S_1 ist $V_1(x, y, z)$ das Newtonsche Potential des Körpers T_1, so setzen zunächst fest, daß

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(X_1^2 + Y_1^2) + s$$

soll. Der reelle Parameter s nimmt auf allen Komponenten von S_1, zu der Begrenzung eines und desselben Gebietes gehören, den gleichen t an. Ist die Anzahl der getrennten Flüssigkeitsmassen gleich $q\,(\geqq 1)$, so demnach unter s kurz die Gesamtheit der Einzelwerte des Parameters, $s_1, \ldots s_q$, zu verstehen. Da die neuen Gleichgewichtsfiguren in der nbarschaft der gegebenen Figur liegen sollen, während zugleich ω_1 in r Umgebung von ω liegt, so muß man $|s|$ hinreichend klein annehmen.

Die Werte $s_1, \ldots s_q$ sind, allgemein zu reden, durch die Forderung bestimmen, daß das Volumen einer jeden Flüssigkeitsmasse einen vorhriebenen Wert hat. Dieses muß sich natürlich von dem entsprechen- Wert bei dem Ausgangskörper hinreichend wenig unterscheiden. Insndere kann man fordern, daß die einzelnen Massen der linearen Reihe tantes Volumen haben. Dieses wird dann dem Volumen der entchenden Masse des Ausgangskörpers gleich sein. Ob und wie weit die Werte s hierdurch tatsächlich bestimmen lassen, kann natürlich eine weitere Diskussion lehren.

Besteht die gegebene Gleichgewichtsfigur aus einer einzigen Masse, so nen wir einfacher

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(X_1^2 + Y_1^2),$$

$s = 0$ setzen. In der Tat wird, wenn man unter dieser Voraussetzung

---

[19]) Genauer, der Höchstwert der Entfernung eines beliebigen Punktes P auf deiner Komponente von S von der zugehörigen Komponente von S_1 soll für $\to \omega$ gegen Null konvergieren.

Wie in der Fußnote [14]) bemerkt, lassen sich auf S_1 Parameter angeben, so daß kartesischen Koordinaten in bezug auf diese stetige Ableitungen aller Ordnungen n. Dies gilt, auch wenn man von der Fläche S_1 lediglich voraussetzt, daß sie stetige Normale hat.

mit v das Volumen des Ausgangskörpers, mit v_1 dasjenige von T_1 bezeichnet, v_1 im allgemeinen von v verschieden ausfallen. Das Volumen derjenigen Gleichgewichtsfigur, die aus T_1 durch die Ähnlichkeitstransformation mit dem Koordinatensprung als Mittelpunkt hervorgeht, wenn man das Vergrößerungsverhältnis gleich $\sqrt[3]{\frac{v}{v_1}}$ macht, ist gleich v. Es ist demnach in dem besonderen Falle $q = 1$ leicht, wenn erst einmal eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren gefunden ist, zu den Figuren konstanten Volumens überzugehen.

Ist die Anzahl der einzelnen Flüssigkeitsmassen $q > 1$, so kann man dem Gesamtvolumen der etwa vorhandenen neuen Gleichgewichtsfiguren wie vorstehend durch Vermittelung einer Ähnlichkeitstransformation einen vorgeschriebenen Wert geben, insbesondere dem Volumen des Ausgangskörpers gleich machen.

Denken wir uns in dem besonderen Falle $q = 1$ die Winkelgeschwindigkeit ω festgehalten. Man wird erwarten, daß den verschiedenen Werten von s neue, eine oder mehrere lineare Reihen bildende Gleichgewichtsfiguren entsprechen. Die Lösung wird indessen im allgemeinen trivial ausfallen, indem die neuen Figuren aus der alten durch eine Ähnlichkeitstransformation entspringen[20]). Anders für $q > 1$. Hier sind die neuen den Bedingungen $\omega_1 = \omega$, $s \neq 0$ genügenden Gleichgewichtsfiguren nicht trivial.

In dem Punkte (ξ, η) auf S denken wir uns die Normale (ν) gezogen und auf dieser, positiv nach außen gerichtet, eine Strecke ζ aufgetragen. Solange $|\zeta|$ kleiner als das Minimum der beiden Hauptkrümmungsradien auf S, etwa

$$|\zeta| < \varepsilon_0 \tag{6}$$

ist, gehört zu einem jeden Wertsystem ξ, η, ζ nur ein Punkt des Raumes und umgekehrt. *Wir nehmen an, daß die Gleichung der Fläche S_1, die von ω_1 stetig abhängen soll, auf die Form*

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1) \tag{7}$$

gebracht werden kann. Die Funktion $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ soll stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ haben.

Diese Bedingungen sind, wie später gezeigt werden wird (vgl. Kapitel IV § 1), stets erfüllt, wenn der Höchstwert der Entfernung eines Punktes auf S_1 von der Fläche S und der Wert $|\omega_1 - \omega|$ unterhalb einer angeb-

[20]) Ob es darüber hinaus noch weitere nicht triviale, zu dem gleichen Wert von ω gehörige Gleichgewichtsfiguren gibt, kann erst eine eingehende Diskussion lehren. Es kann sich dabei jedenfalls nur um Ausnahmefälle handeln (vgl. Kapitel III, § 3).

n Schranke liegen und wenn überdies die Schwerkraft, d. h. die Resulnde aus Anziehungs- und Zentrifugalkraft auf S nach innen gerichtet ist.

Zur Vereinfachung wird von jetzt an mit R die Entfernung des ktes (ξ, η) von der z-Achse, mit τ der Kosinus des von (ν) und dem von (ξ, η) auf die Umdrehungsachse [21]) eingeschlossenen Winkels, mit las Flächenelement in (ξ, η) bezeichnet. Die entsprechenden Werte Punkte (ξ', η') auf S sollen R', τ', $d\sigma'$ heißen. Die Entfernung der kte (ξ, η) und (ξ', η') sei ϱ. Für (ξ, η) und (ξ', η') wird gelegenteinfacher σ und σ', für R, τ, ... dementsprechend $R(\sigma)$, $\tau(\sigma)$, ... rieben.

Wir setzen, wenn (ξ, η, ζ^*) den Punkt (x, y, z) bezeichnet,

$$V(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta^*), \qquad V_1(x, y, z) = W_1(\xi, \eta, \zeta^*).$$

Die Komponente der von dem Körper T in dem Punkte (ξ, η) seiner fläche auf einen materiellen Punkt von der Masse 1 ausgeübten Anngskraft in der Richtung von (ν) hat den Wert

$$f\varkappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, o).$$

Die Schwerkraft im Punkte (ξ, η) steht auf S senkrecht und ist itiv nach außen gerichtet) gleich

$$f\varkappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, o) + \omega^2 R\tau = f\varkappa\psi.$$

Wert dieser Ortsfunktion im Punkte (ξ', η') wird mit $f\varkappa\psi'$ bezeichnet. Da S eine Niveaufläche ist, und, wie wir annehmen wollen, Zugnungen in der Flüssigkeit ausgeschlossen sind, so ist auf S durchweg 0. *Wir nehmen darüber hinaus an, daß*

$$\psi < 0$$

d. h. die Schwerkraft auf S nach innen gerichtet ist.

§ 2.

Es sei (ξ, η, ζ) der Punkt (X_1, Y_1, Z_1) auf S_1. Wir setzen

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) = U_1(\xi, \eta)$$

analog, wenn (ξ, η) den Punkt (X, Y, Z) auf S bezeichnet,

$$V(X, Y, Z) = U(\xi, \eta).$$

Der Ausdruck $U_1 - U$ läßt sich, wie wir jetzt zeigen werden, *in eine*

[21]) Von dieser nach (ξ, η) hin gerichtet.

für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|$, $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right|$ *unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe*

$$U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots \tag{14}$$

entwickeln, die folgende Eigenschaften hat:

1. *Es ist*

$$U^{(n)} = \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma', \tag{15}$$

unter $K^{(n)}$ *eine Form n-ten Grades der Variablen* ζ, ζ', $\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}$, $\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}$ *verstanden*[22]).

2. *Es gilt*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\xi}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)}\right) d\sigma', \\ \frac{\partial}{\partial\eta}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)}\right) d\sigma'. \end{cases} \tag{16}$$

Die unendlichen Reihen rechter Hand konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

Die Reihen (14) und (16) konvergieren, wie gleichzeitig gezeigt werden wird, auch wenn für ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine *komplexe* Werte eingesetzt werden. Die Reihe (14) ist als *Definitionsgleichung* von U_1 für komplexe ζ aufzufassen.

Neben den Flächen S und S_1 betrachten wir die einparametrige Flächenschar $S_t (0 \leqq t \leqq 1)$, die sich symbolisch in der Form $S + t(S_1 - S)$ darstellen läßt. Dem Punkte (ξ, η) auf S entspricht auf S_t ein Punkt mit den (krummlinigen) Koordinaten ξ, η, $t\zeta$. Der von S_t begrenzte Körper heiße T_t, sein Potential im Punkte (ξ, η, ζ^*) sei $W_t(\xi, \eta, \zeta^*)$ und insbesondere im Punkte $\xi, \eta, t\zeta$ auf T_t einfacher $U_t(\xi, \eta)$.

Der Beweis des soeben angegebenen Satzes wird dadurch erbracht, daß die Differenz $U_t(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)$ nach Potenzen von t entwickelt wird. In der sich ergebenden unendlichen Reihe wird alsdann $t = 1$ gesetzt.

Wir beginnen mit der Herleitung eines Ausdruckes für $\frac{\partial U_t}{\partial t}$. Es gilt

$$\begin{cases} \frac{1}{h}(U_{t+h} - U_t) = \frac{1}{h}\{W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\} \\ \qquad = \frac{1}{h}\{W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta)\} \\ \qquad + \frac{1}{h}\{W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\}. \end{cases} \tag{17}$$

[22]) Jede der beiden Ableitungen $\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}$, $\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}$ tritt übrigens nur linear auf.

Der Ausdruck

)
$$W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)$$

lt das Potential des schalenförmigen Körpers $T_{t+h} - T_t$ im Punkte $\eta, t\zeta$ auf S_t dar. Es sei φ_t der von der Außennormale an S_t in diesem kte mit der Geraden (ν) eingeschlossene Winkel, $d\sigma_t'$ das Flächenment von S_t in $(\xi', \eta', t\zeta')$ und ϱ_t die Entfernung der Punkte $(\xi, \eta, t\zeta)$ $(\xi', \eta', t\zeta')$. Von den Normalen an S durch den Rand von $d\sigma_t'$ wird $T_{t+h} - T_t$ ein Volumen herausgeschnitten, das, positiv oder negativ esetzt, je nachdem $\zeta' > 0$ oder < 0 ist, bis auf die Größen höherer dnung in bezug auf h, den Wert

)
$$\zeta' h \cos \varphi_t' d\sigma_t'$$

. Das zweite Glied rechts in (17) liefert demnach für $h \to 0$, wie sich he Schwierigkeiten zeigen läßt,

)
$$\int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \zeta' \cos \varphi_t' d\sigma_t'.$$ [23])

r erste Summand gibt für $h \to 0$ den Wert

)
$$\zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_t(\xi, \eta, t\zeta),$$

sich nach einer teilweisen Integration in bekannter Weise auf die Form

)
$$-\zeta \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \cos \theta_t' d\sigma_t'$$

ngen läßt. Hierbei bezeichnet θ_t' den von der Außennormale an S_t im nkte $(\xi', \eta', t\zeta')$ mit der Geraden (ν) eingeschlossenen Winkel [24]).

---

[23]) Man kann dieses Resultat auch wie folgt einsehen. Es gilt

$$W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta) = \int_t^{t+h} dt_* \int_S \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, t_*)} d\xi d\eta,$$

er ϱ_* die Entfernung des Punktes $\xi, \eta, t\zeta$ von einem variablen Punkte $(\xi', \eta', t_*\xi')$ Körpers $T_{t+h} - T_t$ verstanden. Das über S erstreckte Integral hat, wie eine ere Betrachtung der Jacobischen Determinante $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, t_*)}$ zeigt, den Wert $\zeta' \frac{1}{\varrho_*} \cos \varphi_{t_*}' d\sigma_{t_*}'$. Dieses Integral ist eine stetige Funktion von t_*. Darum ist

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \{W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\} = \int_S \zeta' \frac{1}{\varrho} \cos \varphi_t' d\sigma_t'.$$

[24]) In der Tat ist

$$W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta)\} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_{t+h}[\xi, \eta, (t+\delta_0 h)\zeta], \quad 0 < \delta_0 < 1.$$

sei vorübergehend mit ϱ^* die Entfernung der Punkte $\xi, \eta, (t+\delta_0 h)\zeta$ und

Es gilt demnach

$$\frac{\partial U_t}{\partial t} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_t(\xi, \eta, t\zeta) + \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \zeta' \cos\varphi_t' d\sigma_t' \tag{24}$$

$$= \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\theta_t') d\sigma_t'.$$

Sind

$$x = X(\xi, \eta), \qquad y = Y(\xi, \eta), \qquad z = Z(\xi, \eta) \tag{25}$$

die Gleichungen von S, so lauten diejenigen der Fläche S_t

$$x = X + at\zeta, \qquad y = Y + bt\zeta, \qquad z = Z + ct\zeta, \tag{26}$$

unter a, b, c die Richtungskosinus der Normale (ν) verstanden. Es gilt

$$d\sigma_t' = d\xi' d\eta' \sqrt{A_t'^2 + B_t'^2 + C_t'^2},$$

$$A_t' = \frac{\partial(Y' + b't\zeta', Z' + c't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \qquad B_t' = \frac{\partial(Z' + c't\zeta', X' + a't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \tag{27}$$

$$C_t' = \frac{\partial(X' + a't\zeta', Y' + b't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')},$$

$$\cos\varphi_t' = \frac{a'A_t' + b'B_t' + c'C_t'}{\sqrt{A_t'^2 + B_t'^2 + C_t'^2}}, \qquad \cos\theta_t' = \frac{aA_t' + bB_t' + cC'}{\sqrt{A_t'^2 + B_t'^2 + C_t'^2}},$$

mithin in naheliegender Schreibweise

$$\frac{\partial U_t}{\partial t} = \int_S \frac{1}{\varrho_t} \sum A_t'(a'\zeta' - a\zeta) d\xi' d\eta' \text{ [25]}. \tag{28}$$

Aus (26) und den analogen Ausdrücken für die kartesischen Koordinaten des Punktes $(\xi', \eta', t\zeta')$ auf S_t ergibt sich

$$\varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t \sum (X' - X)(a'\zeta' - a\zeta) + t^2 \sum (a'\zeta' - a\zeta)^2 \tag{29}$$

$$= \varrho^2 [1 + k(t)].$$

$\xi', \eta', (t+h)\zeta'$ bezeichnet. Der Ausdruck rechts läßt sich durch teilweise Integration in naheliegender Bezeichnungsweise auf die Form (23) $- \zeta \int_{S_{t+h}} \frac{1}{\varrho^*} \cos\theta_{t+h}' d\sigma_{t+h}'$ bringen.

Für $h \to 0$ geht (23), wie sich leicht zeigen läßt, in (22) über.

Die im vorstehenden angewandte Umwandlung des Volumintegrals in ein Oberflächenintegral ist ohne weiteres durchführbar, wenn die Randfläche mit einer jeden Geraden, die sie trifft, eine endliche Anzahl von Punkten oder Strecken gemeinsam hat. Die Transformationsformel gilt indessen, wie sich auf einem Umwege zeigen läßt, allgemeiner für doppelpunktlose Flächen mit stetiger Normale. Vgl. L. Lichtenstein, „Über die Greensche Integralformel der Potentialtheorie", Archiv der Math. und Physik, Bd. 27, 1918, S. 31–37.

[25]) Der Wert des Integrals (28) ist augenscheinlich von der besonderen Wahl der Parameter ξ und η unabhängig.

Es sei t^* eine Zahl > 1 und k^* ein positiver echter Bruch. Wie
n sich leicht überzeugt, ist für alle dem absoluten Betrage nach hin-
chend kleinen reellen oder *komplexen* Werte von ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$, etwa

)
$$|\zeta|, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right| \leqq \varepsilon < \varepsilon_0,$$

l alle *komplexen* t in dem Bereiche $|t| \leqq t^*$

.)
$$|k(t)| \leqq k^*.$$

r Quotient $\left|\frac{\varrho_t}{\varrho}\right|$ ist demnach von Null verschieden.

Das Integral

2)
$$J = \int_S \frac{1}{\varrho_t} \sum A_t'(a'\zeta' - a\zeta)\, d\xi' d\eta'$$

$$= \int_S \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}} \sum A_t'(a'\zeta' - a\zeta)\, d\xi' d\eta'$$

eine in dem Bereiche $|t| \leqq t^*$ analytische und reguläre Funktion von t.

Dies erkennt man wohl am einfachsten wie folgt. Man setze

3)
$$\int_S = \int_{S-\bar{S}} + \int_{\bar{S}},$$

ter $\bar{S}$ den in der Kreisfläche $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 \leqq \bar{D}^2$ in der Nachbar-
aft von (ξ, η) enthaltenen Teil von S verstanden. Das Integral $\int_{S-\bar{S}}$ ist,
e man unmittelbar sieht, eine analytische und reguläre Funktion von t.
rücksichtigt man, daß $\left|\int_{\bar{S}}\right|$ für alle (ξ, η) auf S und alle t im Be-
che $|t| \leqq t^*$ für $\bar{D} \to 0$ gleichmäßig verschwindet, daß mithin gleichmäßig

4)
$$\int_S = \lim_{\bar{D}=0} \int_{S-\bar{S}}$$

t, so erhält man in der Tat unsere Behauptung. In der gleichen Weise
ßt sich zeigen, daß auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial\xi}$, $\frac{\partial J}{\partial\eta}$, als Funk-
nen von t aufgefaßt, analytisch und regulär sind[26]).

Nach bekannten Sätzen ist für alle $n > 1$

5)
$$\frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} = \lim_{\bar{D}=0} \int_{S-\bar{S}} \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'$$

$$= \int_S \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'.$$

[26]) Die Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial\xi}$, $\frac{\partial J}{\partial\eta}$ erhält man ganz einfach durch eine Differentiation
er dem Integralzeichen. Man vergleiche die Betrachtungen des nächst folgenden
ragraphen.

Der Grenzübergang ist für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leqq t^*$ gleichmäßig.

Man sieht jetzt leicht ein, daß $U_t(\xi, \eta)$, sofern

$$|\zeta|, \quad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| \leqq \varepsilon \tag{36}$$

angenommen wird, eine für alle t in dem Intervalle $0 \leqq t \leqq t^*$ analytische und reguläre Funktion von t darstellt, die über den Bereich $|t| \leqq t^*$ regulär fortgesetzt werden kann. Es gilt (für $n \geqq 3$)

$$\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} = \int_S \sum (a'\zeta' - a\zeta) \left\{ A_t' \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right. \tag{37}$$

$$\left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A_t'}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A_t'}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right\} d\xi' d\eta' \text{ [27]}).$$

Der Ausdruck $\left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n}\right]_{t=0}$ läßt sich demnach, wie leicht ersichtlich, auf die Gestalt $n! \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma'$ bringen, unter $K^{(n)}$ eine Form n-ten Grades von ζ, ζ', $\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$ verstanden. Jede der zuletzt genannten partiellen Ableitungen kommt in $K^{(n)}$ übrigens nur linear vor.

Der Taylor-Cauchysche Entwicklungssatz liefert

$$U_t(\xi, \eta) - U(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n}\right]_{t=0} \tag{39}$$

und für $t = 1$, wie behauptet,

$$U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots$$

$$U^{(n)} = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n}\right]_{t=0} = \int \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma', \tag{40}$$

$$\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \sum (a'\zeta' - a\zeta) \left\{ A_t' \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right. \tag{41}$$

$$\left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A_t'}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A_t'}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right\}_{t=0},$$

$$A' = \frac{\partial(Y', Z')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad B' = \frac{\partial(Z', X')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad C' = \frac{\partial(X', Y')}{\partial(\xi', \eta')}. \tag{42}$$

---

[27]) Für $n = 2$ ist das letzte, für $n = 1$ die beiden letzten Glieder in (37) gleich Null zu setzen. Die Ausdrücke A_t', B_t', C_t' sind Polynome zweiten Grades von t. Es ist z. B.

$$A_t' = \frac{\partial(Y', Z')}{\partial(\xi', \eta')} + t \left\{ \frac{\partial(Y', c'\zeta')}{\partial(\xi', \eta')} - \frac{\partial(Z', b'\zeta')}{\partial(\xi', \eta')} \right\} + t^2 \frac{\partial(b'\zeta', c'\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}. \tag{38}$$

Da, wie bereits erwähnt, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_t}{\partial \xi}$, $\frac{\partial U_t}{\partial \eta}$, als ktionen von t aufgefaßt, sich ebenfalls im Bereiche $|t| \leq t^*$ regulär alten, so ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} U^{(n)}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} U^{(n)}\ ^{28}).$$

Aus (24) und (40) folgt insbesondere

$$U^{(1)} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma'.$$

Aus (35) folgt für $n = 2$

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} = \int_S \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'.$$

§ 3.

Die Funktion $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bezug auf ξ und η. Es gilt beispielsweise

$$\frac{\partial^3 U_t}{\partial \xi \partial t^2} = \int_S \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'$$

$$- \int_S \sum \frac{\partial}{\partial \xi}(a\zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'.$$

Um den Zusammenhang unserer Betrachtungen nicht zu unterchen, wird der Beweis, der etwas langwierige, wenn auch an sich keine wierigkeiten darbietende Rechnungen erforderlich macht, in das Schlußitel der Arbeit verlegt (vgl. Kapitel V, § 1).

In (47) ist die zu integrierende Funktion beschränkt und, außer hstens wenn $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ ist, stetig. In (48) werden die beiden ktionen unter dem Integralzeichen für $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ wie $\frac{1}{\vartheta}$ unendlich. rt man die in (47) und (48) vorgeschriebenen Operationen unter utzung der Formeln (27) und (29) aus, so findet man nacheinander, die Funktionen

---

[28]) Es gilt, in der Tat, die für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leq t^*$ chmäßig konvergente Entwicklung

$$\frac{\partial}{\partial \xi} U_t - \overline{U}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{U}^{(n)} t^n.$$

Aus (44), (39) und (40) folgt

$$\overline{U}^{(0)} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial \xi}, \quad \overline{U}^{(n)} = \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \xi} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Für $t = 1$ geht demnach (44) in (43) über.

$$\frac{1}{\varrho_t}\frac{\partial \varrho_t}{\partial t},\quad \frac{\partial \varrho_t}{\partial \xi},\quad \frac{\partial^2 \varrho_t}{\partial \xi \partial t},\quad \varrho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right),\quad \varrho^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right)$$

beschränkt und, außer höchstens für $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, stetig sind.

Wir setzen

$$\int_S = \int_{\bar{S}} + \int_{S-\bar{S}} \tag{49}$$

und führen in dem Integral $\int_{\bar{S}}$ Polarkoordinaten r, t durch die Gleichungen

$$\mathrm{r}^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2, \quad \mathrm{r}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{t} = \frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} \tag{50}$$

ein. Jetzt sind auch die in $\int_S$ unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen beschränkt. Es ist ferner beispielsweise

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\bar{S}} \sum \frac{\partial}{\partial \xi}(a\zeta)\, A_t' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta' \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{D} \sum \left(\zeta \frac{\partial a}{\partial \xi} + a \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right) A_t' \frac{1}{\varrho_t}\frac{\partial \varrho_t}{\partial t}\frac{\mathrm{r}}{\varrho_t}\, d\mathrm{r}\, dt = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\bar{D}} \Phi\, d\mathrm{r}\, dt, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\frac{1}{\varrho_t}\frac{\partial \varrho_t}{\partial t} = \sum \frac{X' - X}{\varrho_t}\frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho_t} + t \sum \frac{(a'\zeta' - a\zeta)^2}{\varrho_t^2}.$$

Wir nehmen wie vorhin

$$|\zeta|,\quad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|,\quad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| < \varepsilon \tag{52}$$

an. Es gilt beispielsweise

$$\left|\frac{X' - X}{\varrho_t}\right| = \left|\frac{X' - X}{\varrho}\frac{1}{\sqrt{1 + k(t)}}\right| < \gamma_1, \quad (\gamma_1 \text{ konstant})$$

$$\left|\frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho_t}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{1 + k(t)}}\right| \left|\frac{\xi' - \xi}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{a}\tilde{\zeta}) + \frac{\eta' - \eta}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{a}\tilde{\zeta})\right|, \tag{53}$$

$$\tilde{a}\tilde{\zeta} = a(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\,\zeta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}),\quad \tilde{\xi} = \xi + \vartheta_0(\xi' - \xi),\quad \tilde{\eta} = \eta + \vartheta_0(\eta' - \eta)\ (0 < \vartheta_0 < 1)$$

$$\left|\frac{\xi' - \xi}{\varrho}\right|,\quad \left|\frac{\eta' - \eta}{\varrho}\right| < \gamma_2, \qquad (\gamma_2 \text{ konstant})$$

demnach, wie leicht zu sehen ist,

$$\left|\frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho_t}\right| < \gamma_3 \varepsilon \text{ und } |\Phi| < \gamma_4 \varepsilon^2, \tag{54}$$

unter γ_3 und γ_4, wie später unter $\gamma_5, \gamma_6, \ldots$ positive Konstanten verstanden. Nunmehr ist

$$|A_1| < \gamma_5 \varepsilon^2 \tag{55}$$

und darum, wie man sich leicht überzeugt,

$$\left|\int_{\bar{S}} \frac{\partial}{\partial \xi}(a\zeta)\, A_t' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'\right| < \gamma_6 \varepsilon^2. \tag{56}$$

Analoge Ungleichheiten gelten für die übrigen in (47), (48) und in Formel für $\frac{\partial^3 U_t}{\partial \eta \partial t^2}$ vorkommenden Integrale.

Für alle t in dem Intervalle $0 \leqq t \leqq t^*$ ist demnach

$$\left|\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}\right| < \gamma \varepsilon^2 \qquad (\gamma \text{ konstant}).$$

Wegen

$$\begin{cases} U_1 - U_0 - \left[\frac{\partial U_t}{\partial t}\right]_{t=0} = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2}\, dt_*, \\ \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{U_1 - U_0 - \left[\frac{\partial U_t}{\partial t}\right]_{t=0}\right\} = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2}\, dt_* \end{cases}$$

) $|U_1 - U_0 - U^{(1)}| = |U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots| = |\Psi| < \gamma \varepsilon^2, \quad \left|\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right| < \gamma \varepsilon^2$

l analog

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right| < \gamma \varepsilon^2.$$

Die Funktion $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ hat stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung bezug auf ξ und η. (Vgl. Kapitel V, § 2).

Es mögen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von ζ den gleichheiten

$$\left|\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}\right| < \varepsilon$$

nügen. Alsdann gelten, wie im Kapitel V, § 2 gezeigt wird, für alle t dem Intervalle $0 \leqq t \leqq t^*$ die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^3}{\partial \eta^2}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}\right| < \gamma' \varepsilon^2 \qquad (\gamma' \text{ konstant}).$$

Aus (58), (59) und (62) folgt

$$\left|\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}\right| < \gamma' \varepsilon^2.$$

§ 4.

Aus (26) ergibt sich, wenn man $t = 1$ setzt,

$$X_1 = X + a\zeta, \quad Y_1 = Y + b\zeta, \quad Z_1 = Z + c\zeta.$$

mnach ist

$$\begin{aligned} X_1^2 + Y_1^2 &= X^2 + Y^2 + 2(aX + bY)\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2 \\ &= R^2 + 2R\tau\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa f} = \lambda$$

und erhalten

$$(67)\qquad \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(X_1^2+Y_1^2)-\frac{\omega^2}{2\varkappa f}(X^2+Y^2)=\lambda(X_1^2+Y_1^2)$$
$$+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}(X_1^2+Y_1^2-X^2-Y^2)=\lambda R^2+\frac{\omega^2}{\varkappa f}R\tau\zeta+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2+b^2)\zeta^2$$
$$+2\lambda R\tau\zeta+(a^2+b^2)\lambda\zeta^2.$$

Aus (4), (40), (46), (10) und (67) ergibt sich nunmehr die Beziehung

$$(68)\qquad \psi\zeta+\int_S\frac{1}{\varrho}\zeta'd\sigma'=s-R^2\lambda-\frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2+b^2)\zeta^2-2R\tau\lambda\zeta$$
$$-(a^2+b^2)\lambda\zeta^2-U^{(2)}-U^{(3)}-\ldots$$

Dies ist eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ.

Es sei noch einmal hervorgehoben, daß, wenn T aus q ($\geqq 1$) Einzelmassen besteht, s auf den einzelnen Randkomponenten von S insgesamt q im allgemeinen verschiedene Werte annimmt. Auf allen Randkomponenten, die zu der Begrenzung derselben Masse gehören, hat s den gleichen Wert.

Die im vorstehenden abgeleitete, für das folgende wesentliche Entwicklung für U_1-U ist in dem besonderen Falle der Flüssigkeitsellipsoide (in einer durch die abweichende Wahl der krummlinigen Koordinaten modifizierten Gestalt) zuerst von Herrn Liapounoff angegeben worden. In seiner in der Fußnote [10]) an zweiter Stelle genannten Arbeit geht Herr Liapounoff von einem Ellipsoide

$$x=\sqrt{\varrho+1}\,\sin\theta\cos\psi,$$
$$y=\sqrt{\varrho+q}\,\sin\theta\sin\psi,$$
$$z=\sqrt{\varrho}\,\cos\theta \qquad (\varrho,\ q \text{ konstant},\ q\leqq 1)$$

aus und nimmt die Gleichung der gesuchten Gleichgewichtsfigur in der Form

$$x=\sqrt{\varrho+\zeta+1}\,\sin\theta\cos\psi,$$
$$y=\sqrt{\varrho+\zeta+q}\,\sin\theta\sin\psi,$$
$$z=\sqrt{\varrho+\zeta}\,\cos\theta$$

an. Die Bedeutung der Größen ϱ, θ, ψ, ζ, q ist natürlich von derjenigen der in dieser Arbeit ebenso bezeichneten Größen verschieden. Zur Bestimmung von ζ ergibt sich eine zu (68) analoge Integro-Differentialgleichung, die in der Bezeichnungsweise des Herrn Liapounoff lautet [vgl. a. a. O. S. 22 die Formeln (23) und (24)]

$$(69)\qquad RH\zeta-\frac{1}{4\pi}\int\frac{H'\zeta'd\sigma'}{D}=\frac{\Delta}{2}W+\text{const.},$$

$$W = \eta(\varrho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi + \zeta)\sin^2\theta + U_2 + U_3 + \ldots$$

Bei der Ableitung der Gleichung (69) bedient sich Herr Liapounoff eits einer zu der Körperschar ξ, η, $t\zeta$ analogen Körperschar θ, ψ, $\varepsilon\zeta$ $\leqq \varepsilon \leqq 1$), bleibt aber im Gegensatz zu unseren Betrachtungen im entlichen im Gebiete des Reellen. Die systematische Heranziehung ktionentheoretischer Hilfsmittel ist demgegenüber für unsere bisherigen rachtungen wie auch für die Entwicklungen der Kapitel II und III entlich. Als ein weiterer springender Punkt der hier benutzten Methode der Ausdruck (24) für $\frac{dU_t}{dt}$ und seine Entwicklung nach Potenzen t hervorgehoben. Herr Liapounoff geht unmittelbar von dem Aus- ck $U_1 - U$ aus.

In der im Jahre 1914 erschienenen Abhandlung (vgl. die Fußnote [10]) handlung 5.) kommt Herr Liapounoff noch einmal auf diesen Gegen- nd zurück. Die Gleichung der gesuchten Gleichgewichtsfigur wird jetzt der Form

$$x = \sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\varrho+1}\,\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = \sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\varrho+q}\,\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = \sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\varrho}\,\cos\theta$$

gesetzt. Die weiteren Betrachtungen sind denjenigen seiner zuerst er- hnten älteren Arbeit ganz analog.

Zweites Kapitel.

Existenzsatz. Der reguläre Fall.

§ 1.

Betrachten wir die homogene lineare Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0$$ [29]).

Sie hat, wenn T kein Rotationskörper um die z-Achse ist, mindestens ei linear unabhängige Nullösungen. Ist S eine Rotationsfläche um z-Achse, so ist die Anzahl der stets vorhandenen Nullösungen gleich 1.

Von der Richtigkeit der vorstehenden Behauptung kann man sich e folgt leicht überzeugen.

Läßt man die Winkelgeschwindigkeit ω ungeändert und denkt man h den Körper T parallel zu der z-Achse um eine unendlich kleine

[29]) Sie geht durch die Substitution $Z = \zeta\sqrt{-\psi}$ in eine Integralgleichung mit mmetrischem Kern über. Man beachte, daß $\psi < 0$ vorausgesetzt worden ist.

Strecke δ^* verschoben, so bleibt der Ausdruck $V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(x^2 + y$ auf jeder Komponente von S ungeändert. Die Verschiebung in der Richtung von (ν) hat, wie man sich durch eine einfache Rechnung überzeugt, bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung den Wert $u_0\delta^* = c\delta^*$. Setzt man in (68) I jetzt $s = 0$, $\lambda = 0$, substituiert für ζ den Wert $u_0\delta^*$, dividiert links und rechts durch δ^* und geht zur Grenze $\delta^* \to 0$ über, so findet man unter Berücksichtigung der Ungleichheit (59) I

$$\psi u_0 + \int_S \frac{1}{\varrho} u_0' d\sigma' = 0. \tag{2}$$

Die Funktion $u_1 = u_0 \cdot \text{const.} = c \cdot \text{const.}$ ist somit eine Nullösung der Integralgleichung (1).

Eine zweite Nullösung gewinnt man, wenn T kein Rotationskörper um die z-Achse ist, dadurch, daß man, ohne die Winkelgeschwindigkeit zu ändern, T um die z-Achse um einen unendlich kleinen Winkel δ_* dreht. Diesmal sei die Verschiebung in der Richtung von (ν) bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gleich $u^{(0)}\delta_*$. Offenbar ist auch $u_2 = u^{(0)} \cdot \text{const.}$ eine Nullösung von (1). Es ist $u^{(0)} = R \cos \mathfrak{p}$, unter $\mathfrak{p}$ den von der Bahntangente in (ξ, η) mit (ν) eingeschlossenen Winkel verstanden. Augenscheinlich haben u_1 und u_2 stetige Ableitungen aller Ordnungen. (Im Kapitel III § 1 wird dies übrigens auf einem anderen Wege noch einmal gezeigt.) Man erkennt unmittelbar, daß, wenn T ein Rotationskörper um die z-Achse ist, u_2 identisch verschwindet. Wir denken uns u_1 und, falls T kein Rotationskörper ist, auch u_2 den Beziehungen

$$\int_S \psi u_1^2 d\sigma = -1, \qquad \int_S \psi u_2^2 d\sigma = -1, \tag{3}$$

gemäß normiert. Die Gleichungen (3) gehen durch die Substitution $Z = \zeta\sqrt{-\psi}$ in die üblichen Normierungsbeziehungen über.

Ist T_1 eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit, so ist jeder Körper, den man erhält, wenn man T_1 parallel zu sich selbst in der Richtung der z-Achse um eine beliebige Strecke verschiebt, oder um die z-Achse um einen beliebigen Winkel dreht, ebenfalls eine Gleichgewichtsfigur. Um die Lage von T_1 festzulegen, bedarf es darum weiterer Festsetzungen. Wir nehmen diese in der Form

$$\int_S \psi u_1 \zeta d\sigma = 0, \tag{4}$$

$$\int_S \psi u_2 \zeta d\sigma = 0 \tag{5}$$

an Ist T ein Rotationskörper, so ist $u_2 = 0$ und (5) ist identisch erfüllt.

Daß für hinreichend kleine, etwa den Beziehungen (53) I genügende
e von $|\zeta|$, $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|$, $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right|$ den Forderungen (4) und (5) stets genügt
en kann, sieht man leicht wie folgt ein. Es möge für eine Gleich-
chtsfigur T_1 in der Nachbarschaft von T

$$\int_S \psi u_0 \zeta d\sigma = \alpha_0 \gtrless 0$$

Wir denken uns T_1 um die Strecke δ^* parallel zu der z-Achse ver-
ben. Hierdurch geht ζ, wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt,
in

$$\bar{\zeta} = \zeta + \delta^*(u_0 + D_\varepsilon) + \delta^{*2} F,$$

er D_ε eine mit ε gleichmäßig verschwindende, unter F eine beschränkte
ktion verstanden. Da $\psi < 0$, mithin

$$\int_S \psi u_0^2 d\sigma < 0$$

ist es für hinreichend kleine ε gewiß möglich δ^* so zu bestimmen, daß

$$\int_S \psi u_0 \bar{\zeta} d\sigma = \alpha_0 + \delta^* \int_S \psi u_0 (u_0 + D_\varepsilon) d\sigma + \delta^{*2} \int_S \psi u_0 F d\sigma = 0,$$

in auch

$$\int_S \psi u_1 \bar{\zeta} d\sigma = 0$$

d. Die gleiche Bemerkung gilt für die Beziehung (5).

Wir setzen

$$\frac{1}{\psi\varrho} = \psi'(u_1 u_1' + u_2 u_2') + \frac{1}{\psi} N.$$

Es mögen jetzt einmal die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ Symmetrie-
nen des Körpers T sein. Es seien σ^* und $\sigma^{*\prime}$ Punkte, die in bezug
die Ebene $y = 0$ zu den Punkten σ und σ' symmetrisch liegen. Es
, wenn wir einmal für ϱ, N, u_1, u_2, ψ, ... ausführlicher

$$\varrho(\sigma, \sigma'),\ N(\sigma, \sigma'),\ u_1(\sigma),\ u_2(\sigma),\ \psi(\sigma),\ \ldots$$

eiben, wie man unmittelbar sieht,

$$\varrho(\sigma^*, \sigma^{*\prime}) = \varrho(\sigma, \sigma'),\ u_1(\sigma^*) = u_1(\sigma),\ u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma),\ \psi(\sigma^*) = \psi(\sigma)$$

darum auch

$$N(\sigma^*, \sigma^{*\prime}) = N(\sigma, \sigma').$$

Bezeichnen vorübergehend σ_*, σ_*' Punkte, die zu σ, σ' in bezug auf
Ebene $z = 0$ symmetrisch liegen, so ist, wie man in einer ganz ähn-
en Weise zeigen kann,

$$N(\sigma_*, \sigma_*') = N(\sigma, \sigma').$$

Aus (68) I, (4), (5) und (10) folgt für beliebige Gleichgewichtsfiguren

$$\psi\zeta + \int_S N\zeta' d\sigma' = \varepsilon - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2+b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - (a^2+b^2)\lambda\zeta \\ - U^{(2)} - U^{(3)} - \ldots = \Pi\{\lambda, \varepsilon, \zeta\}. \tag{14}$$

In diesem und dem folgenden Kapitel werden den Parametern λ und ε oder ausführlicher geschrieben $\lambda, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_q$ allgemein *komplexe* Werte erteilt.

§ 2.

Die weitere Behandlung der Funktionalgleichung (14) fällt verschieden aus, je nachdem u_1 und u_2 die einzigen Nullösungen der Integralgleichung (1) sind oder nicht. Es möge zunächst der erstere Fall vorliegen.

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_S N\zeta' d\sigma' = 0$$

keine Nullösungen.

Wir versuchen (14) durch sukzessive Approximationen aufzulösen und führen hierzu eine unendliche Folge von Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ durch folgende Festsetzungen ein. Es gilt

$$\begin{cases} \psi\zeta_1 + \int_S N\zeta_1' d\sigma' = \varepsilon - R^2\lambda, \\ \psi\zeta_2 + \int_S N\zeta_2' d\sigma' = \Pi\{\lambda, \varepsilon, \zeta_1\}, \\ \psi\zeta_3 + \int_S N\zeta_3' d\sigma' = \Pi\{\lambda, \varepsilon, \zeta_2\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{15}$$

Sind $|\lambda|$ *und* $|\varepsilon|$ *hinreichend klein*, sagen wir

$$|\varepsilon|, \quad |\lambda| \leqq \delta^{(0)}\ ^{30}), \tag{16}$$

so läßt sich für $|\zeta_n|, \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial\xi}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial\eta^2}\right|$, wie wir jetzt zeigen wollen, *eine von* n, σ *und* σ' *unabhängige obere Schranke angeben.*

Es sei l eine positive ganze Zahl $\geqq 1$ und es möge

$$|\zeta_l|, \left|\frac{\partial\zeta_l}{\partial\xi}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2\zeta_l}{\partial\eta^2}\right| \leqq \varepsilon^* \leqq \varepsilon \tag{17}$$

sein. Ist $|\varepsilon|, |\lambda| \leqq \delta$, so ist mit Rücksicht auf (14), (59) I, (60) I und (63) I

$$\begin{cases} |\Pi\{\lambda, \varepsilon, \zeta_l\}|, \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Pi\{\lambda, \varepsilon, \zeta_l\}\right|, \ldots \\ \left|\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Pi\{\lambda, \varepsilon, \zeta_l\}\right| < \beta_1\delta + \beta_2\delta\varepsilon^* + \beta_3\varepsilon^{*2} + \beta_4\delta\varepsilon^{*2}, \end{cases} \tag{18}$$

[30]) Oder ausführlicher geschrieben

$$|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_q|, |\lambda| \leqq \delta^{(0)}.$$

er β_1 bis β_4, wie später unter $\beta_5, \ldots$ positive (von l, δ und ε^* unabgige) Konstante verstanden.

Wird $|\delta| \leqq 1$ angenommen, so kann man (18) durch die einfacheren gleichheiten

$$\begin{cases} |\Pi\{\lambda, s, \zeta_l\}|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\Pi\{\lambda, s, \zeta_l\}\right|, \ldots \\ \left|\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\Pi\{\lambda, s, \zeta_l\}\right| < \beta_5(\delta + \delta\varepsilon^* + \varepsilon^{*2}) \end{cases}$$

etzen.

Es sei H der zu dem Kerne $\frac{1}{\psi}N$ gehörige lösende Kern. Aus (15) gt in naheliegender Bezeichnungsweise

$$\begin{cases} \zeta_1 = \frac{s}{\psi} - \frac{1}{\psi'}R^2\lambda - \int_S H\left[\frac{s}{\psi'} - \frac{1}{\psi'}R'^2\lambda\right]d\sigma', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_{l+1} = \frac{1}{\psi}\Pi\{\lambda, s, \zeta_l\} - \int_S \frac{1}{\psi'}H\Pi'\{\lambda, s, \zeta_l\}d\sigma' \qquad (l \geqq 1). \end{cases}$$

Es sei $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ ein beliebiger Punkt in der Umgebung des Punktes (ξ, η). sei χ eine auf S erklärte stetige reelle oder komplexe Funktion, und möge

$$|\chi| < E \qquad (E \text{ konstant})$$

n. Betrachten wir das Potential einer einfachen Belegung

$$P = \int_S \frac{1}{\varrho}\chi' d\sigma'.$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$\begin{cases} |P| < g_1 E, \quad |P - \bar{P}| < g^*(\mu_*)E\bar{d}^{\mu_*}, \\ \bar{d}^2 = (\bar{\xi} - \xi)^2 + (\bar{\eta} - \eta)^2, \quad \bar{P} = P(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \end{cases}$$

er g_1 eine positive Konstante, unter μ_* irgendeinen positiven echten ich, unter $g^*(\mu_*)$ eine nur von μ_* abhängige positive Zahl verstanden. nügt χ, außer (21), einer Beziehung von der Form

$$|\chi - \bar{\chi}| < E\bar{d}^{\mu}, \quad \bar{\chi} = \chi(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad 0 < \mu < 1,$$

hat P stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und es gilt

$$\begin{cases} |P|, \ \left|\frac{\partial P}{\partial \xi}\right|, \ \left|\frac{\partial P}{\partial \eta}\right| < g_2 E, \\ \left|\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi}\right|, \ \left|\frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta}\right| < g_2 E\bar{d}^{\mu} \qquad (g_2 \text{ konstant}). \end{cases}$$

Hat χ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und ist

$$(26)\qquad \begin{cases} \left|\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial\chi}{\partial\eta}\right| < E, \\ \left|\frac{\partial\chi}{\partial\xi} - \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial\chi}{\partial\eta} - \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\eta}\right| < E\bar{d}^{\mu}, \end{cases}$$

so hat P stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung und es gilt

$$(27)\qquad \begin{cases} |P|, \quad \left|\frac{\partial^{n_1+n_2}P}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}}\right| < g_3 E, \\ \left|\frac{\partial^{n_1+n_2}P}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}} - \frac{\partial^{n_1+n_2}\bar{P}}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}}\right| < g_3 E\bar{d}^{\mu} \qquad (n_1+n_2 \leqq 2). \end{cases}$$ [31]

Wir setzen

$$(28)\qquad Q = \int_S H\chi' d\sigma'.$$

Wie wir jetzt zeigen wollen, hat unter den zuletzt getroffenen Annahmen auch die Funktion Q stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen und es gilt

$$(29)\qquad \begin{cases} |Q|, \quad \left|\frac{\partial^{n_1+n_2}Q}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}}\right| < g_4 E, \\ \left|\frac{\partial^{n_1+n_2}Q}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}} - \frac{\partial^{n_1+n_2}\bar{Q}}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}}\right| < g_4 E\bar{d}^{\mu} \qquad (g_4 \text{ konstant}) \end{cases}$$

In der Tat ist bekanntlich [32]

$$(30)\qquad H(\sigma,\sigma') + \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma,\sigma_1) H(\sigma_1,\sigma') d\sigma_1 = \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma,\sigma'),$$

demnach, ausführlicher geschrieben,

$$(31)\qquad Q(\sigma) = \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma,\sigma')\chi_0(\sigma') d\sigma',$$

$$(32)\qquad \chi_0(\sigma) = \chi(\sigma) - \int_S H(\sigma,\sigma')\chi(\sigma') d\sigma'.$$

Für (32) kann man auch setzen

$$(33)\qquad \begin{cases} \chi_0(\sigma) = \chi(\sigma) - Q(\sigma) = \chi(\sigma) - \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma,\sigma')\chi_0(\sigma') d\sigma' \\ \qquad = \chi(\sigma) - \int_S \frac{1}{\psi\varrho}\chi_0' d\sigma' + \int_S \psi'(u_1 u_1' + u_2 u_2')\chi_0' d\sigma'. \end{cases}$$

[31] Vgl. A. Korn, „Sur les équations d'élasticité", Annales de l'École Normale, (3) 24 (1907), S. 9–75 (S. 13–18, insbesondere die letzten vier Zeilen des § 2). Herr Korn nimmt, was unwesentlich ist, χ reell an und betrachtet im übrigen die kartesischen Koordinaten. Der Übergang von diesen zu den Koordinaten ξ und η macht keine Schwierigkeiten.

[32] Vgl. z. B. J. Plemelj, „Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung", Monatshefte für Math. u. Physik 15 (1904), S. 93–128 (S. 96).

Aus (32) folgt zunächst, daß die Funktion $\chi_0(\sigma)$ stetig ist und einer leichheit von der Form

$$|\chi_0| < \beta_6 E$$

gt. Nunmehr ergibt sich aus (26) und (33), daß

$$|\bar{\chi}_0 - \chi_0| < \beta_7 E \bar{d}^{\mu}$$

Aus (33) folgt jetzt unter Berücksichtigung von (26), daß χ_0 stetige itungen erster Ordnung hat und daß

$$\left|\frac{\partial \chi_0}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \chi_0}{\partial \eta}\right| < \beta_8 E, \quad \left|\frac{\partial \bar{\chi}_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \bar{\chi}_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \chi_0}{\partial \eta}\right| < \beta_8 E \bar{d}^{\mu}$$

Die zu beweisenden Ungleichheiten sind den vorangegangenen Behtungen gemäß eine Folge der Beziehungen (31), (34) und (36).

Aus (20) und (19) schließen wir, da ψ gewiß stetige Ableitungen der en ersten Ordnungen hat, daß

$$|\zeta_{l+1}|, \quad \left|\frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \xi}\right|, \ \ldots, \ \left|\frac{\partial^2 \zeta_{l+1}}{\partial \eta^2}\right| < \beta_9 (\delta + \delta\varepsilon^* + \varepsilon^{*2})$$

Wir nehmen ε^* gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\beta_9}$$

Es sei ferner

$$\delta < \varepsilon^* \frac{1 - \beta_9 \varepsilon^*}{\beta_9 (1 + \varepsilon^*)}.$$

(37) ergibt sich dann augenscheinlich

$$|\zeta_{l+1}|, \quad \left|\frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \xi}\right|, \ \ldots, \ \left|\frac{\partial^2 \zeta_{l+1}}{\partial \eta^2}\right| < \varepsilon^*.$$

se Ungleichheiten sind also eine Folge der Ungleichheiten (17).

Wegen (20) ist, wenn $|\lambda|$, $|s|$ hinreichend klein gewählt sind, etwa

$$|\lambda|, \ |s| < \delta^{(0)} \leqq \delta, \quad \left(\delta < 1, \ \delta < \varepsilon^* \frac{1 - \beta_9 \varepsilon^*}{\beta_9 (1 + \varepsilon^*)}\right)$$

ißt

$$|\zeta_1|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2}\right| < \varepsilon^*.$$

mmt man demnach $|s|$ und $|\lambda|$ den Beziehungen (16) genügend an, so en (40), wie behauptet, für alle positiven l.

§ 3.

Die Funktionen der Folge ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sind für alle kom-ren $|\lambda|$ und $|s|$ in dem Gebiete $|\lambda|, |s| < \delta^{(0)}$ analytische und regu-Funktionen von λ.

Dies sieht man wohl am einfachsten wie folgt ein. Betrachten wi den Ausdruck

$$J = \int_S \frac{1}{\varrho_t} \sum A_t' (a' \zeta' - a\zeta)\, d\xi' d\eta' = \lim_{\bar{D}=0} \int_{S-\bar{S}} \tag{43}$$

und nehmen wir an, daß ζ eine in gewissen Kreisgebieten um den Koordi natenursprung erklärte analytische und reguläre Funktion der komplexe Variablen $v_1, \ldots, v_m$ sei. Das gleiche gilt dann, wie unter Zuhilfenahm des Cauchyschen Integrals unmittelbar gezeigt werden kann, auch fü $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$. Das Integral $\int_{S-\bar{S}}$ ist in t und $v_1, \ldots, v_m$ analytisch und regulär und, da der Grenzübergang gleichmäßig ist, so gilt das gleiche auch für J. Auch die Differentialquotienten $\frac{\partial^m U_t}{\partial t^m} = \frac{\partial^{m-1} J}{\partial t^{m-1}}$ sind in $v_1, \ldots, v_m$ und analytisch und regulär. In der Entwicklung

$$U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots \tag{44}$$

sind mithin alle Funktionen $U^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in bezug auf $v_1, \ldots, v_m$ analytisch und regulär. Die unendliche Reihe (44) konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Demnach ist auch der Ausdruck $U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots$ in bezug auf $v_1, \ldots, v_m$ analytisch und regulär.

Aus (20) folgt ohne weiteres, daß ζ_1 in bezug auf s und λ[33]) analytisch ist[34]). Nach dem soeben bewiesenen gilt das gleiche für $\Pi\{\lambda, s, \zeta_1\}$; für $v_1, \ldots, v_m$ sind diesmal $\lambda, s_1, \ldots, s_q$ einzuführen. Auch der Ausdruck

$$\int_S \frac{1}{\psi'} H\, \Pi'\{\lambda, s, \zeta_1\} d\sigma' = \lim_{D=0} \int_{S-\bar{S}} \frac{1}{\psi'} H\, \Pi'\{\lambda, s, \zeta_1\} d\sigma' \text{ [35])}, \tag{45}$$

demnach auch ζ_2 ist in bezug auf λ und s analytisch. Also sind alle ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ in den Kreisflächen $|s|, |\lambda| < \delta^{(0)}$ in bezug auf λ und s analytisch und regulär.

Es sei ζ_{n1} $(n = 1, 2, \ldots)$ irgendeine der Folge ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ entnommene Teilfolge. Wegen (40) läßt sich aus ζ_{n1} eine weitere Folge ζ_{n2} $(n = 1, 2, \ldots)$ aussondern, so daß ζ_{n2}, $\frac{\partial \zeta_{n2}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta_{n2}}{\partial \eta}$ für alle (ξ, η) auf S und alle $|\lambda|, |s| \leqq \delta^{(1)} < \delta^{(0)}$ gleichmäßig konvergieren. Die Grenzfunktion ζ ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Sie genügt den Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\xi}}\right| < \varepsilon^* \bar{d}, \qquad \left|\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\eta}}\right| < \varepsilon^* \bar{d}. \tag{46}$$

[33]) Oder, ausführlicher geschrieben, in bezug auf $s_1, \ldots, s_q, \lambda$.

[34]) Und den Beziehungen (42) genügt.

[35]) Mit $\Pi'\{\lambda, s, \zeta_1\}$ wird der Wert bezeichnet, den man erhält, wenn man in $\Pi\{\lambda, s, \zeta_1\}$ für σ überall σ' setzt.

gilt nämlich der folgende, im wesentlichen auf Ascoli zurückende Satz.

In einem mehrdimensionalen beschränkten, reellen oder komplexen iete Θ sei eine Folge stetiger, gleichmäßig beschränkter Funktionen rerer reeller oder komplexer Variablen F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ gegeben, en Differenzenquotienten in bezug auf alle Variablen ebenfalls gleichßig beschränkt sind. Dann läßt sich aus einer jeden aus $F_n (n = 1, 2, \ldots)$ nommenen Teilfolge F_{n1} $(n = 1, 2, \ldots)$ eine weitere Teilfolge $(n = 1, 2, \ldots)$ aussondern, die in jedem ganz im Innern von Θ genen Bereiche gleichmäßig konvergiert[36]).

Im vorliegenden Falle ist der Satz auf die Folgen $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}$ $= 1, 2, \ldots)$ anzuwenden. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}$ sind ktionen von ξ, η, λ, $s_1, \ldots s_q$ und haben wegen (40) gleichmäßig chränkte Ableitungen in bezug auf ξ und η. Da sie ferner für $|s| < \delta^{(0)}$ analytisch und regulär sind, so sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}, \ldots \frac{\partial}{\partial s_q} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}$ für $|\lambda|, |s| \leqq \delta^{(1)} < \delta^{(0)}$ gewiß gleichmäßig beschränkt. n kann demnach aus ζ_{n1} eine Teilfolge ζ_{n3} aussondern, so daß $\frac{\partial \zeta_{n3}}{\partial \xi}$ chmäßig konvergieren. Aus ζ_{n3} wird eine weitere Teilfolge ζ_{n4} extrat, so daß $\frac{\partial \zeta_{n4}}{\partial \eta}$ gleichmäßig konvergieren. Von ζ_{n4} geht man endlich ζ_{n2} über, so daß auch ζ_{n2} selbst gleichmäßig konvergiert. Ist $= \lim_{n=\infty} \zeta_{n2}$, so ist offenbar

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \zeta_{n2}}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \zeta_{n2}}{\partial \eta}.$$

Aus (40) ergeben sich die Ungleichheiten

$$\left| \frac{\partial \bar{\zeta}_{n2}}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta_{n2}}{\partial \xi} \right| < \varepsilon^* \bar{d}, \qquad \left| \frac{\partial \bar{\zeta}_{n2}}{\partial \eta} - \frac{\partial \zeta_{n2}}{\partial \eta} \right| < \varepsilon^* \bar{d}$$

l aus diesen durch einen Grenzübergang $n \to \infty$, wie behauptet, die ziehungen (46).

Es gilt, wenn man mit J_{n2} den Wert bezeichnet, in den das Integral J l. die Formel (32) I) übergeht, wenn man ζ durch ζ_{n2} ersetzt, für alle

) $$|s|, \quad |\lambda| \leqq \delta^{(1)}, \quad |t| \leqq t^*$$

ichmäßig

) $$\lim_{n=\infty} J_{n2} = J,$$

[36]) Vgl. z. B. D. Hilbert, „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen gralgleichungen", Vierte Mitteilung. Gött. Nachr. 1906, S. 157–227 (S. 162–164, elbst eindimensionale Gebiete betrachtet werden).

demnach wegen

$$U_1 - U = \int_0^1 J dt \tag{49}$$

für $|s|, |\lambda| \leqq \delta^{(1)}$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} [U_1 - U]_{\zeta_{n2}} = U_1 - U, \tag{50}$$

unter $[U_1 - U]_{\zeta_{n2}}$ den Wert verstanden, den man erhält, wenn man in $U_1 - U$ für ζ einfach ζ_{n2} einführt. Setzt man in (48) insbesondere $t = 0$, so findet man mit Rücksicht auf (28) I und (32) I

$$\lim_{n=\infty} [U^{(1)}]_{\zeta_{n2}} = U^{(1)}. \tag{51}$$

Aus (50) und (51) folgt

$$\lim_{n=\infty} [U_1 - U - U^{(1)}]_{\zeta_{n2}} = U_1 - U - U^{(1)}. \tag{52}$$

Aus

$$\psi \zeta_{n2} + \int_S N \zeta'_{n2} d\sigma' = \Pi\{\lambda, s, \zeta_{n2}\} \tag{53}$$

ergibt sich jetzt durch einen Grenzübergang, $n \to \infty$

$$\psi\zeta + \int_S N\zeta' d\sigma' = s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2 + b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta \tag{54}$$
$$- (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \ldots$$

Aus

$$\zeta = \lim_{n=\infty} \zeta_{n2}$$

folgt, da der Grenzübergang gleichmäßig ist, *daß auch* ζ *für*

$$|s|, |\lambda| \leqq \delta^{(1)} \tag{55}$$

in bezug auf λ *und* s *analytisch und regulär ist.* Es sei

$$\zeta = \sum a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q} \lambda^{\nu_0} s^{\nu_1} \ldots s_q^{\nu_q}. \tag{56}$$

Aus der Cauchyschen Integraldarstellung folgt nun, daß die Funktionen $a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q}$ in bezug auf ξ und η stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die unendliche Reihe (56) kann gliedweise differentiiert werden. Es seien in der Tat $\Gamma_\lambda, \Gamma_{s_1}, \ldots \Gamma_{s_q}$ Kreise vom Halbmesser $\delta^{(1)}$ um den Koordinatenursprung in den Ebenen der komplexen Variablen $\lambda, s_1, \ldots s_q$. Für alle $|\lambda|, |s_1|, \ldots |s_q| < \delta^{(1)}$ ist, wenn wir einmal ausführlicher $\zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \ldots s_q)$ für ζ schreiben,

$$\zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \ldots s_q) = \frac{1}{(2\pi i)^{q+1}} \int_{\Gamma_\lambda} \ldots \int_{\Gamma_{s_q}} \frac{\zeta(\xi, \eta; \tilde{\lambda}, \tilde{s}_1, \ldots \tilde{s}_q)}{(\tilde{\lambda} - \lambda) \ldots (\tilde{s}_q - s_q)} d\tilde{\lambda} d\tilde{s}_1 \ldots d\tilde{s}_q \tag{57}$$

aus folgt z. B.

$$(\xi, \eta; \lambda, s_1, \ldots s_q) = \frac{1}{(2\pi i)^{q+1}} \int_{\Gamma_\lambda} \ldots \int_{\Gamma_{s_q}} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(\xi, \eta; \tilde{\lambda}, \tilde{s}_1, \ldots \tilde{s}_q)}{(\tilde{\lambda} - \lambda) \ldots (\tilde{s}_q - s_q)} d\tilde{\lambda} d\tilde{s}_1 \ldots d\tilde{s}_q.$$

ist $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und ebenso $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ eine analytische und reguläre Funktion von $_1, \ldots s_q$. Hieraus folgt fast unmittelbar, daß die Reihe (56) gliedse differentiierbar ist. Nach (46) hat ζ beschränkte Differenzenquoten zweiter Ordnung. Aus (56) folgt, wenn man zu Differenzenquoten zweiter Ordnung übergeht, daß diese für $\lambda \to 0$, $s_1 \to 0$, $\ldots$ $s_q \to 0$ chmäßig gegen Null konvergieren. Das gleiche gilt natürlich auch $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$.

Führt man in (54) für ζ den Ausdruck (56) ein, so gewinnt man iehungen zur Bestimmung der Funktionen $a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q}$. Gesetzt, die Funkhen $a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q}$ $(\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_q \leqq n)$ seien bereits ermittelt. Man erhält n zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q}$ $(\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_q = n + 1)$ egralgleichungen von der Form

$$) \qquad \psi a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q} + \int_S N a'_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q} d\sigma' = A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q}.$$

Ausdruck $A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q}$ ist der Koeffizient von $\lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \ldots s_q^{\nu_q}$ in dem Poly-n, das man erhält, wenn man in

$$) \qquad s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2 + b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \ldots - U^{(n)}$$

ζ das Polynom

$$) \qquad \sum a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \ldots s_q^{\nu_q} \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_q \leqq n)$$

führt. Die Gleichung (58) bestimmt $a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_q}$ vollständig.

Die Gleichung (54) *kann demnach keine von* ζ *verschiedene in bezug* $\lambda, s_1, \ldots s_q$ *analytische Lösung haben.* Da indessen, wie aus den ben durchgeführten Überlegungen folgt, jede aus $\zeta_n (n = 1, 2, \ldots)$ herausriffene Teilfolge mindestens eine in bezug auf $\lambda, s_1, \ldots, s_q$ analytische enzfunktion hat, so konvergiert nach einer bekannten Schlußweise die ge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ selbst, und zwar natürlich gegen die Funktion ζ. *Das rfahren der sukzessiven Approximationen konvergiert.*

Würde nämlich $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ nicht konvergieren, so gebe es mindestens Wertsystem $\xi, \eta, \lambda, s_1, \ldots s_q$, in dem die Folge ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ mehr eine Häufungsstelle hätte. Es sei etwa ζ eine von ζ verschiedene Häugsstelle. Es gebe dann eine konvergente Teilfolge aus ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, daß die natürlich in $\lambda, s_1, \ldots s_q$ analytische Grenzfunktion im Punkte

$\underline{\xi}$, $\underline{\eta}$, $\underline{\lambda}$, $\underline{s}_1, \ldots \underline{s}_q$ gegen $\underline{\zeta}$ konvergieren müßte, was nach dem vorstehenden nicht möglich ist.

§ 4.

In dem Kapitel IV werden wir in einer recht allgemeinen Weise zeigen, daß die vorhin gefundene Lösung der Integro-Differentialgleichung (54) die einzige Lösung ist, der eine [37]) Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit in der Umgebung des Körpers T entsprechen kann. Gibt es in der Umgebung von T weitere Figuren des relativen Gleichgewichtes, so sind diese durch die Gleichung (56) gegeben. Damit die Fläche ξ, η, ζ wirklich eine Gleichgewichtsfigur begrenze, müssen indessen für alle den Ungleichheiten (55) genügenden Werte λ, $s_1, \ldots s_q$ die Beziehungen (4) und (5) erfüllt sein. Diese ergeben unendlich viele Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten $a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_q}$. Lassen sich diese nicht erfüllen, so gibt es in der Umgebung von T keine weiteren Gleichgewichtsfiguren; T ist eine isolierte Gleichgewichtsfigur.

Wie wir jetzt zeigen wollen, werden die Beziehungen (4) *und* (5) *von selbst erfüllt, wenn T die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ zu Symmetrieebenen hat* [38]).

Wir setzen für (14) nach (40) I

$$(61)\quad \psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_S N(\sigma,\sigma')\zeta(\sigma')\,d\sigma' = s - P\{\lambda,\sigma,\zeta(\sigma)\} - U_1(\sigma) + U(\sigma) + U^{(1)}(\sigma),$$

$$(62)\quad P\{\lambda,\sigma,\zeta(\sigma)\} = R^2(\sigma)\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2(\sigma)+b^2(\sigma))\zeta^2(\sigma) - 2R(\sigma)\tau(\sigma)\lambda\zeta(\sigma) - (a^2(\sigma)+b^2(\sigma))\lambda\zeta^2(\sigma).$$

Hieraus folgt

$$(63)\quad \psi(\sigma^*)\zeta(\sigma^*) + \int_S N(\sigma^*,\sigma')\zeta(\sigma')\,d\sigma' = s - P\{\lambda,\sigma,\zeta(\sigma^*)\} - U_1(\sigma^*) + U(\sigma^*) + U^{(1)}(\sigma^*)\ [39]),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(64)\quad \psi(\sigma^*)\zeta(\sigma^*) + \int_S N(\sigma^*,\sigma^{*\prime})\zeta(\sigma^{*\prime})\,d\sigma^{*\prime} = s - P\{\lambda,\sigma,\zeta(\sigma^*)\} - U_1(\sigma^*) + U(\sigma^*) + U^{(1)}(\sigma^*).$$

Es sei $\mathfrak{T}_1$ der Körper, der entsteht, wenn man T_1 an der Ebene

---

[37]) Zu $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ gehörende, den Beziehungen (4) und (5) genügende, mithin nicht triviale.

[38]) Alle bisher bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren haben bei passender Orientierung des Achsenkreuzes diese Eigenschaft. Wahrscheinlich gibt es keine anderen Gleichgewichtsfiguren.

[39]) Wegen der Bezeichnungsweise vgl. II § 1.

0 spiegelt. Dem Punkte $\sigma = (\xi, \eta)$ auf S wird hierdurch die ordinate" $\mathfrak{z}(\sigma) = \zeta(\sigma^*)$ zugeordnet. Das Potential von $\mathfrak{T}_1$ im kte $\xi, \eta, \mathfrak{z}(\sigma)$ sei mit $\mathfrak{U}_1(\sigma)$ bezeichnet.

Offenbar ist

$$U_1(\sigma^*) = \mathfrak{U}_1(\sigma), \quad P\{\lambda, \sigma^*, \zeta(\sigma^*)\} = P\{\lambda, \sigma, \mathfrak{z}(\sigma)\},$$

$$U(\sigma^*) = \mathfrak{U}(\sigma), \quad \psi(\sigma^*) = \psi(\sigma), \quad N(\sigma^*, \sigma^{*\prime}) = N(\sigma, \sigma'), \quad d\sigma^{*\prime} = d\sigma'.$$

Nach (46) I ist schließlich

$$U^{(1)}(\sigma^*) = \mathfrak{U}^{(1)}(\sigma).$$

Aus (64) folgt darum

$$\psi(\sigma)\mathfrak{z}(\sigma) + \int_S N(\sigma, \sigma')\mathfrak{z}(\sigma')d\sigma' = s - P\{\lambda, \sigma, \mathfrak{z}(\sigma)\} - \mathfrak{U}_1(\sigma) + \mathfrak{U}(\sigma) - \mathfrak{U}^{(1)}(\sigma).$$

Die Funktion $\mathfrak{z}(\sigma) = \zeta(\sigma^*)$ ist demnach eine in bezug auf λ und s lytische und reguläre Lösung der Integro-Differentialgleichung (14). h dem soeben bewiesenen kann diese von $\zeta(\sigma)$ nicht verschieden sein. gilt mithin

$$\zeta(\sigma) = \zeta(\sigma^*).$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß auch

$$\zeta(\sigma) = \zeta(\sigma_*)$$

Aus (66) und (67) folgt wegen $u_1(\sigma_*) = -u_1(\sigma)$, $u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma)$

$$\int_S \psi\zeta u_1 d\sigma = 0, \qquad \int_S \psi\zeta u_2 d\sigma = 0.$$

Diese Beziehungen gestatten von der Gleichung (14) zu der Glei- ng (68) I überzugehen. *Die Fläche* $\zeta, \eta, \zeta(\xi, \eta)$ *begrenzt eine Gleich- ichtsfigur der Flüssigkeit. Die Ebenen* $y = 0$ *und* $z = 0$ *sind*, wegen) und (67), *Symmetrieebenen des Körpers.*

War die Ausgangsfigur von einer Rotationsfläche um die z-Achse be- nzt, so gilt von den neuen Figuren des Gleichgewichts das gleiche. nn jetzt ist jede durch die Rotationsachse hindurchgehende Ebene eine nmetrieebene der Figur.

Drittes Kapitel.

Existenzsatz. Verzweigungsfiguren.

§ 1.

Die Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0$$

ge jetzt Nullösungen haben, die von den Funktionen u_1 und u_2 linear bhängig sind.

Es sei

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_m \tag{2}$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen von (1).

Es sei vorübergehend

$$v_3(\sigma) = u_3(\sigma^*),\ \ldots,\ v_m(\sigma) = u_m(\sigma^*) \tag{3}$$

gesetzt. Sind, wie wir zunächst voraussetzen wollen, die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ Symmetrieebenen von T, so sind auch die Funktionen $v_3(\sigma), \ldots, v_m(\sigma)$ Nullösungen von (1). Denn es ist z. B.

$$\psi(\sigma^*)u_3(\sigma^*) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma^*, \sigma')} u_3(\sigma')\,d\sigma' = 0, \tag{4}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\psi(\sigma^*)u_3(\sigma^*) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma^*, \sigma^{*\prime})} u_3(\sigma^{*\prime})\,d\sigma^{*\prime} = 0, \tag{5}$$

mithin wegen (11) II und (3)

$$\psi(\sigma)v_3(\sigma) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} v_3(\sigma')\,d\sigma' = 0. \tag{6}$$

Auch die Funktionen

$$w_l = u_l + v_l \quad \text{und} \quad \overline{w}_l = u_l - v_l \tag{7}$$

sind Nullösungen von (1), sofern sie nicht identisch verschwinden. Wegen

$$u_l = \frac{w_l + \overline{w}_l}{2} \tag{8}$$

läßt sich jede Nullösung der Integralgleichung (1) linear durch die Lösungen w_l, $\overline{w}_l$ $(l = 1, \ldots m)$ ausdrücken. Also läßt sich aus w_l, $\overline{w}_l$ $(l = 1, \ldots m)$ ein vollständiges System linear unabhängiger Nullösungen, etwa w_{1l} $(l = 1, \ldots m)$ aussondern. Entweder ist

$$w_{1l}(\sigma^*) = w_{1l}(\sigma) \quad \text{oder} \quad w_{1l}(\sigma^*) = -w_{1l}(\sigma).$$

Da $u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma)$ ist, so gibt es, wenn S keine Rotationsfläche um die z-Achse ist, mindestens eine Nullösung der zweiten Kategorie. Da $w_1 = 2u_1$, $\overline{w}_2 = 2u_2$ ist, so kann man sich gewiß so einrichten, daß das System w_{1l} die Nullösungen u_1 und u_2 enthält. Von diesem System ausgehend gewinnt man, wenn man den vorhin durchgeführten Prozeß in bezug auf die Ebene $z = 0$ wiederholt, ein neues vollständiges System linear unabhängiger Nullösungen, dessen einzelne Individuen auch bei dem Übergang von σ zu σ_* entweder ungeändert bleiben oder das Vorzeichen wechseln. Man kann sich augenscheinlich so einrichten, daß die Funktionen u_1 und u_2 auch dem neuen System angehören. Wir bezeichnen von nun an das zuletzt erwähnte System der Nullösungen mit $u_1, u_2, \ldots u_m$.

Wie man leicht sieht, bilden die Funktionen

$$\psi u_l \qquad (l = 1, \dots m)$$

vollständiges System linear unabhängiger Nullösungen der zu (1) adierten Integralgleichung. Die Lösungen u_l $(l = 1, \dots m)$ denken wir in der üblichen Weise den Beziehungen

$$\int_S \psi u_l^2 d\sigma = -1$$

äß normiert [40]).

Aus der Definitionsgleichung

$$\psi u_l + \int_S \frac{1}{\varrho} u_l' d\sigma' = 0 \qquad (l = 1, \dots m)$$

t, wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, *daß die Nullösungen* $l = 1, \dots m$) *stetige Ableitungen aller Ordnungen haben.* In der Tat igt den im Kapitel II § 2 angegebenen Hilfssätzen der Potentialtheorie äß [vgl. die Formeln (21) II, (22) II, (23) II] das Potential einer achen Belegung

$$P_1 = \int_S \frac{1}{\varrho} u_l' d\sigma'$$

r Beziehung von der Form

$$|\bar{P}_1 - P_1| < g^*(\mu_*) E \bar{d}^{\mu'}.$$

Funktion

$$u_l = -\frac{1}{\psi} \int_S \frac{1}{\varrho} u_l' d\sigma'$$

llt, da ψ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat, eine ganz analoge gleichheit. Da die Dichte der Belegung von P_1 demnach eine der iehung (24) II entsprechende Ungleichheit erfüllt, so hat u_l nach pitel II § 2 [Formel (25) II] stetige partielle Ableitungen erster Ordg, die einer zu (25) II analogen Ungleichheit genügen. Man kann jetzt dieser Weise weiter fortschreiten, indem man sich auf entsprechende ze über die höheren partiellen Ableitungen des Potentials einer einen Belegung stützt. Man gelangt so zu dem zuletzt angegebenen Satz.

§ 2.

Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche Nullösungen $u_3, \dots u_m$ in ug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind. Die Funktion

$$\frac{1}{\psi} N - \sum_{l=3}^{m} \psi' u_l u_l' = \frac{1}{\psi \varrho} - \sum_{l=1}^{m} \psi' u_l u_l' = \frac{1}{\psi} N_1$$

[40]) Vgl. die Fußnote [29]).

genügt offenbar den Beziehungen

$$N_1(\sigma^*, \sigma^{*\prime}) = N_1(\sigma, \sigma'), \qquad N_1(\sigma_*, \sigma'_*) = N_1(\sigma, \sigma'). \tag{12}$$

Die Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_S N_1 \zeta' d\sigma' = 0 \tag{13}$$

hat keine Nullösungen.

Wir schreiben jetzt die Integro-Differentialgleichung (14) II in der Form

$$\psi\zeta + \int_S N_1 \zeta' d\sigma' = \Pi\{\lambda, s, \zeta\} + \sum_{l=3}^{m} \psi_l r_l u_l, \tag{14}$$

$$r_l = -\int_S \psi' u_l' \zeta' d\sigma' \qquad (l = 3, \dots m) \tag{15}$$

und fassen r_l $(l = 3, \dots m)$ zunächst als unbestimmte Parameter auf[41]. Durch eine fast wortgetreue Wiederholung der Betrachtungen des II. Kapitels überzeugt man sich, daß die Beziehung (14) für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte von $|\lambda|$, $|s_l|$ $(l = 1, \dots q)$ und $|r_l|$ $(l = 3, \dots m)$, etwa

$$|\lambda| \leqq \delta^{(2)}, \quad |s_l| \leqq \delta^{(2)} \ (l = 1, \dots q), \quad |r_l| \leqq \delta^{(2)} \ (l = 3, \dots m) \tag{16}$$

eine und nur eine in bezug auf diese $(m + p - 1)$ Parameter analytische und reguläre Lösung ζ hat. Sie kann durch sukzessive Approximationen gewonnen werden. Diese konvergieren gleichmäßig.

Es sei H_1 der zu $\frac{1}{\psi} N_1$ gehörige lösende Kern. Die Glieder ersten Grades der Entwicklung von ζ lassen sich unmittelbar bestimmen. Man findet wegen

$$\int_S H_1(\sigma, \sigma') u_l(\sigma') d\sigma' = 0,$$

$$\zeta = \frac{s}{\psi} + \sum_{j=3}^{m} r_j u_j - \frac{1}{\psi} R^2\lambda + \int_S H_1 \left\{ -\frac{s}{\psi'} + \frac{1}{\psi'} R'^2\lambda \right\} d\sigma' + \tag{17}$$

$$+ \sum b_{\nu_0 \nu_1, \dots \mu_m} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q} r_3^{\mu_3} \dots r_m^{\mu_m} \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \dots + \mu_m > 1).$$

Durch Überlegungen, die den im Kapitel II § 4 durchgeführten Betrachtungen ganz analog sind, läßt sich zeigen, daß die Funktion ζ in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch ist. Demnach ist für alle den Beziehungen (16) genügenden Werte von λ; $s_1, \dots s_q$; $r_3, \dots r_m$

$$\int_S \zeta u_1 d\sigma = 0, \qquad \int_S \zeta u_2 d\sigma = 0. \tag{18}$$

[41]) Einer ähnlichen Zerlegung des Kernes in Summanden bedient sich Herr E. Schmidt in seinen Untersuchungen über die Verzweigung der Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen. Vgl. E. Schmidt, „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen", Math. Annalen 65 (1908), S. 370—399.

Führt man den Ausdruck (17) für ζ in die Gleichungen (15) ein, so lt man $(m-2)$ Gleichungen zur Bestimmung der Größen $r_3, \ldots r_m$. ist nun

$$\int_S \psi u_l^2 d\sigma = -1$$

nach bekannten Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen

$$\int_S H_1(\sigma, \sigma')\psi(\sigma)u_l(\sigma)d\sigma = 0 \qquad (l = 3, \ldots m).$$

Die vorgenannten Gleichungen sind demnach, wie man leicht sieht, der Form

$$\lambda \int R^2 u_l d\sigma - \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_j \int_{S_j} u_l d\sigma + \mathfrak{P}_l(\lambda; \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_q; r_3, \ldots r_m) = 0,$$

$$\mathfrak{P}_l = \sum B_{\nu_0 \nu_1, \ldots \nu_q \mu_3 \ldots \mu_m} \lambda^{\nu_0} \varepsilon_1^{\nu_1} \ldots \varepsilon_q^{\nu_q} r_3^{\mu_3} \ldots r_m^{\mu_m}$$

($B_{\nu_0 \ldots \mu_m}$ konstant, $\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \mu_m > 1$)[42]

$(l = 3, \ldots m)$

Es sei

$$r_j = r_j(\lambda, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_q) \qquad (j = 1, \ldots q)$$

für $\lambda = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_q = 0$ verschwindendes System von Lösungen er Gleichungen. Für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|, |\varepsilon_1|, \ldots |\varepsilon_q|$ l demnach die Bedingungen (16) gewiß erfüllt. Die Funktion (17) ügt der Integro-Differentialgleichung (14) und wegen (18) auch der ichung (68) I. Die Fläche $\xi, \eta, \zeta(\xi, \eta)$ begrenzt eine Figur des rela- n Gleichgewichtes.

Die Untersuchung der Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der ebenen Figur ist damit auf die Diskussion des Systems der Glei- ngen (21) zurückgeführt.

§ 3.

Wir führen zur Vereinfachung die folgende Bezeichnungsweise ein.

Eine lineare Reihe von (reellen) Gleichgewichtsfiguren, die den Werten λ es Vorzeichens ($\lambda \geqq 0$ oder $\lambda \leqq 0$) entsprechen, wollen wir mit Schwarz- ild[43]) einen *Arm von Gleichgewichtsfiguren* nennen. Eine lineare Reihe nen wir *regulär*, wenn die zugehörige Funktion ζ in eine in der Um- ung des Wertes $\lambda = 0$ konvergierende Potenzreihe von λ entwickelt den kann. Eine reguläre Reihe besteht stets aus zwei entsprechend zu

[42]) Mit S_j $(j = 1, \ldots q)$ sind hier die zu den einzelnen Massen von T gehörenden ppen von Komponenten der Fläche S bezeichnet.

[43]) Vgl. K. Schwarzschild, loc. cit. [6]) S. 34 sowie S. 38—41.

$\lambda \geqq 0$ und $\lambda \leqq 0$ gehörenden Armen. Demgegenüber bilden zwei so orientierte Arme von Gleichgewichtsfiguren nicht immer eine reguläre Reihe.

Der weiteren Betrachtung legen wir zunächst den einfachsten Fall $q = 1$, $m = 3$ zugrunde. Der Körper besteht aus einer einzigen zusammenhängenden Flüssigkeitsmasse. Die Integralgleichung (1) hat nur eine nicht triviale Nullösung u_s. Wie wir wissen, dürfen wir in diesem Falle $s = 0$ annehmen. Das Gleichungssystem (21) geht jetzt über in

$$(23)\qquad \begin{cases} A\lambda + \mathfrak{P}(\lambda, r_s) = 0, \\ A \cdot \int_S R^2 u_s \, d\sigma, \qquad \mathfrak{P}(\lambda, r_s) = \sum_{j,l} B_{j,l} \lambda^j r_s^l. \qquad (j + l > 1) \end{cases}$$

Es sei zunächst $A \neq 0$, und es sei $B_{0l} r_s^l$ $(l \geqq 2)$ das erste λ nicht enthaltende Glied der Potenzreihe, das nicht verschwindet. Die Entwicklung von r_s in der Umgebung des Wertes $\lambda = 0$ ist von der Form

$$(24)\qquad r_s = \left(-\frac{A}{B_{0l}}\lambda\right)^{\frac{1}{l}} + \mathfrak{P}^{(1)}\left\{\left(-\frac{A}{B_{0l}}\lambda\right)^{\frac{1}{l}}\right\},$$

unter $\mathfrak{P}^{(1)}$, wie später unter $\mathfrak{P}^{(2)}$, $\mathfrak{P}^{(3)}, \ldots$, gewisse im Nullpunkt verschwindende Potenzreihen verstanden.

Ist l eine gerade Zahl, so gibt es zwei reelle Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Sie gehören zu denjenigen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werten von λ, deren Vorzeichen mit dem Vorzeichen von $-\frac{A}{B_{0l}}$ übereinstimmt. Von der betrachteten Figur gehen zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.

Ist l ungerade, so geht von T, wie man leicht sieht, für $\lambda > 0$ und für $\lambda < 0$ je ein Arm von Gleichgewichtsfiguren aus.

Es sei $A = 0$ und $B_{02} \neq 0$. Die Gleichung (23) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(25)\qquad B_{02} r_s^2 + B_{11} r_s \lambda + B_{20} \lambda^2 + \ldots = 0.$$

Sie hat zwei Lösungen von der Form

$$(26)\qquad \begin{cases} r_s = \frac{1}{2B_{02}}\left(-B_{11} + \sqrt{B_{11}^2 - 4B_{02}B_{20}}\right)\lambda + \mathfrak{P}^{(2)}(\lambda), \\ r_s = \frac{1}{2B_{02}}\left(-B_{11} - \sqrt{B_{11}^2 - 4B_{02}B_{20}}\right)\lambda + \mathfrak{P}^{(3)}(\lambda). \end{cases}$$

Ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv, so gibt es zwei sich in T kreuzende reguläre Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Ist $B_{11}^2 - 4B_{02}B_{20} = 0$, so fallen die ersten Glieder der Entwicklungen (26) zusammen. Der Charakter der Nachbarfiguren hängt von dem Verhalten der höheren Glieder der Entwicklung (25) ab: Ist endlich $B_{11}^2 - 4B_{02}B_{20} < 0$,

ibt es in der Umgebung von T keine neuen (reellen) Gleichgewichts-
en; T ist eine isolierte Figur.

Es möge jetzt zugleich

$$A = 0, \qquad B_{02} = 0$$

allen; hingegen seien $B_{11} \neq 0$, $B_{20} \neq 0$. Die erste nicht verschwin-
le Potenz von r_3 in (23) sei r_3^n $(n > 2)$. Die Gleichung (23) nimmt
t die Gestalt an

$$B_{11} r_3 \lambda + B_{0n} r_3^n + B_{0n_1} r_3^{n_1} + \ldots + \lambda^2 (B_{20} + \ldots) + \ldots = 0.$$

Für r_3 erhält man die beiden Entwicklungen

$$r_3 = -\frac{B_{20}}{B_{11}} \lambda + \mathfrak{P}^{(4)}(\lambda),$$

$$r_3 = \left[-\frac{B_{11}}{B_{0n}} \lambda \right]^{\frac{1}{n-1}} + \ldots.$$

Die Entwicklung (29) liefert eine reguläre Reihe von Gleichgewichts-
ren, die Entwicklung (30) zwei Arme von Figuren, die (für gerade n)
Werten von λ verschiedenen, oder (für ungerade n) des gleichen Vor-
hens entsprechen. Unter den weiteren besonderen Fällen, die denkbar
, betrachten wir nur noch den Fall, daß A und alle B_{1l} verschwinden.
Gleichung (23) ist alsdann identisch erfüllt. Die Funktion

$$\zeta = r_3 u_3 - \frac{1}{\psi'} R^2 \lambda + \lambda \int_S H_1 \frac{1}{\psi'} R'^2 d\sigma' + \sum b_{\nu_0 \mu_3} \lambda^{\nu_0} r_3^{\mu_3} \quad (\nu_0 + \mu_3 > 1)$$

illt für alle hinreichend kleinen Werte von $|r_3|$ und $|\lambda|$ die Integro-
ferentialgleichungen (14) und (68) I. Wie in dem Kapitel I § 1 aus-
ihrt, kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß
aus (31) zu gewinnenden Gleichgewichtsfiguren dasselbe Volumen
en. *Zu einem jeden hinreichend kleinen Wert von λ gehört demnach
e stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren gleichen Volumens.* Setzt
n in (31) insbesondere $\lambda = 0$, so erhält man eine stetige Schar von
ichgewichtsfiguren

$$\zeta = r_3 u_3 + \sum_{\mu_3 = 2}^{\infty} b_{0\mu_3} r_3^{\mu_3},$$

zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit gehören und wegen (18)
ht aus T durch eine Parallelverschiebung längs der Rotationsachse,
r eine Drehung um diese abgeleitet worden sind.

Die Existenz einer Schar von Gleichgewichtsfiguren dieser Art ist
o eine notwendige Bedingung dafür, daß der jetzt betrachtete besondere
l eintreten kann. Gleichgewichtsfiguren dieser Art sind nicht bekannt.

Bei den Maclaurinschen Ellipsoiden kann dieser Fall, wie Herr Liapounoff durch eine ins Einzelne gehende Diskussion der Verzweigungsgleichung gezeigt hat, nicht eintreten[44]).

Zu analogen Resultaten gelangt man, wenn man allgemeiner $q > 1$, $m > 3$ annimmt.

§ 4.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß man ein System von Nullösungen der Integralgleichung (1) II, die in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind, wählen kann, so daß diese, mit den trivialen Lösungen zusammengenommen, ein vollständiges System der Nullösungen bilden. Es möge jetzt im Gegensatz hierzu, um einen besonders einfachen Fall herauszugreifen, $m = 3$ und etwa

$$u_3(\sigma^*) = u_3(\sigma), \qquad u_3(\sigma_*) = -u_3(\sigma) \tag{32}$$

sein. Neben der Bedingungsgleichung (15) sind wie zuletzt auch die Gleichungen (18) zu erfüllen.

Man kann allen diesen Beziehungen dadurch genügen, daß man $r_3 = 0$ setzt. Man kommt dabei auf eine zu (14) II ganz analoge Gleichung, wobei für N jetzt der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} - \psi\psi'(u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3') \tag{33}$$

eintritt. Die Lösung ist in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch, so daß die Gleichungen

$$\int_S \zeta u_1 \, d\sigma = 0, \qquad \int_S \zeta u_2 \, d\sigma = 0, \qquad r_3 = \int_S \zeta u_3 \, d\sigma = 0 \tag{34}$$

gewiß erfüllt sind. Man erhält eine reguläre Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Ob es in der Nachbarschaft von T noch weitere Gleichgewichtsfiguren gibt, kann erst eine eingehende Diskussion der Beziehungen (23) und (18) lehren.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß dieser Fall in Wirklichkeit nicht eintritt. In dem besonderen Falle der Maclaurinschen und der Jacobischen Ellipsoide hat die Integralgleichung (1) II bei vorgegebenem Volumen der Flüssigkeit für eine gewisse abzählbare Menge von Werten der kleinen Achse nicht triviale Nullösungen. Hier ist $m = 3$, d. h. es gibt nur eine nicht triviale Nullösung. Diese ist in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch[45]). Bei den Maclaurinschen Ellipsoiden ist überdies u_3 identisch gleich Null.

---

[44]) Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. [10]) Abhandlung 2. S. 214—215, Abhandlung 3. passim, insbesondere S. 2.

[45]) Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. [5]) passim; H. Poincaré, loc. cit. [6]) erste Abhandlung passim; A. Liapounoff, loc. cit. [10]) Abhandlung 2. passim.

Kann endlich, entgegen unserer bisherigen Annahme, die Ausgangs- T nicht in eine solche Lage gebracht werden, daß sie in bezug auf Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch wird, so wird man ganz wie im itel II § 4 nur in Ausnahmefällen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbar- ft von T zu erwarten haben. Wahrscheinlich kommt dieser Fall in klichkeit nicht vor[46]).

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, hat schon Tschebyschef Verfahren der sukzessiven Approximationen als den zur Bestimmung neuen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft gewisser Ellipsoide aussichtlich führenden Weg bezeichnet. Herr Liapounoff hat als er die Existenz jener Gleichgewichtsfiguren streng bewiesen. Er ent- relt die gesuchte Funktion ζ der Gleichung (69) I nach Potenzen η und von einem weiteren Parameter α und beweist die Konvergenz gewonnenen Reihe nach einer Majorantenmethode. Da in der Integro- erentialgleichung (69) I auch die partiellen Differentialquotienten und $\frac{\partial \zeta'}{\partial \psi'}$ vorkommen, so werden, was wesentlich ist, Majorantenreihen ζ und für den Ausdruck

$$\frac{\zeta' - \zeta}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}, \qquad \cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi' - \psi)$$

eich betrachtet. Ein wesentliches Hilfsmittel bildet dabei die Ent- klung verschiedener im Laufe der Betrachtung auftretender Funktionen h den Laméschen Funktionen. Der Parameter α wird so bestimmt, eine gewisse den Bedingungsgleichungen (15) entsprechende Integral- ehung erfüllt ist. Nach Einsetzen der gewonnenen Ausdrücke für α ilt man für ζ Entwicklungen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen η allein.

Herr Liapounoff bleibt bei seinen Betrachtungen in der Haupt- ne im Gebiete der reellen Größen. *Demgegenüber ist für die Be- htungen dieses und des vorhergehenden Kapitels neben dem Auswahl- fahren die systematische Heranziehung der Hilfsmittel der Funktionen- rie wesentlich. Außer der Gültigkeit einer Reihenentwicklung von ζ h ganzen oder gebrochenen Potenzen von λ, $s_1, \ldots, s_q$ wird durch Überlegungen der beiden letzten Kapitel auch noch ein Beweis für Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximationen gewonnen.*

---

[46]) Vergleiche die Fußnote [38]).

Viertes Kapitel.

Vollständigkeit der Lösung.

§ 1.

Es sei T_1 irgendeine Gleichgewichtsfigur in der Umgebung des Körpers T, die zu einem Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit in der Nachbarschaft des Wertes ω gehört. Das Volumen von T sei mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet. Es sei zunächst nur bekannt, daß die Begrenzung S_1 von T_1 aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier, stetiger (Jordanscher) Flächen besteht und der Körper T_1 ein bestimmtes Volumen $\mathfrak{T}_1$ im Sinne von Peano und Jordan hat. In der Nachbarschaft einer Komponente von S kann eine endliche Anzahl Komponenten von S_1 liegen. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{T}_1$ in der Umgebung des Wertes $\mathfrak{T}$ liegt. Den Betrachtungen des Paragraphen 11 gemäß kann man von T_1 durch eine Ähnlichkeitsformation zu einem ebenfalls in der Umgebung von T gelegenen Körper übergehen, dessen Volumen gleich $\mathfrak{T}$ ist. Wir wollen darum in dem folgenden $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}$ voraussetzen.

Es sei M der Höchstwert der Entfernung eines Punktes auf S_1 von der Fläche S. Es sei T_{01} die Vereinigungsmenge der beiden Mengen T und T_1 und T'_{01} ihr Durchschnitt. Das Volumen der Menge $T_{01} - T'_{01}$ heiße Δ_{01}. Offenbar konvergiert Δ_{01} für $\mathsf{M} \to 0$ gegen Null. Wir beweisen, daß *wenn* M *und* $|\lambda|$ *hinreichend klein sind, wenn etwa*

$$\mathsf{M} < \varepsilon_* \leqq \varepsilon^*, \quad |\lambda| < \delta^{(3)} \leqq \delta^{(3)} \quad \text{oder} \quad \leqq \delta^{(1)} \,,$$

gilt,

1. die einzelnen Komponenten von S_1 denjenigen von S umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können,

2. die Gleichung von S_1 auf die Form

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$$

gebracht werden kann,

3. die Funktion ζ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat.

Es sei K^* irgendein Kugelkörper, der $T_1 + S_1$ ganz in seinem Innern enthält. Denkt man sich K^* mit Masse erfüllt, deren Dichte in $T_1 + S_1$ gleich 1, in $K^* - T_1$ gleich Null ist, so ist das Potential von K^* offenbar mit V_1 identisch. Die Dichte der Belegung von K^* ist beschränkt und im Riemannschen Sinne integrierbar, übrigens, außer auf S_1, stetig. Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial y}$, $\frac{\partial V_1}{\partial z}$ des Potentials von K^* vorhanden und stetig. Für alle T_1 in K^* läßt sich für $\left|\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial V_1}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial V_1}{\partial z}\right|$ eine nur von K^* abhängige obere Schranke angeben.

Es gilt ferner, wenn $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ irgendeinen von (x, y, z) verschiedenen kt bezeichnet und $\overline{V}_1$ für $V_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ gesetzt wird,

$$\left|\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial \overline{V}_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial \overline{V}_1}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial \overline{V}_1}{\partial z}\right| < g_* \overline{\overline{d}}^{\mu_*},$$

$$(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2 = \overline{\overline{d}}^2.$$

Hier ist μ_* ein positiver echter Bruch, g_* ein für alle T_1 in K^* nur μ_* abhängiger positiver Wert[47]).

Es sei (X, Y, Z) der Punkt (ξ, η) auf S und (X_1, Y_1, Z_1) ein Punkt $\eta, \zeta)$ auf S_1[48]). Wir setzen

$$\frac{\partial}{\partial x} V_1(X_1, Y_1, Z_1) - \frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} V(X_1, Y_1, Z_1) - \frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z)\right] + \frac{\partial}{\partial x} V_2(X_1, Y_1, Z_1).$$

Hier bezeichnet V_2 das Potential einer über $T_{01} - T'_{01}$ ausgebreiteten se, deren Dichte gleich $+1$ oder -1 ist. Sie ist gleich $+1$ in allen kten, die außerhalb T und zugleich in T_1 liegen, gleich -1 in den kten im Innern von T und zugleich außerhalb T_1.

Es gilt nun

$$\frac{\partial}{\partial x} V_2(X_1, Y_1, Z_1)$$

$$= -\int_{T_{01} - T'_{01}} \mu_2 \frac{\partial}{\partial x}[(X_1-\bar{x})^2 + (Y_1-\bar{y})^2 + (Z_1-\bar{z})^2]^{-\frac{1}{2}}\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z},$$

hin

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} V_2(X_1, Y_1, Z_1)\right| < \int_{T_{01} - T'_{01}} [(X_1-\bar{x})^2 + (Y_1-\bar{y})^2 + (Z_1-\bar{z})^2]^{-1} d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z}$$

$$< 4\pi \left(\frac{3\Delta_{01}}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$[49])

Das zweite Glied rechts in (4) konvergiert demnach für $M \to 0$ ichmäßig gegen Null. Das gleiche gilt, da $\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z)$ stetig ist, auch

[47]) Ein Beweis der Ungleichheiten (3) bei A. Korn, „Sur les équations de l'élasti-“, Annales de l'École Normale (3) 24 (1907), S. 9–75 (S. 27–28). Vgl. auch Dini, „Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux ivées partielles du deuxième ordre“, Acta mathematica 25 (1902), S. 185–230 192–196), woselbst für das logarithmische Potential eine etwas weiter reichende gleichheit abgeleitet wird.

[48]) Im allgemeinen werden auf (ν) mehrere (oder selbst unendlich viele) Punkte S_1 liegen. Irgendeiner dieser Punkte wird als der Punkt X_1, Y_1, Z_1 aufgefaßt.

[49]) Vgl. z. B. E. Schmidt, „Bemerkung zur Potentialtheorie“, Schwarz Fest-rift, Berlin 1914, S. 365–383 (S. 368–369).

für das erste Glied. *Demnach konvergiert* $\frac{\partial}{\partial x} V_1(X_1, Y_1, Z_1)$ *für* $\mathsf{M} \to 0$ *gleichmäßig gegen* $\frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z)$. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y} V_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\frac{\partial}{\partial z} V_1(X_1, Y_1, Z_1)$ verhalten sich ganz analog.

Es sei (x, y, z) der Punkt (ξ^*, η^*, ζ^*). Wir setzen

$$(7) \qquad \begin{cases} V(x,y,z) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(x^2+y^2) = \tilde{J}(\xi^*, \eta^*, \zeta^*), \\ V_1(x,y,z) + \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(x^2+y^2) = \tilde{J}_1(\xi^*, \eta^*, \zeta^*). \end{cases}$$

Insbesondere ist

$$(7^*) \qquad \begin{cases} V(X,Y,Z) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(X^2+Y^2) = \tilde{J}(\xi, \eta, 0), \\ V_1(X_1,Y_1,Z_1) + \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(X_1^2+Y_1^2) = \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta). \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{J}(\xi, \eta, 0) = \psi < 0\,^{50}).$$

Es sei α_0 eine hinreichend kleine positive Zahl. Aus den zuletzt durchgeführten Betrachtungen folgt, daß, sofern etwa

$$(9) \qquad |\lambda| < \delta^{(4)} \leqq \delta^{(2)} \text{ oder } \leqq \delta^{(1)}, \quad \mathsf{M} < \varepsilon_1 \leqq \varepsilon^*$$

gilt, für alle (ξ, η) auf S gleichmäßig

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) < \alpha_0 < 0$$

ist. Liegt (ξ^*, η^*, ζ^*) in einer hinreichend nahen (dreidimensionalen) Umgebung des Punktes (ξ, η, ζ), so ist aus Stetigkeitsgründen auch

$$(10^*) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{J}_1(\xi^*, \eta^*, \zeta^*) < 0.$$

Die Gleichung

$$(10^{**}) \qquad \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = \text{const.}$$

läßt sich demnach in einer Umgebung des Punktes (ξ, η, ζ) nach ζ auflösen,

$$(11) \qquad \zeta = \zeta(\xi, \eta).$$

Die Funktion $\zeta(\xi, \eta)$ *hat stetige Ableitungen erster Ordnung.* In einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes von S_1 gilt eine Darstellung dieser Art. Dem bekannten Heine-Borelschen Satze zufolge läßt sich S_1 von einer endlichen Anzahl Flächenstücke S_{1j} $(j = 1, \ldots p')$ der Art (11)

---

[50]) Vgl. Kapitel I, § 1, Formel (10).

ziegelartig überdecken. *Jede Komponente von S_1 ist also eine Fläche stetiger Normale.*

Es gilt nun

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{J}_1(\xi,\eta,\zeta)}{\frac{\partial}{\partial \zeta}\tilde{J}_1(\xi,\eta,\zeta)}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = -\frac{\frac{\partial}{\partial \eta}\tilde{J}_1(\xi,\eta,\zeta)}{\frac{\partial}{\partial \zeta}\tilde{J}_1(\xi,\eta,\zeta)}.$$

aus folgt nun wegen

$$\frac{\partial}{\partial \xi} J_1(\xi,\eta,0) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} J_1(\xi,\eta,0) = 0$$

Rücksicht auf (10) und (7), da, wie vorhin bewiesen, $\frac{\partial}{\partial x} V_1(X_1, Y_1, Z_1), \ldots$ $\mathsf{M} \to 0$ gegen $\frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z), \ldots$ gleichmäßig konvergieren, daß die lrücke

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \qquad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right|$$

alle (ξ, η) in S gleichmäßig beliebig klein gemacht werden können, n man $|\lambda|$ und M hinreichend klein wählt. Zugleich wird offenbar auch von den Normalen an S und S_1 in den Punkten $(\xi, \eta, 0)$ und (ξ, η, ζ) eschlossene Winkel für alle (ξ, η) auf S gleichmäßig beliebig klein. hinreichend kleine Werte von M und $|\lambda|$ liegt auf einer jeden Nor- (ν) nur ein Punkt von S_1. Sollte es deren mehr geben, so müßten lestens zwei Punkte der Begrenzung derselben Einzelmasse der Flüssig- angehören. Die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung (10**) te in den beiden Punkten denselben Wert haben. Dies ist indessen hinreichend kleine M und $|\lambda|$ wegen (10*) nicht möglich. *Die Rand- ponenten von S und S_1 sind mithin*, wie behauptet, *einander umkehr- eindeutig zugeordnet.* Es ist demnach $p = q$.

Für die Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Jacobischen der Maclaurinschen Ellipsoide hat die in diesem Kapitel bis jetzt esenen Sätze bereits früher Herr Liapounoff abgeleitet[51]).

Die Fläche S_1 gestattet demnach für alle etwa den Beziehungen

$$|\lambda| < \delta^{(3)} \leqq \delta^{(4)}, \quad \mathsf{M} < \varepsilon_* \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon^*$$

genden $|\lambda|$ und M die im Kapitel I, § 1 eingeführte Darstellung $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$. Die Funktion $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ hat stetige partielle Ableitungen r Ordnung in bezug auf ξ und η. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ ergieren für $|\lambda| \to 0$ und $\mathsf{M} \to 0$ gleichmäßig gegen Null. Es sei, im Kapitel II, § 2, mit $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ irgendein von (ξ, η) verschiedener

[51]) Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.[10]) Abhandlung 7.

Punkt auf S bezeichnet. Aus (12), (7*) und (3) folgen mit Rücksicht auf (10) Beziehungen von der Form

$$(15) \qquad \left|\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{\xi}}-\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{\eta}}-\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right| < g_*'\bar{d}^{\mu_*} \quad (0<\mu_*<1)$$

$$\bar{d}^2=(\bar{\xi}-\xi)^2+(\bar{\eta}-\eta)^2.$$

Diese Ungleichheiten gelten für alle (ξ, η) auf S und alle (14) genügenden Werte von $|\lambda|$ und M.

Nunmehr können wir zeigen, daß $V_1(x, y, z)$ in T_1+S_1 stetige partielle Ableitungen *zweiter* Ordnung hat. Betrachten wir z. B. die partielle Ableitung $\frac{\partial V_1}{\partial x}$. Sie läßt sich durch teilweise Integration in das Potential einer auf S_1 ausgebreiteten einfachen Belegung umwandeln [vgl. die Fußnote [24])]. Die Dichte dieser Belegung ist stetig und genügt einer zu (24) I analogen Ungleichheit. Darum sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, d. h. die Funktionen $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial z}$ in T_1+S_1 stetig[52]. Ebenso läßt sich zeigen, daß auch die übrigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von V_1 in T_1+S_1 vorhanden und stetig sind.

Es sei $\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta)=C$ (C konstant) die Gleichung eines zusammenhängenden Stückes der Fläche S_1 in der Umgebung des Punktes $(\xi, \eta, \zeta$. Da $\frac{\partial}{\partial\nu}\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta)<0$ ist, so kann man auf S ein Gebiet $\mathfrak{S}$ um den Punkt (ξ, η) umgrenzen, so daß für alle (ξ, η) in $\mathfrak{S}$ die Flächenstücke

$$\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta)=C' \qquad (C' \text{ konstant})$$

---

[52]) Vgl. O. Hölder, „Beiträge zur Potentialtheorie", Inaugural-Dissertation Stuttgart 1882, S. 1–71 (S. 20–42, vor allem S. 41–42). Hier wird von der die Belegung tragenden Fläche lediglich das vorausgesetzt, was wir von der Fläche S_1 bis jetzt wissen, nämlich daß gewisse den Ungleichheiten (15) entsprechende Beziehungen bestehen.

Es sei P_0 irgendein Punkt auf der Fläche. Herr Hölder beweist, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung des Potentials in einem Punkte P außerhalb der Fläche sich bestimmten Grenzwerten nähern, wenn P gegen P_0 längs einer beliebigen die Fläche nicht berührenden Geraden konvergiert. Durch die Betrachtungen von Herrn Hölder ist indessen, wie man sieht, darüber hinaus bewiesen, daß der Grenzübergang für alle P_0 auf einem (abgeschlossenen) Bereich der Fläche gleichmäßig ist, wenn man voraussetzt, daß die Gerade P_0P mit der Tangentialebene in P_0 einen Winkel einschließt, der für alle betrachteten P_0 größer als ein angebbarer (im übrigen beliebig kleiner) positiver Wert ist. Dies ist der präzise Sinn der Behauptung, die partiellen Ableitungen erster Ordnung des betrachteten Flächenpotentials seien auch noch auf dem Rande vorhanden und stetig. Bei der späteren Anwendung dieses Satzes wird angenommen, daß die Punktepaare P_0 und P allemal auf derselben Geraden (ν) liegen. Für hinreichend kleine M ist darum jener Winkel beliebig wenig von $\frac{\pi}{2}$ verschieden.

Innern von T_1 liegen, sofern

$$0 < C' - C < \delta^*$$

unter δ^* einen hinreichend kleinen Wert verstanden. Es sei $(n = 1, 2 \ldots)$ eine Folge dieser Bedingung genügender, gegen C konvergierender Werte von C',

$$\lim_{n=\infty} C_n' = C'.$$

Die Flächenstücke $\mathfrak{S}^{(n)}$, deren Gleichung $\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = C_n' (n = 1, 2, \ldots)$ setzt, konvergieren in $\mathfrak{S}$ gleichmäßig gegen S_1. Die Gleichung von $\mathfrak{S}^{(n)}$ ge aufgelöst heißen

$$\zeta = \zeta_n(\xi, \eta).$$

ist

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta_n)}{\frac{\partial}{\partial \zeta}\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta_n)}.$$

Hieraus sieht man vor allem, daß gleichmäßig $\lim_{n=\infty} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und enso $\lim_{n=\infty} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ gilt. Der Zähler und Nenner in (16) haben stetige tielle Ableitungen erster Ordnung, die für $n \to \infty$ gegen bestimmte enzwerte gleichmäßig konvergieren. Dies folgt, wie leicht ersichtlich, der vorhin hervorgehobenen Existenz und Stetigkeit der partiellen leitungen zweiter Ordnung von V_1 *am Rande* S_1 *des Bereiches* $T_1 + S_1$. o existiert z. B. der Grenzwert $\lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial \xi^2}$. Der Grenzübergang ist für (ξ, η) in $\mathfrak{S}$ gleichmäßig. Offenbar ist darum

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \lim_{n=\infty} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}.$$

enso wird die Existenz (und zugleich die Stetigkeit) der partiellen leitungen $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ bewiesen.

Diese etwas umständlichen Überlegungen lassen sich nicht gut umen. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}, \ldots$ verhalten sich zwar auch in n ganzen „Außengebiete" von T_1 mit Einschluß des Randes stetig, dern sich indessen bei dem Übergang durch S_1 im allgemeinen sprungise.

Die Fläche S_1 ist stetig gekrümmt. Die Funktion $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ läßt sich, wie hin auseinandergesetzt, als das Potential einer einfachen Belegung aufsen. Sie hat nach bekannten Sätzen in $T_1 + S_1$ stetige partielle Abungen erster Ordnung, die auf S_1 gewissen zu (3) analogen Ungleich-

heiten genügen[53]). Darum haben, wie sich leicht zeigen läßt, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\zeta(\xi, \eta)$ die gleiche Eigenschaft.

Man kann, auf diesem Wege schrittweise zeigen, daß in der Tat die Funktion $\zeta(\xi, \eta)$ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat. Man wird dabei $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ immer wieder als Potential einer einfachen Belegung auffassen und den folgenden Satz benutzen. Wenn die Fläche $\zeta(\xi, \eta)$, welche die Belegung trägt, kurz gesprochen, stetige Ableitungen der n ersten Ordnungen hat und die Ableitungen der höchsten Ordnung gewissen zu (15) analogen Ungleichheiten genügen, wenn ferner die Dichte der Belegung auf S_1 stetige Ableitungen der $(n-1)$ ersten Ordnungen hat und die $(n-1)$-ten Ableitungen ihrerseits Ungleichheiten erfüllen, die (15) analog sind, so hat das Potential in $T_1 + S_1$ stetige Ableitungen der n ersten Ordnungen und die n-ten Ableitungen genügen gewissen zu (3) analogen Ungleichheiten[54]).

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist nicht nur gezeigt, daß *man die Gaußschen Parameter aller Gleichgewichtsfiguren in einer gewissen Nachbarschaft des Körpers T so wählen kann, daß die kartesischen Koordinaten der Punkte auf einer jeden Randkomponente, also Funktionen jener Parameter aufgefaßt, stetige Ableitungen aller Ordnungen haben, sondern es ist noch der folgende weitergehende Satz bewiesen. Es sei eine von einer endlichen Anzahl Jordanscher Flächen begrenzte, aus einer oder mehrerer Massen bestehende Gleichgewichtsfigur vom bestimmten Volumen (im Sinne von Peano und Jordan) gegeben, und es möge die Schwerkraft auf der gesamten Oberfläche von Null verschieden und nach innen gerichtet sein. Man kann dann die Gaußschen Parameter so wählen, daß die kartesischen Koordinaten stetige Ableitungen aller Ordnungen in bezug auf diese Parameter haben.*

Herr Liapounoff hat demgegenüber für die von ihm allein betrachteten Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ellipsoide lediglich bewiesen, daß sie eine stetige Normale haben. Das in der vorliegenden Arbeit bewiesene weitergehende Resultat gestattet das Verfahren auf die neuen Figuren wieder anzuwenden und so schrittweise weiter zu kommen, bis man durch Singularitäten aufgehalten wird, die in der Natur der Sache liegen. Solche Singularitäten ergeben sich z. B., wenn die Schwerkraft in einzelnen Punkten auf der Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur verschwindet.

---

[53]) Vgl. A. Korn, loc. cit. [31]) S. 15–17.

[54]) Für $n = 2$ findet sich dieser Satz bei A. Korn, loc. cit. [31]). Vgl. S. 18 die vier letzten Zeilen des § 2. Der allgemeine Satz dürfte sich in analoger Weise beweisen lassen. Der Exponent μ_* (< 1) behält bei dem Übergang von $(n-1)$ zu n denselben Wert.

§ 2.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt zeigen, daß die in den iteln II und III bestimmten Figuren die Gesamtheit der Gleichchtsfiguren T_1 in der Nachbarschaft des Körpers T, die zu einem te ω_1 der Winkelgeschwindigkeit in der Umgebung des Wertes ω ren, erschöpfen. Wie am Anfang dieses Kapitels näher ausgeführt le, nehmen wir das Volumen $\mathfrak{T}_1$ der neuen Gleichgewichtsfiguren gleich Volumen $\mathfrak{T}$ von T an. Es sei wie vorhin M der Höchstwert der Entung der Punkte auf S_1 von der Fläche S. *Es gibt*, wie nunmehr bewiesen len soll, *ein Paar positiver Zahlen* $\varepsilon_2 \leqq \varepsilon_*$ *und* $\delta^{(5)} \leqq \delta^{(3)}$, *so daß Figur des relativen Gleichgewichts der Flüssigkeit, die so beschaffen daß* $\mathsf{M} < \varepsilon_2$ *und* $|\lambda| < \delta^{(5)}$ *gilt, unter den vorhin gefundenen Figuren alten ist.*

Wie wir in § 1 gesehen haben, läßt sich für hinreichend kleine M $|\lambda|$ die Gleichung von S_1 auf die Form $\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ bringen, r $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen aller Ordnungen ge Funktion verstanden. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ konieren für $\mathsf{M} \to 0$, $|\lambda| \to 0$ gleichmäßig gegen Null. Sind M und $|\lambda|$ lein gewählt, daß ζ, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ den Beziehungen (36) I genügen, so er-, wie wir wissen, ζ die Integro-Differentialgleichungen (68) I und II oder (14) III. Nehmen wir zunächst einmal an, die lineare gralgleichung (1) II möge $m\,(\geqq 3)$ Nullösungen haben. Unsere Betung wird dargetan sein, wenn wir den folgenden Satz beweisen. *Integro-Differentialgleichung* (14) III *hat für alle den Beziehungen*

$$|\zeta|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| < \varepsilon_2 < \varepsilon_* < \varepsilon, \quad |\lambda| < \delta^{(5)} \leqq \delta^{(3)}$$

igenden ζ, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ *und* λ *nicht mehr als eine zu den vorgegebenen eichend kleinen Werten von* $\lambda, s_1, \ldots s_q, r_3, \ldots r_m$ *gehörige Lösung.* sie für hinreichend kleine $|\lambda|, |s_1|, \ldots |s_q|, |r_3|, \ldots |r_m|$ mindestens Lösung hat, haben wir in den Kapiteln II und III gesehen.

Es sei im Gegensatz hierzu $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ eine andere der zu (17) ana- Beziehung

$$|\zeta|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| < \varepsilon_2$$

igende, zu $\lambda, s_1, \ldots s_q, r_3, \ldots r_m$ gehörige Lösung dieser Integroerentialgleichung. Es gilt demnach

$$(19)\quad \psi\zeta + \int_S N_1 \zeta' d\sigma' = s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2+b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - (a^2+b^2)\lambda\zeta^2 + \psi\sum_{l=3}^{m} r_l u_l - \Psi$$

und

$$(20)\quad \psi\underline{\zeta} + \int_S N_1 \underline{\zeta}' d\sigma' = s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2+b^2)\underline{\zeta}^2 - 2R\tau\lambda\underline{\zeta} - (a^2+b^2)\lambda\underline{\zeta}^2 + \psi\sum_{l=3}^{m} r_l u_l - \underline{\Psi}.$$

Hier bezeichnet $\underline{\Psi}$ den Ausdruck, der aus Ψ entsteht, wenn man für ζ die Funktion $\underline{\zeta}$ einführt. Aus (19) und (20) folgt,

$$(21)\quad \underline{\zeta} - \zeta = \tilde{\zeta}$$

gesetzt,

$$(22)\quad \psi\tilde{\zeta} + \int_S N_1 \tilde{\zeta}' d\sigma' = -\frac{\omega^2}{2\varkappa f}(a^2+b^2)(\zeta+\underline{\zeta})\tilde{\zeta} - 2R\tau\lambda\tilde{\zeta} - (a^2+b^2)\lambda(\zeta+\underline{\zeta})\tilde{\zeta} - (\underline{\Psi}-\Psi) = \Theta - (\underline{\Psi}-\Psi).$$

Es sei Ω der größte der drei Werte

$$(23)\quad \operatorname{Max}|\tilde{\zeta}|, \quad \operatorname{Max}\left|\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\xi}\right|, \quad \operatorname{Max}\left|\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\eta}\right|.$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wenn $\Omega > 0$ vorausgesetzt wird,

$$(24)\quad |\Theta|, \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Theta\right|, \left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Theta\right| < (\alpha_1\varepsilon_2 + \alpha_2\delta^{(5)} + \alpha_3\varepsilon_2\delta^{(5)})\,\Omega \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \text{ konstant})$$

ist. In dem § 3 des V. Kapitels wird ferner gezeigt, daß

$$(25)\quad |\underline{\Psi}-\Psi|, \left|\frac{\partial}{\partial\xi}(\underline{\Psi}-\Psi)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial\eta}(\underline{\Psi}-\Psi)\right| < \alpha_4\varepsilon_2\Omega \qquad (\alpha_4 \text{ konstant})$$

gilt. Aus (22), (24) und (25) folgt demnach den Betrachtungen des § 2 des II. Kapitels gemäß

$$(26)\quad |\tilde{\zeta}|, \left|\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\xi}\right|, \left|\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\eta}\right| < (\alpha_5\varepsilon_2 + \alpha_6\delta^{(5)} + \alpha_7\varepsilon_2\delta^{(5)})\,\Omega \qquad (\alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7 \text{ konstant}),$$

mithin

$$(27)\quad \Omega < \Omega\,(\alpha_5\varepsilon_2 + \alpha_6\delta^{(5)} + \alpha_7\varepsilon_2\delta^{(5)}).$$

Diese Beziehung führt, wenn ε_2 und $\delta^{(5)}$ hinreichend klein sind, auf einen Widerspruch. Also ist $\Omega = 0$, w. z. b. w.

Die Betrachtungen verlaufen ganz analog, wenn die Integralgleichung (1) II nur die trivialen Nullösungen u_1 und u_2 (oder auch nur die Nullösung u_1) hat. Die Lösungen ζ und $\underline{\zeta}$ gehören diesmal zu vorgeschriebenen Werten von $\lambda, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_q$. In den Gleichungen (19) und (20) tritt für N_1 der Ausdruck N ein, das Glied $\psi\sum_{l=3}^{m} r_l u_l$ fehlt ganz.

Fünftes Kapitel.

Hilfssätze.

§ 1.

Wir kommen jetzt auf die Betrachtungen des Kapitels I § 3 zurück. Beziehung

$$\frac{\partial^3 U_t}{\partial\xi\partial t^2} = \int_S \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi' d\eta' - \int_S \sum \frac{\partial}{\partial\xi}(a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi' d\eta'$$

l. (48) I] läßt sich wie folgt rasch beweisen.

Es sei h_0 eine hinreichend kleine positive Zahl. Es seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_h$ eisgebiete um die Punkte (ξ, η) und $(\xi + h, \eta) = (\xi_h, \eta_h)$ $(h \leqq h_0)$ vom ten Radius $\mathfrak{R}$. Es gilt in naheliegender Bezeichnungsweise

$$\frac{\partial^3 U_t}{\partial\xi\partial t^2} = \int_{S-\mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial\xi}\sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi' d\eta' + \frac{\partial L}{\partial\xi},$$

$$L(\xi, \eta) = \int_{\mathfrak{R}} \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi' d\eta'.$$

Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$\left\{\begin{array}{lll} (\xi' + h, \eta') = (\xi_h', \eta_h'), & a(\xi_h', \eta_h') = a_h', & \zeta(\xi_h', \eta_h') = \zeta_h', \\ a(\xi_h, \eta_h) = a_h, \ldots & A_t(\xi_h', \eta_h') = A_{th}', \ldots & \\ \varrho_t(\xi_h, \eta_h; \xi', \eta') = \varrho_t^*, & \varrho_t(\xi_h, \eta_h; \xi_h', \eta_h') = \varrho_{th}. & \end{array}\right.$$

Es gilt

$$L(\xi + h, \eta) - L(\xi, \eta) = \int_{\mathfrak{R}_h} \sum (a'\zeta' - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t^*}\right)d\xi' d\eta'$$

$$- \int_{\mathfrak{R}} \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi' d\eta' - \int_{\mathfrak{R}_h - \mathfrak{R}} \sum (a'\zeta' - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t^*}\right)d\xi' d\eta'$$

er in einer anderen Schreibweise

$$L(\xi + h, \eta) - L(\xi, \eta)$$

$$= \left\{\int_{\mathfrak{R}} \sum (a_h'\zeta_h' - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_{th}'}{\varrho_{th}}\right)d\xi' d\eta' - \int_{\mathfrak{R}} \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi' d\eta'\right\}$$

$$- \int_{\mathfrak{R}_h - \mathfrak{R}} \sum (a'\zeta' - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t^*}\right)d\xi' d\eta' = \{J_h - J_0\} - J'.$$

an überzeugt sich leicht, daß

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}(J_h - J_0)$$

existiert und gleich

$$(8)\quad \left|\frac{dJ_h}{dh}\right|_{h=0} = \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'}\sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right)\right] d\xi$$

ist. Es sei etwa $\underline{\mathfrak{K}}$ ein Kreis vom Halbmesser $\underline{\mathfrak{R}} < \mathfrak{R}$ um (ξ, η). Offenbar ist

$$(9)\quad \frac{d}{dh}\int_{\mathfrak{K}-\underline{\mathfrak{K}}} \sum (a'_h\zeta'_h - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}}\right) d\xi' d\eta'$$

$$= \int_{\mathfrak{K}-\underline{\mathfrak{K}}} \frac{d}{dh}\sum (a'_h\zeta'_h - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}}\right) d\xi' d\eta'.$$

Das Integral rechter Hand konvergiert für alle $|h| \leqq h_1 < h_0$ für $\underline{\mathfrak{R}} \to 0$ *gleichmäßig* gegen das Integral

$$(10)\quad \int_{\mathfrak{K}} \frac{d}{dh}\sum (a'_h\zeta'_h - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}}\right) d\xi' d\eta' = \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'}\sum (a'_h\zeta'_h - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \xi}\sum (a'_h\zeta'_h - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}}\right)\right] d\xi' d\eta'.$$

Die zu integrierende Funktion ist nämlich beschränkt und, höchstens außer für $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, stetig. Demnach ist in der Tat

$$(11)\quad \left[\frac{dJ_h}{dh}\right]_{h=0} = \frac{d}{dh}\left[\int_{\mathfrak{K}} \sum (a'_h\zeta'_h - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}}\right) d\xi' d\eta'\right]_{h=0}$$

$$= \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{d}{dh}\sum (a'_h\zeta'_h - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}}\right) d\xi' d\eta'\right]_{h=0}$$

$$= \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'}\sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'}{\varrho_t}\right)\right] d\xi' d\eta'$$

$$+ \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right)\right] d\xi' d\eta'.$$

Man sieht ferner leicht ein, daß

$$(12)\quad \lim_{h=0}\frac{1}{h}J' = \lim_{h=0}\frac{1}{h}\int_{\mathfrak{K}_h-\mathfrak{K}} \sum (a'\zeta' - a_h\zeta_h)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t^*}\right) d\xi' d\eta'$$

$$= \lim_{h=0}\frac{1}{h}\int_{\mathfrak{K}_h-\mathfrak{K}} \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta' = \int_{\mathfrak{C}} \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right) d\eta',$$

unter $\mathfrak{C}$ den Rand des Kreisgebietes $\mathfrak{K}$ verstanden. Nun ist, wie man ohne weiteres sieht,

$$(13)\quad \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial \xi'}\sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta' = \int_{\mathfrak{C}} (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right) d\eta'.$$

Faßt man die Formeln (2), (6), (8), (12) und (13) zusammen, so
et man in der Tat die zu beweisende Beziehung (1).

§ 2.

Wir wollen jetzt zeigen, daß auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ existieren und stetig sind. Der Beweis ist dem in
n vorhergehenden Paragraphen durchgeführten ganz analog. Wir be-
ränken uns auf die Untersuchung der partiellen Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$.

Wir zerlegen wie vorhin den Ausdruck für $\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ in ein Integral
treckt über $S - \mathfrak{K}$ und eins erstreckt über $\mathfrak{K}$. Es genügt, den zuletzt
annten Ausdruck

$$) \quad -\int_{\mathfrak{K}} \sum \frac{\partial}{\partial \xi}(a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta' + \int_{\mathfrak{K}} \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'$$

ier zu betrachten. Wir begnügen uns mit einer eingehenden Untersuchung
Integrals

$$) \quad M = \int_{\mathfrak{K}} (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'.$$

e fünf anderen in (14) vorkommenden Integrale lassen sich in einer
ız ähnlichen Weise erledigen.

Es ist

$$) \quad M(\xi + h, \eta) - M(\xi, \eta)$$

$$= \int_{\mathfrak{K}} \left\{ (a_h'\zeta_h' - a_h\zeta_h)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_{th}'}{\varrho_{th}}\right) - (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)\right\} d\xi' d\eta'$$

$$- \int_{\mathfrak{K}_h - \mathfrak{K}} (a'\zeta' - a_h\zeta_h)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t^*}\right) d\xi' d\eta' = (\Lambda_h - \Lambda_0) - \Lambda'.$$

n überzeugt sich ohne wesentliche Schwierigkeiten, daß

$$) \quad \lim_{h=0} \frac{1}{h}(\Lambda_h - \Lambda_0)$$

stiert und gleich

$$) \int_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi'}\left[(a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)\right]\right\} d\xi' d\eta'$$

Der Beweis läuft wie in § 1 auf den Nachweis hinaus, daß das Integral

$$) \int_{\mathfrak{K}_h - \mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi'}\left[(a_h'\zeta_h' - a_h\zeta_h)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_{th}'}{\varrho_{th}}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(a_h'\zeta_h' - a_h\zeta_h)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t}\left(\frac{A_{th}'}{\varrho_{th}}\right)\right]\right\} d\xi' d\eta'$$

$$= \int_{\mathfrak{K}_h - \mathfrak{K}} \Pi_h d\xi' d\eta'$$

für alle $|h| \leqq h_1 < h_0$ für $\mathfrak{R} \to 0$ gegen $\int_{\mathfrak{x}} \Pi_h d\xi' d\eta'$ gleichmäßig konvergiert. Die zu integrierende Funktion ist, außer für $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, stetig. In der Nachbarschaft dieser Stelle ist der Ausdruck $|\varrho \Pi_h|$ beschränkt.

Andererseits ist

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \Lambda' = \int_{\mathfrak{C}} (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A_t'}{\varrho_t} \right) d\eta'. \tag{20}$$

Demnach ist $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ vorhanden und, wie leicht zu sehen ist, stetig. Man überzeugt sich jetzt ohne Schwierigkeit an Hand der expliziten Ausdrücke, daß in der Tat

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right| < \gamma' \varepsilon^2 \tag{21}$$

ist.

§ 3.

Wir knüpfen an die Betrachtungen und die Bezeichnungen des § 2 des IV. Kapitels an und werden jetzt beweisen, daß

$$|\underline{\Psi} - \Psi|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\Psi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{\Psi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \Psi \right| < \alpha_4 \varepsilon_2 \Omega \tag{22}$$

ist. Es gilt [man vgl. die Formeln (58) I und (59) I]

$$\Psi = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2} dt_*. \tag{23}$$

Es genügt demnach zu zeigen, daß

$$\left| \frac{\partial^2 \underline{U}_t}{\partial \underline{t}^2} - \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \underline{U}_t}{\partial \underline{t}^2} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \underline{U}_t}{\partial \underline{t}^2} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right| < \alpha_4 \varepsilon_2 \Omega \tag{24}$$

ist, unter $\frac{\partial^2 \underline{U}_t}{\partial \underline{t}^2}$ den Ausdruck verstanden, der entsteht, wenn man in $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ die Funktion $\underline{\zeta}$ für ζ einführt.

Es ist nun

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} = \displaystyle\int_S \sum M^{(1)} N^{(1)} d\xi' d\eta', \\ M^{(1)} = a'\zeta' - a\zeta, \quad N^{(1)} = P + Q, \quad P = \dfrac{1}{\varrho_t} \dfrac{\partial A_t'}{\partial t}, \quad Q = -\dfrac{1}{\varrho_t^3} \varrho_t \dfrac{\partial \varrho_t}{\partial t} A_t', \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{U}_t}{\partial \underline{t}^2} - \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} &= \int_S \sum (\underline{M}^{(1)} \underline{N}^{(1)} - M^{(1)} N^{(1)}) d\xi' d\eta' \\ &= \int_S \left[\sum (\underline{M}^{(1)} - M^{(1)}) \underline{N}^{(1)} + M^{(1)} (\underline{N}^{(1)} - N^{(1)}) \right] d\xi' d\eta' \\ &= \int_S \sum \frac{1}{\varrho_t} (a'\tilde{\zeta}' - a\tilde{\zeta}) \varrho_t \underline{N}^{(1)} d\xi' d\eta' + \int_S \sum \frac{1}{\varrho} (a'\zeta' - a\zeta) \varrho (\underline{P} - P) d\xi' d\eta' \\ &+ \int_S \sum (a'\zeta' - a\zeta) (\underline{Q} - Q) d\xi' d\eta' = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Es gilt nun (vgl. die Betrachtungen im § 3 des I. Kapitels)

)
$$\frac{1}{\varrho_t}(a'\tilde{\zeta}' - a\tilde{\zeta}) = \frac{\varrho}{\varrho_t}\frac{1}{\varrho}(a'\tilde{\zeta}' - a\tilde{\zeta})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}[a(\dot{o})\tilde{\zeta}(\dot{o})]\frac{\xi'-\xi}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial\eta}[a(\dot{o})\tilde{\zeta}(\sigma)]\frac{\eta'-\eta}{\varrho}\right],$$

er $\dot{o}$ den Punkt $[\xi+\vartheta(\xi'-\xi),\ \eta+\vartheta(\eta'-\eta)]$ $(0<\vartheta<1)$ ver-nden.

Nach (31) I, (53) I folgt hieraus

)
$$\left|\frac{1}{\varrho_t}(a'\tilde{\zeta}' - a\tilde{\zeta})\right| < \alpha_8\Omega,$$

ter α_8, wie später unter α_9, α_{10}, ..., positive Konstante verstanden.

Andererseits ist, wie man fast unmittelbar sieht, $\varepsilon_2 < 1$ vorausgesetzt,

)
$$|\varrho_t N^{(1)}| < \alpha_9\varepsilon_2 + \alpha_{10}\varepsilon_2^2 < \alpha_{11}\varepsilon_2,$$

thin gewiß

)
$$|K^{(1)}| < \alpha_{12}\varepsilon_2\Omega.$$

Wir schreiben ferner

1)
$$\underline{P} - P = \frac{1}{\underline{\varrho_t}}\frac{\partial A_i'}{\partial \underline{t}} - \frac{1}{\varrho_t}\frac{\partial A_i'}{\partial t} = \frac{1}{\underline{\varrho_t}}\left(\frac{\partial A_i'}{\partial \underline{t}} - \frac{\partial A_i'}{\partial t}\right) - \frac{1}{\underline{\varrho_t}}\frac{\partial A_i'}{\partial t}\frac{\underline{\varrho_t^2} - \varrho_t^2}{\varrho_t(\varrho_t+\underline{\varrho_t})}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist

2)
$$\left|\frac{\partial A_i'}{\partial \underline{t}} - \frac{\partial A_i'}{\partial t}\right| < (\alpha_{13}+\alpha_{14}\varepsilon_2)\Omega < \alpha_{15}\Omega,$$

3)
$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial A_i'}{\partial t}\right| < \alpha_{16}\varepsilon_2 + \alpha_{17}\varepsilon_2^2 < \alpha_{18}\varepsilon_2, \\ \dfrac{\underline{\varrho_t^2}-\varrho_t^2}{\varrho_t(\varrho_t+\underline{\varrho_t})} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k(t)}+\sqrt{1+\underline{k}(t)}}\dfrac{1}{\varrho^2}\Big\{2t\sum(X'-X)(a'\tilde{\zeta}'-a\tilde{\zeta}) \\ \qquad + 2t^2\sum[a'(\zeta'+\zeta') - a(\zeta+\underline{\zeta})](a'\tilde{\zeta}'-a\tilde{\zeta})\Big\}, \end{cases}$$

4)
$$\left|\frac{\underline{\varrho_t^2}-\varrho_t^2}{\varrho_t(\varrho_t+\underline{\varrho_t})}\right| < (\alpha_{19}+\alpha_{20}\varepsilon_2)\Omega < \alpha_{21}\Omega.$$

Aus (31) bis (34) und den analogen Beziehungen für die anderen ieder in $K^{(2)}$ folgt

5)
$$|K^{(2)}| < \alpha_{22}\varepsilon\Omega.$$

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch

6)
$$|K^{(3)}| < \alpha_{23}\varepsilon\Omega$$

. Aus (30), (35) und (36) ergibt sich die behauptete Ungleichheit

r $\dfrac{\partial^2 U_i}{\partial \underline{t}^2} - \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}$.

Der Beweis der beiden übrigen Ungleichheiten (22) verläuft ganz ähnlich. Man wird hier von der Beziehung

$$(37)\quad \frac{\partial^3 U_t}{\partial\xi\,\partial t^2} = \int_S \sum (a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta' - \int_S \sum \frac{\partial}{\partial\xi}(a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'$$

und der analogen Formel für $\frac{\partial^3 U_t}{\partial\eta\,\partial t^2}$ ausgehen und wie im Kapitel I § 3 das Integrationsgebiet in die beiden Gebiete $\int_{S-\bar{S}}$ und $\int_{\bar{S}}$ zerlegen. In dem über $\bar{S}$ erstreckten Integral wird man wie an der bezeichneten Stelle Polarkoordinaten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{t}$ einführen.

Berlin, den 18. Januar 1918.

(Eingegangen am 18. Januar 1918.)

Über trigonometrische Polynome mit einer Minimumseigenschaft.

Von

Otto Blumenthal in Aachen.

Im Band 77 der Mathematischen Annalen habe ich folgenden Satz esen:

Unter allen trigonometrischen Polynomen n^{ten} Grades

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x - \delta_2) + \ldots + a_n \cos(nx - \delta_n)$$

nur reellen Nullstellen gibt es bei konstant gehaltener Quadratsumme Amplituden,

$$a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1,$$

einziges, für welches die n^{te} Amplitude möglichst klein ist, und zwar es, bis auf einen konstanten Faktor, das Polynom

$$(1 - \cos x)^n,$$

en $2n$ Nullstellen in einen Punkt zusammenfallen[1]).

Das Charakteristische dieses Ergebnisses liegt ersichtlich darin, daß *Grenzeigenschaft* (Minimumseigenschaft) *der Koeffizienten des Polynoms eine Grenzlage der Wurzeln nach sich zieht.*

Es war mir im Felde eine Zerstreuung nachzuforschen, ob dieser Beung allgemeinere Gültigkeit zukomme. Ich untersuche zu diesem ck in dieser Arbeit trigonometrische Polynome mit *beliebiger* Mindest- reeller Nullstellen und einer zugehörigen Minimumsbedingung für die ffizienten und finde eine genaue Verallgemeinerung des angegebenen es. Die Methoden aber sind völlig anders und erheblich schwieriger n meinem früheren einfachen Falle. Den genauen Ausspruch meines bnisses gebe ich im § 1.

[1]) Die $2n$-fache Nullstelle ist der Nullpunkt. Dies kommt dadurch heraus, daß en Polynomen die erste Phase δ_1 willkürlich zu Null angenommen wurde. Ohne Willkür ist die Lage der Nullstelle natürlich beliebig.

§ 1.

Formulierung der Aufgabe.

Als Periodenintervall J wählen wir die reelle Gesamtheit $-\pi \leqq x < \pi$. Es sei

$$(1) \quad M(x) = \mu_0 + (\mu_1 \cos x + \nu_1 \sin x) + (\mu_2 \cos 2x + \nu_2 \sin 2x) + \ldots + (\mu_n \cos nx + \nu_n \sin nx$$

ein trigonometrisches Polynom n^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten, das in J mindestens $2m\,(\leqq 2n)$ Nullstellen besitzt. Im Bereich dieser Polynome, d. h. ihrer Koeffizienten μ, ν, hat augenscheinlich der Ausdruck

$$(2) \qquad S = \frac{(\mu_m^2 + \nu_m^2) + (\mu_{m+1}^2 + \nu_{m+1}^2) + \ldots + (\mu_n^2 + \nu_n^2)}{\mu_0^2 + (\mu_1^2 + \nu_1^2) + \ldots + (\mu_n^2 + \nu_n^2)}$$

oder auch der Ausdruck

$$(2') \qquad s = \frac{S}{1-S} = \frac{(\mu_m^2 + \nu_m^2) + (\mu_{m+1}^2 + \nu_{m+1}^2) + \ldots + (\mu_n^2 + \nu_n^2)}{\mu_0^2 + (\mu_1^2 + \nu_1^2) + \ldots + (\mu_{m-1}^2 + \nu_{m-1}^2)}$$

ein von Null verschiedenes Minimum. Ein vollständiger Beweis dieser einfachen Tatsache kann folgendermaßen gegeben werden. Es seien

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$$

$2m$ Stellen des Periodenintervalles J. Dann läßt sich jedes Polynom $M(x)$ der gewünschten Nullstellen-Eigenschaft in die Form setzen:

$$M(x) = C \sin\frac{x-\alpha_1}{2} \sin\frac{x-\alpha_2}{2} \ldots \sin\frac{x-\alpha_{2m}}{2}\, T_{n-m}(x),$$

worin

$$T_{n-m}(x) = \delta_0 + (\delta_1 \cos x + \varepsilon_1 \sin x) + \ldots + (\delta_{n-m} \cos(n-m)x + \varepsilon_{n-m} \sin(n-m)x)$$

ein trigonometrisches Polynom mit konstanter Quadratsumme der Amplituden ist:

$$\delta_0^2 + (\delta_1^2 + \varepsilon_1^2) + \ldots + (\delta_{n-m}^2 + \varepsilon_{n-m}^2) = 1.$$

Die Quotienten S und s nehmen in dem abgeschlossenen stetigen Bereich der Größen α, δ, ε ein Minimum an. Dieses Minimum muß aber > 0 sein. Denn S verschwindet nur für ein Polynom geringeren als m^{ten} Grades, das weniger als $2m$ Nullstellen hat.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann von dem Polynom $M(x)$ vorausgesetzt werden, daß eine seiner Nullstellen bei $x = 0$ liegt.

Der Satz, den ich beweisen werde, lautet so:

Das, bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmte, Polynom $M(x)$, das S zum Minimum macht, hat am Nullpunkt eine genau $2m$-fache

stelle, sonst keine Nullstellen in J. Es berechnet sich durch Lösung algebraischen Gleichung höchstens m^{ten} Grades.

Zweckmäßig werden einige abkürzende Bezeichnungen eingeführt. Ich ibe $S(M)$ und $s(M)$, um S und s als Funktionen der Koeffizienten $M(x)$ zu kennzeichnen. Ist

$$K(x) = \varkappa_0 + (\varkappa_1 \cos x + \lambda_1 \sin x) + \ldots + (\varkappa_n \cos nx + \lambda_n \sin nx)$$

nderes trigonometrisches Polynom höchstens n^{ten} Grades, so wird bei belem reellem ϱ die Verbindung

$$(M, K) = M(x) + \varrho K(x)$$

Kombination von M mit K bezeichnet. In der Regel wird dabei ϱ genügend kleine Werte beschränkt.

Wir führen außerdem folgende Größen ein[2]):

$$\begin{cases} -\dfrac{\mu_k}{\mu_0^2+\mu_1^2+\nu_1^2+\ldots+\mu_{m-1}^2+\nu_{m-1}^2} = \mathsf{M}_k, \\ -\dfrac{\nu_k}{\mu_0^2+\mu_1^2+\nu_1^2+\ldots+\mu_{m-1}^2+\nu_{m-1}^2} = \mathsf{N}_k \qquad (k=0,1,\ldots,m-1), \\ \dfrac{\mu_{k'}}{\mu_m^2+\nu_m^2+\ldots+\mu_n^2+\nu_n^2} = \mathsf{M}_{k'}, \\ \dfrac{\nu_{k'}}{\mu_m^2+\nu_m^2+\ldots+\mu_n^2+\nu_n^2} = \mathsf{N}_{k'} \qquad (k'=m,\ldots,n). \end{cases}$$

bestehen dann auch die umgekehrten Beziehungen:

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathsf{M}_k}{\mathsf{M}_0^2+\mathsf{M}_1^2+\mathsf{N}_1^2+\ldots+\mathsf{M}_{m-1}^2+\mathsf{N}_{m-1}^2} = \mu_k, \\ -\dfrac{\mathsf{N}_k}{\mathsf{M}_0^2+\mathsf{M}_1^2+\mathsf{N}_1^2+\ldots+\mathsf{M}_{m-1}^2+\mathsf{N}_{m-1}^2} = \nu_k \quad (k=0,1,\ldots,m-1), \\ \dfrac{\mathsf{M}_{k'}}{\mathsf{M}_m^2+\mathsf{N}_m^2+\ldots+\mathsf{M}_n^2+\mathsf{N}_n^2} = \mu_{k'}, \\ \dfrac{\mathsf{N}_{k'}}{\mathsf{M}_m^2+\mathsf{N}_m^2+\ldots+\mathsf{M}_n^2+\mathsf{N}_n^2} = \nu_{k'} \qquad (k'=m,\ldots,n). \end{cases}$$

nders ist

$$\begin{cases} S = \dfrac{\mathsf{M}_0^2+\mathsf{M}_1^2+\mathsf{N}_1^2+\ldots+\mathsf{M}_{m-1}^2+\mathsf{N}_{m-1}^2}{\mathsf{M}_0^2+\mathsf{M}_1^2+\mathsf{N}_1^2+\ldots+\mathsf{M}_n^2+\mathsf{N}_n^2}, \\ s = \dfrac{\mathsf{M}_0^2+\mathsf{M}_1^2+\mathsf{N}_1^2+\ldots+\mathsf{M}_{m-1}^2+\mathsf{N}_{m-1}^2}{\mathsf{M}_m^2+\mathsf{N}_m^2+\ldots+\mathsf{M}_n^2+\mathsf{N}_n^2}. \end{cases}$$

Mit Benutzung dieser Größen M, N läßt sich $S(M+\varrho K)$ übersicht- schreiben:

[2]) Die Nenner sind sicher von Null verschieden. Denn das Verschwinden sämt- $\mu_0, \ldots, \nu_{m-1}$ ergibt $S=1$, also Maximum statt Minimum.

$$(4) \qquad S(M+\varrho K)-S(M)=L\,[2\,\varrho\,\Delta(M,K)+\varrho^2 D(M,K)],$$

wo L positiv ist und Δ und D die folgenden Ausdrücke bedeuten:

$$(4') \quad \Delta(M,K)=\varkappa_0 \mathsf{M}_0+\varkappa_1 \mathsf{M}_1+\lambda_1 \mathsf{N}_1+\ldots+\varkappa_n \mathsf{M}_n+\lambda_n \mathsf{N}_n,$$

$$D(M,K)=$$

$$(4'') \quad (\varkappa_m^2+\lambda_m^2+\ldots+\varkappa_n^2+\lambda_n^2)(\mathsf{M}_m^2+\mathsf{N}_m^2+\ldots+\mathsf{M}_n^2+\mathsf{N}_n^2)$$

$$-(\varkappa_0^2+\varkappa_1^2+\lambda_1^2+\ldots+\varkappa_{m-1}^2+\lambda_{m-1}^2)(\mathsf{M}_0^2+\mathsf{M}_1^2+\mathsf{N}_1^2+\ldots+\mathsf{M}_{m-1}^2+\mathsf{N}_{m-1}^2)$$

Ein Ausdruck gleicher Gestalt ergibt sich für s, nur tritt an Stelle von Δ eine etwas einfacher aussehende, ebenfalls positive Größe l.

Aus (4) folgt der Satz:

Ist $M(x)$ Minimumpolynom und ist $K(x)$ so gewählt, daß die Kombinationen $M+\varrho K$ für alle genügend kleinen ϱ mindestens $2m$ Nullstellen in J haben, so ist notwendig

$$(5) \qquad \Delta(M,K)=0, \qquad D(M,K)\geqq 0.$$

§ 2.

Bestimmung des Minimumpolynoms.

a. Das Minimumpolynom $M(x)$ werde kombiniert mit seiner zweiten Ableitung $M''(x)$. Dann ist

$$\Delta(M,M'')=-[\mu_1 \mathsf{M}_1+\nu_1 \mathsf{N}_1+2^2\mu_2 \mathsf{M}_2+2^2\nu_2 \mathsf{N}_2+\ldots+n^2\mu_n \mathsf{M}_n+n^2\nu_n \mathsf{N}_n]$$

$$=\frac{\mu_1^2+\nu_1^2+2^2(\mu_2^2+\nu_2^2)+\ldots+(m-1)^2(\mu_{m-1}^2+\nu_{m-1}^2)}{\mu_0^2+\mu_1^2+\nu_1^2+\ldots+\mu_{m-1}^2+\nu_{m-1}^2}$$

$$-\frac{m^2(\mu_m^2+\nu_m^2)+\ldots+n^2(\mu_n^2+\nu_n^2)}{(\mu_m^2+\nu_m^2)+\ldots+(\mu_n^2+\nu_n^2)}.$$

Indem man auf gemeinsamen Nenner bringt, sieht man sofort, daß $\Delta(M,M'')$ von Null verschieden ist, und zwar

$$(6) \qquad \Delta(M,M'')<0.$$

Diese Tatsache liefert eine obere Grenze für die Anzahl der Nullstellen des Minimumpolynoms. Aus dem Schlußsatz von § 1 folgt nämlich, daß $M+\varrho M''$ weniger als $2m$, also höchstens $2m-2$ Nullstellen in J hat. Sei N die Anzahl der Nullstellen von $M(x)$ in J, q die Anzahl der mehrfachen Nullstellen. Da J abgeschlossen ist, gehen bei der Kombination für genügend kleines ϱ keine einfachen Nullstellen verloren. An den mehrfachen Nullstellen ist die Multiplizität von M'', also auch von $M+\varrho M''$, um 2 geringer als die von M. Es gehen also bei der Kombination $2q$ Nullstellen verloren. Daher

$$(7) \qquad N-2q\leqq 2m-2, \qquad N\leqq 2m-2+2q.$$

b. Ich benutze einen einfachen Hilfssatz, dessen Beweis übergangen den kann: *Verschwindet am Punkte $x = x_0$ die Funktion $M(x)$ mit Multiplizität r, die Funktion $K(x)$ mit der um eine ungerade Zahl neren Multiplizität $r - (2k + 1)$, so hat bei genügend kleinem ϱ die nbination $M + \varrho K$ in einer Umgebung von x_0 sicher $r - 2k$ Null-en*[3]).

Es werde bewiesen, daß $M(x)$ *nur an einem einzigen Punkte in J chwindet.*

Angenommen nämlich, es gäbe $p > 1$ Punkte in J, auf die sich die $\geqq 2m$) Nullstellen verteilen. Dann kann ich an $2p' \geqq 2$ Punkten je *ungerade* (von Punkt zu Punkt verschiedene), und an anderen p'' Punk- je eine gerade Zahl von Nullstellen so wegnehmen, daß genau $2m - 2$ lstellen übrigbleiben. Es sei dann $K(x)$ das (bis auf einen Zahlen- or eindeutig festgelegte) trigonometrische Polynom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, diese $2m - 2$ Nullstellen besitzt. Die Kombination $M + \varrho K$ hat genügend kleinem ϱ nach dem Hilfssatz $2m - 2 + 2p' \geqq 2m$ Null- len. Dies ist aber unvereinbar mit den Beziehungen (5). Denn $M, K)$ ist für jedes Polynom $K(x)$ geringeren als m^{ten} Grades negativ von Null verschieden, weil die Größen $\mathsf{M}_0, \ldots, \mathsf{N}_{m-1}$ nicht sämt- verschwinden können.

Also ist die Annahme $p > 1$ widerlegt. Aus (7) folgt weiter

$$N = 2m.$$

besteht also das Resultat:

Das Minimumpolynom hat in J eine einzige $2m$-fache Nullstelle. liegt nach früherer Verabredung am Punkte $x = 0$.

c. Die Minimumpolynome lassen sich explizit aufstellen. Zunächst ennt man einfach, daß sie nur cos-Glieder enthalten. Ist nämlich

$$M(x) = \gamma(x) + \sigma(x),$$

γ nur cos-Glieder, σ nur sin-Glieder enthält, so müssen $\gamma(x)$ und) für $x = 0$ einzeln $2m$-fach verschwinden, und $\sigma(x)$ verschwindet n von selbst sogar $(2m + 1)$-fach. $\sigma(x)$ ist also kein Minimum- nom. Ist

$$S(\gamma) = \frac{\alpha}{a}, \qquad S(\sigma) = \frac{\beta}{b},$$

iegt

$$S(\gamma + \sigma) = \frac{\alpha + \beta}{a + b}$$

chen $S(\gamma)$ und $S(\sigma)$ und ist nur dann einer dieser Größen gleich,

[3]) Für den Fall $r = 1$ wurde der Hilfssatz schon unter a. benutzt. Er gilt auch den Endpunkt $-\pi$ des Intervalls J, weil J gegenüber trigonometrischen Poly- en als Periodenintervall abgeschlossen ist.

wenn beide zusammenfallen. Es ist also sicher nicht Minimum, weil $S(\sigma)$ ja nicht Minimum ist.

Zur Bestimmung der Koeffizienten des Minimumpolynoms kombinieren wir $M(x)$ mit einer Folge von Polynomen $K_i(x)$, die am Punkte $x=0$ eine $2m$-fache Nullstelle haben. Es bestehen dann die Gleichungen

$$\Delta(M, K_i) = 0, \tag{5'}$$

die zur Berechnung der Koeffizienten führen. Die Polynome K_i sind von der Form

$$K_i(x) = \varkappa_0^{(i)} + \varkappa_1^{(i)} \cos x + \ldots + \varkappa_{m-1}^{(i)} \cos(m-1)x + \cos ix \quad (i \geqq m)$$

Die $\varkappa_l^{(i)}$ berechnen sich einfach aus den m Gleichungen

$$(8)\quad (-1)^h K_i^{(2h)}(0) = 0^{2h}\varkappa_0^{(i)} + 1^{2h}\varkappa_1^{(i)} + \ldots + (m-1)^{2h}\varkappa_{m-1}^{(i)} + i^{2h} = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Die Auflösung führt auf Vandermondesche Determinanten und es ergibt sich, wenn k_a alle Zahlen $< l$, k_e alle Zahlen $> l$ (und $< m$) durchläuft:

$$(9')\quad \begin{cases} \varkappa_0^{(i)} = (-1)^m \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{m-1}(i^2-k^2)}{i^2} \dfrac{1}{\prod\limits_{k}^{m-1} k^2} = (-1)^m \dfrac{1}{i} \dfrac{(i+m-1)!}{(i-m)!} \dfrac{1}{[(m-1)!]^2}, \\ \varkappa_l^{(i)} = (-1)^{m-l} \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{m-1}(i^2-k^2)}{i^2-l} \dfrac{1}{\prod(k_e^2-l^2)\prod(l^2-k_a^2)} \\ \qquad = (-1)^{m-l} \dfrac{2i}{(i^2-l^2)} \dfrac{(i+m-1)!}{(i-m)!} \dfrac{1}{(m+l-1)!\,(m-l-1)!} \\ \qquad\qquad (l = 1, 2, \ldots, m-1). \end{cases}$$

Für $i = m$ kommt

$$\varkappa_0^{(m)} = (-1)^m \frac{1}{2}\binom{2m}{m}, \qquad \varkappa_l^{(m)} = (-1)^{m-l}\binom{2m}{m-l}.$$

Dies ist ein bekanntes Resultat, denn

$$(-1)^m\left[\frac{1}{2}\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1}\cos x + \binom{2m}{m-2}\cos 2x + \ldots + (-1)^m \cos mx\right] = 2^{m-1}(\cos x - 1)^m$$

ist das Polynom m^{ten} Grades, das am Nullpunkt mit der Multiplizität $2m$ verschwindet.

Die Ausdrücke (9') sind von uns nur für $i \geqq m$ in Betracht gezogen worden. Ihre Werte für $i \leqq m-1$ lassen sich leicht angeben und sind für das folgende nützlich:

$$\varkappa_i^{(l)} = 0 \quad (i \neq l,\ i \leqq m-1), \qquad \varkappa_l^{(l)} = -1.$$

liest sie unmittelbar aus den Gleichungen (8) ab, in denen $i = l$ tzt wird.

Aus (5′) und (9′) folgen für die Koeffizienten des Minimumpolynoms Rekursionen:

$$\mathsf{M}_i + \varkappa_{m-1}^{(i)}\mathsf{M}_{m-1} + \ldots + \varkappa_1^{(i)}\mathsf{M}_1 + \varkappa_0^{(i)}\mathsf{M}_0 = 0, \qquad \nu_i = \mathsf{N}_i = 0.$$

sind also sämtliche M_i *durch die m ersten linear dargestellt. Gemäß gelten die Gleichungen* (9) *aber auch für die Anfangswerte* $0, \ldots, m-1$.

Eine formale Vereinfachung der Rekursionen (9) empfiehlt sich. $\varkappa_l^{(i)}$ der Formeln (9′) sind Polynome $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von i^2, sie en sich also durch die Potenzen

$$i^{2h} = a_i^{(h)}$$

ar darstellen. Wir schreiben:

$$-\varkappa_l^{(i)} = A_0^{(l)} a_i^{(0)} + A_1^{(l)} a_i^{(1)} + \ldots + A_{m-1}^{(l)} a_i^{(m-1)}.$$

se Werte werden in (9) eingesetzt und gleichzeitig an Stelle der $\ldots, \mathsf{M}_{m-1}$ lineare Verbindungen

$$\xi_h = A_h^{(0)}\mathsf{M}_0 + A_h^{(1)}\mathsf{M}_1 + \ldots + A_h^{(m-1)}\mathsf{M}_{m-1} \qquad (h = 0, \ldots, m-1)$$

geführt. *Es gilt dann für alle i:*

$$\mathsf{M}_i = a_i^{(0)}\xi_0 + a_i^{(1)}\xi_1 + \ldots + a_i^{(m-1)}\xi_{m-1} \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Es bleibt die Aufgabe, die Größen ξ zu berechnen. Dazu dienen die Gleichungen, die das $2m$-fache Verschwinden von $M(x)$ am Nullkte ausdrücken. Wir führen dazu in $M(x)$ an Stelle der μ die M tels der Formeln (3′) ein. So schreibt sich unter Benutzung des rtes (3″) für s:

$$\mathsf{M}_{m-1}^2) M(x) =$$

$$\mathsf{M}_0 + \ldots + \mathsf{M}_{m-1}\cos(m-1)x) + s(\mathsf{M}_m \cos mx + \ldots + \mathsf{M}_n \cos nx),$$

das $2m$-fache Verschwinden am Nullpunkt liefert die m Gleichungen

$$-(a_0^{(h)}\mathsf{M}_0 + \ldots + a_{m-1}^{(h)}\mathsf{M}_{m-1}) + s(a_m^{(h)}\mathsf{M}_m + \ldots + a_n^{(h)}\mathsf{M}_n) = 0,$$

unter $a_i^{(h)}$ wieder die Potenzen i^{2h} verstanden sind.

Setzen wir in die Gleichungen (12) für die M ihre Ausdrücke (11) so ergeben sich m Gleichungen für die m Größen ξ. Da s nach (3″) Quotient zweier homogener quadratischer Formen in den ξ ist, so l die Gleichungen homogen, und es muß ihre *Vereinbarkeit* nachgewiesen den. Das Resultat ist sehr einfach. Betrachten wir nämlich dasselbe

Gleichungssystem (11), (12), in dem aber jetzt s eine neue, von den ξ unabhängige Unbekannte sein möge, und sei ξ_h, s ein Lösungssystem dieser Gleichungen. Multipliziert man die Gleichungen (12) mit ξ_h und addiert sie, so kommt wegen (11)

$$-(\mathsf{M}_0^2 + \ldots + \mathsf{M}_{m-1}^2) + s(\mathsf{M}_m^2 + \ldots + \mathsf{M}_n^2) = 0,$$

d. h. der Wert (3″) von s.

Daher folgendes Ergebnis: *Um die Verschwindungsbedingungen zu erfüllen, trage man in* (12) *die Werte* (11) *der* M *in den* ξ *ein und eliminiere aus den erhaltenen m Gleichungen die m linear und homogen auftretenden Unbekannten* ξ_h. *Das Resultat ist eine Determinantengleichung in* s, *die „charakteristische Gleichung". Jedes zu einer Wurzel* s *dieser Gleichung zugehörige Wertsystem* ξ_h *erfüllt die Verschwindungsbedingungen.* Denn zwischen ihm und der Wurzel s besteht die Beziehung (3″).

§ 3.

Die charakteristische Gleichung.

Die charakteristische Gleichung hat nur reelle positive Wurzeln.

Zum Beweis gebrauchen wir eine merkwürdige Beziehung, die zwischen irgend zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung besteht.

Seien s und s' *voneinander verschiedene* Wurzeln, ξ_h und ξ_h' zugehörige Wertsysteme, M_i und M_i' die aus diesen gewonnenen Ausdrücke (11).

Multiplizieren wir die Gleichungen (12) (für s, ξ_h) mit ξ_h' und addieren, so ergibt sich nach (11):

$$(13)\quad -(\mathsf{M}_0'\mathsf{M}_0 + \ldots + \mathsf{M}_{m-1}'\mathsf{M}_{m-1}) + s(\mathsf{M}_m'\mathsf{M}_m + \ldots + \mathsf{M}_n'\mathsf{M}_n) = 0.$$

Multiplizieren wir andererseits die Gleichungen für s', ξ_h',

$$(12')\quad -(a_0^{(h)}\mathsf{M}_0' + \ldots + a_{m-1}^{(h)}\mathsf{M}_{m-1}') + s'(a_m^{(h)}\mathsf{M}_m' + \ldots + a_n^{(h)}\mathsf{M}_n') = 0,$$

mit ξ_h und addieren, so folgt ebenso:

$$(13')\quad -(\mathsf{M}_0\mathsf{M}_0' + \ldots + \mathsf{M}_{m-1}\mathsf{M}_{m-1}') + s'(\mathsf{M}_m\mathsf{M}_m' + \ldots + \mathsf{M}_n\mathsf{M}_n') = 0.$$

Aus (13) und (13′) aber ergibt sich, da s und s' nach Voraussetzung voneinander verschieden sind,

$$(14)\quad \mathsf{M}_0\mathsf{M}_0' + \ldots + \mathsf{M}_{m-1}\mathsf{M}_{m-1}' = 0, \qquad \mathsf{M}_m\mathsf{M}_m' + \ldots + \mathsf{M}_n\mathsf{M}_n' = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen die Unmöglichkeit komplexer Wurzeln. Denn sie führen auf Widerspruch, wenn man sie auf konjugiert-komplexe Wurzeln s und s' anwendet[4]). Gleichung (3″) aber zeigt, daß die reellen Wurzeln s positiv sein müssen.

---

[4]) Dazu ist zu beachten, daß, wenn nicht alle ξ_h verschwinden, auch die M_i nicht sämtlich verschwinden können.

Der Minimalwert s_{min} ist die kleinste Wurzel s_0 der charakteristi-
n Gleichung.
Das Minimumpolynom $M(x)$ ist — bis auf einen Zahlenfaktor —
eutig bestimmt.

Mehr als *ein* Minimumpolynom würde nämlich bestehen, wenn für s_0
sämtliche Unterdeterminanten der charakteristischen Gleichung ver-
ränden und also zu s_0 lineare Mannigfaltigkeiten der ξ_h gehörten. Es
aber ξ_h und ξ'_h voneinander verschiedene zu s_0 gehörige Wertsysteme,
$x)$ und $M'(x)$ die durch sie definierten Polynome. Dann ist, wie
iesen,

$$-(M_0 M'_0 + \ldots + M_{m-1} M'_{m-1}) + s_0 (M_m M'_m + \ldots + M_n M'_n) = 0,$$

$$\Delta(M, M') = 0,$$

er nach Voraussetzung

$$D(M, M') = 0,$$

er bei beliebigem ϱ

$$s(M + \varrho M') = s(M) = s_{min}.$$

se Gleichung ist aber nur dann möglich, wenn $M(x)$ und $M'(x)$ bis
einen Zahlenfaktor identisch sind. Denn sonst läßt sich ϱ so be-
mmen, daß $M + \varrho M'$ außer der $2m$-fachen Nullstelle am Nullpunkt
eine andere Nullstelle in J hat. Ein solches Polynom könnte aber
t Minimumpolynom sein[5]).

Wir stellen jetzt die charakteristische Gleichung explizit auf. Es er-
sich dabei zuerst ein interessanter Aufschluß über ihren Grad.
Man schreibe vorübergehend

$$\left\{\begin{array}{ll} -a_i^{(h)} = b_i^{(h)} & (i = 0, 1, \ldots m-1;\ h = 0, 1, \ldots, m-1) \\ s a_i^{(h)} = b_i^{(h)} & (i = m, \ldots, n;\ \quad h = 0, 1, \ldots, m-1). \end{array}\right.$$

Gleichungen (12) lauten dann

$$b_0^{(h)} M_0 + b_1^{(h)} M_1 + \ldots + b_n^{(h)} M_n = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, m-1),$$

[5]) Die angegebenen Resultate über die charakteristische Gleichung sind gültig beliebige reelle Werte der Koeffizienten $a_i^{(h)}$ der Gleichungen (11), (12), nicht für die besonderen Werte (10). Die Sätze haben augenscheinliche Verwandtft mit denen über die Säkulargleichung. In der Tat ist die Säkulargleichung ein lerfall der charakteristischen Gleichung. Auch für die allgemeine Gleichung gilt für die Säkulargleichung bekannte Satz: *Die charakteristische Gleichung hat dann nur dann eine Doppelwurzel $s = s_1$, wenn für s_1 auch sämtliche ersten Unterminanten verschwinden.* Die Beweise dieser Behauptungen sind nicht schwierig. kleinste Wurzel der charakteristischen Gleichung mit den Werten (10) der $a_i^{(h)}$ edenfalls eine einfache Wurzel.

und die Elimination der M zwischen ihnen und den Gleichungen (11) liefert das System

$$(15)\qquad c_{0h}\xi_0 + c_{1h}\xi_1 + \ldots + c_{m-1,h}\xi_{m-1} = 0, \qquad (h = 0, 1, \ldots, m-1)$$

$$(15')\qquad c_{lh} = a_0^{(l)}b_0^{(h)} + a_1^{(l)}b_1^{(h)} + \ldots + a_n^{(l)}b_n^{(h)} \qquad (l = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Die Resultante dieses Systems linearer Gleichungen, d. h. die charakteristische Gleichung, ist

$$|\, c_{00}\, c_{11} \cdots c_{m-1,m-1}\,| = 0.$$

Infolge der Form (15′) der Koeffizienten läßt sich die Determinante nach dem verallgemeinerten (Cauchyschen) Multiplikationssatz der Determinanten entwickeln:

$$\left|\, c_{00}\, c_{11} \cdots c_{m-1,m-1}\,\right| = \sum \left|\, a_{k_0}^{(0)} a_{k_1}^{(1)} \ldots a_{k_{m-1}}^{(m-1)} \right| \left|\, b_{k_0}^{(0)} b_{k_1}^{(1)} \ldots b_{k_{m-1}}^{(m-1)} \right|,$$

wo die Summe über alle m-gliedrigen, in der natürlichen Zahlenfolge geordneten Gruppen $k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}$ der Indizes $0, 1, \ldots, n$ zu erstrecken ist. Werden hierin für die $b_k^{(h)}$ ihre Werte (12′) eingetragen, so läßt sich die Summe nach Potenzen von s ordnen und die charakteristische Gleichung hinschreiben. Bezeichnet, wie in der Folge dauernd, p einen Index $0 \leqq p \leqq m-1$ und q einen Index $m \leqq q \leqq n$, so gewinnt die charakteristische Gleichung folgende Gestalt:

$$(16')\quad 0 = \left|\, a_0^{(0)} a_1^{(1)} \ldots a_{m-1}^{(m-1)} \right|^2 - s \sum \left|\, a_{p_0}^{(0)} a_{p_1}^{(1)} \ldots a_{p_{m-2}}^{(m-2)} a_q^{(m-1)} \right|^2 + s^2 \sum \left|\, a_{p_0}^{(0)} a_{p_1}^{(1)} \ldots a_{p_{m-3}}^{(m-3)} a_q^{(m-2)} a_{q'}^{(m-1)} \right|^2 - \ldots$$

Die Gleichung ist höchstens vom Grade m. Die Summe in dem Koeffizienten jeder Potenz von s enthält so viele Indizes q, als der Exponent angibt. Ist nun der Grad n des Polynoms $M(x)$ kleiner als $2m-1$, so sind nur $n - m + 1 < m$ Indizes q zur Verfügung. Daher:

Der Grad der charakteristischen Gleichung ist m, wenn $n \geqq 2m-1$ ist. Ist aber $n < 2m-1$, so ist der Grad der charakteristischen Gleichung kleiner als m, nämlich $n - m + 1$.

Die in den Koeffizienten von s auftretenden Determinanten sind, vermöge der Bedeutung (10) der $a_i^{(h)}$, Vandermondesche Determinanten. Ihre Berechnung ist zum Teil schon früher ausgeführt. Dividieren wir nämlich die rechte Seite von (16′) durch $\left|\, a_0^{(0)} a_1^{(1)} \ldots a_{m-1}^{(m-1)} \right|^2$ und schreiben übersichtlicher

$$\frac{\left|\, a_{p_0}^{(0)} a_{p_1}^{(1)} \ldots a_{p_{m-2}}^{(m-2)} a_q^{(m-1)} \right|}{\left|\, a_0^{(0)} a_1^{(1)} \ldots a_{m-1}^{(m-1)} \right|} = \left\{ \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\},$$

p den einzigen von $p_0, \ldots, p_{m-2}$ verschiedenen Index $0, 1, \ldots, m-1$ ichnet, so ist $\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}$ der absolute Betrag des durch die Gleichungen (9′) rten Ausdrucks $\varkappa_p^{(q)}$. In den Koeffizienten der höheren Potenzen s führen wir entsprechend Symbole $\left\{\begin{matrix} q\,q' \\ p\,p' \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} q\,q'\,q'' \\ p\,p'\,p'' \end{matrix}\right\}$, ... ein. Sie benen sich ganz analog. Wir brauchen für die weitere Betrachtung nur die $\left\{\begin{matrix} q\,q' \\ p\,p' \end{matrix}\right\}$, für die sich folgender Wert ergibt: Es durchlaufe $k_a(k'_a)$ Indizes $0, 1, \ldots, m-1$, die $< p(p')$ sind, $k_e(k'_e)$ alle Indizes der- en Folge, die $> p(p')$ sind. Dann schreibt sich (mit $p' > p$, $q' > q$)

$$\left\{\begin{matrix} q\,q' \\ p\,p' \end{matrix}\right\} = (q'^2 - q^2)\,\frac{\prod_{k=0}^{m-1}(q'^2 - k^2)\prod_{k=0}^{m-1}(q^2 - k^2)}{(q'^2 - p'^2)(q'^2 - p^2)(q^2 - p'^2)(q^2 - p^2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\prod(k_e'^2 - p'^2)\prod(p'^2 - k_a'^2)\prod(k_e^2 - p^2)\prod(p^2 - k_a^2)}.$$

Dieser Ausdruck steht zu den Größen $\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}$ in einer einfachen Beung. Es ist nämlich nach (9′):

$$\left\{\begin{matrix} q' \\ p \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} q \\ p' \end{matrix}\right\} =$$

$$\frac{\prod_{k=0}^{m-1}(q'^2 - k^2)\prod_{k=0}^{m-1}(q^2 - k^2)}{(q'^2 - p^2)(q^2 - p'^2)} \cdot \frac{1}{\prod(k_e'^2 - p'^2)\prod(p'^2 - k_a'^2)\prod(k_e^2 - p^2)\prod(p^2 - k_a^2)}$$

$$= \frac{(q'^2 - p'^2)(q^2 - p^2)}{q'^2 - q^2}\left\{\begin{matrix} q\,q' \\ p\,p' \end{matrix}\right\}.$$

nso ist

$$\left\{\begin{matrix} q' \\ p' \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\} = \frac{(q'^2 - p^2)(q^2 - p'^2)}{q'^2 - q^2}\left\{\begin{matrix} q\,q' \\ p\,p' \end{matrix}\right\}$$

daher

$$\left\{\begin{matrix} q\,q' \\ p\,p' \end{matrix}\right\} = \frac{\left\{\begin{matrix} q' \\ p \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} q \\ p' \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} q' \\ p' \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}}{p'^2 - p^2}.$$

Die charakteristische Gleichung erhält durch Einführung der Symbole endgültige Gestalt:

$$W(s) \equiv 1 - s\sum\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}^2 + s^2\sum\left\{\begin{matrix} q\,q' \\ p\,p' \end{matrix}\right\} - \ldots = 0.$$

In zwei Fällen wird die Gleichung linear: 1. für $m = 1$, wenn also das ynom nur 2 Nullstellen im Periodenintervall haben soll; 2. für $m = n$,

wenn alle Nullstellen reell sind. Im ersten Falle werden sämtliche $\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\} = 1$, daher $s = \frac{1}{n}$. Infolge der Gleichungen (11) sind alle M_i einander gleich, und also $\mu_0 = -n\mu_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Das Minimumpolynom ist

$$M_1(x) = n - \cos x - \cos 2x - \ldots - \cos nx.$$

Im zweiten Falle ist, nach dem bei den Gleichungen (9′) Gesagten,

$$s = \frac{1}{\sum_{p=0}^{m-1} \varkappa_p^{(m)} s} = \frac{1}{\binom{2m}{1}^2 + \binom{2m}{2}^2 + \ldots + \binom{2m}{m-1}^2 + \frac{1}{4}\binom{2m}{m}^2}.$$

Die Aufstellung des Polynoms selbst geschieht am einfachsten in der Weise, daß man die Gleichungen (12) mit den gelegentlich der Formeln (10) eingeführten Koeffizienten $A_h^{(p)}$ multipliziert und nach h summiert. Auf Grund von (9″) ergibt sich dann sofort

$$\mathsf{M}_p = -s\varkappa_p^{(m)} \mathsf{M}_m$$

und daraus

$$\mu_p = \varkappa_p^{(m)} \mu_m.$$

Setzt man $\mu_m = 1$, so wird $M(x)$ das schon früher angegebene Polynom für $2^{m-1}(\cos x - 1)^m$.

Diese beiden Resultate hatte ich bereits in meiner Note in den Mathematischen Annalen auf anderem Wege gefunden.

§ 4.

Abschätzung der kleinsten Wurzel der charakteristischen Gleichung.

Es sei allgemein

$$w(s) \equiv 1 - c_1 s + c_2 s^2 - \ldots + (-1)^r c_r s^r = 0 \qquad (r > 2) \tag{18}$$

eine Gleichung mit nur positiven, reellen Wurzeln. Ihre kleinste Wurzel s_0 läßt sich zwischen Grenzen einschließen. Die Wurzeln seien mit $s_0, s_1, \ldots, s_{r-1}$ bezeichnet. Dann ist

$$c_1 = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_{r-1}}$$

und daher

$$\frac{1}{s_0} < c_1 \leqq \frac{r}{s_0},$$

oder

$$s_0 > \frac{1}{c_1}, \qquad s_0 \leqq \frac{r}{c_1}. \tag{19}$$

Die untere Grenze ist für unsere Zwecke hinreichend genau, die obere läßt sich erheblich verschärfen, wenn man noch den zweiten Koeffizienten c_2 heranzieht.

Hat die Gleichung

$$\omega_2(s) \equiv 1 - c_1 s + c_2 s^2 = 0$$

reelle Wurzeln σ_1 und σ_2, so ist s_0 immer kleiner als diese Wurzeln.

Zum Beweise betrachten wir die von Laguerre[6]) eingeführten nome

$$P_0 = (-1)^r c_r, \qquad P_1 = (-1)^r (c_r s - c_{r-1}), \ldots,$$

$$P_{r-3} = (-1)^r (c_r s^{r-3} - c_{r-1} s^{r-4} + \ldots + (-1)^{r-3} c_3), \ldots,$$

$$P_r = (-1)^r \left(c_r s^r - c_{r-1} s^{r-1} + \ldots + (-1)^{r-3} c_3 s^3 + (-1)^{r-2} c_2 s^2 + (-1)^{r-1} c_1 s + (-1)^r\right) = w(s).$$

Anzahl der Vorzeichenwechsel der Folge $\{P(s)\}$, genommen für einen n positiv-reellen Wert s, ist gleich oder um eine gerade Anzahl größer lie Anzahl der Wurzeln von $w = 0$, die größer als s sind.

Sei jetzt s ein Wert, für den ω_2 negativ ist, und es werde angemen, daß keine Wurzel von w kleiner als s sei. Dann muß die e $\{P(s)\}$ genau r Vorzeichenwechsel haben. Also hat die Teilfolge $P_1, \ldots, P_{r-3}$ genau $r-3$ Vorzeichenwechsel. P_{r-3} ist daher negativ. Nun ist aber augenscheinlich

$$P_r(s) = s^3 P_{r-3}(s) + \omega_2(s).$$

er ist, bei unserer Voraussetzung über ω_2, auch $P_r(s) = w(s)$ negativ. widerspricht aber der Voraussetzung, daß keine Wurzel von $w = 0$ rhalb s liegt, denn $w(0) = 1$ ist positiv.

Demnach erhalten wir folgende obere Grenze für die kleinste Wurzel $w = 0$, die in der Form den Ausdrücken (19) entspricht:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2c_2}\left(c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2c_2}\left[c_1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4c_2}{c_1^2}}}\left(c_1 - \frac{4c_2}{c_1}\right)\right] \leqq \frac{1}{2c_2}\left[c_1 - \left(c_1 - \frac{4c_2}{c_1}\right)\left(1 + \frac{2c_2}{c_1^2}\right)\right],$$

$$s_0 \leqq \frac{1}{c_1}\left(1 + \frac{4c_2}{c_1^2}\right).$$

Für unsere charakteristische Gleichung $W = 0$ ist nun die Voraus- ung reeller Wurzeln von $\omega_2 = 0$ erfüllt, denn es ist

$$c_1^2 - 4c_2 > 0.$$

s beweist man einfach mit Hilfe der Beziehungen (17). Es ist nämlich

[6]) Oeuvres, Bd. I, S. 1—8.

$$(21)\quad c_1^2 = \left[\sum \left\{\frac{q}{p}\right\}^2\right]^2 > 2\sum \left\{\frac{q'}{p'}\right\}^2 \left\{\frac{q}{p}\right\}^2 = 2\sum' \left(\left\{\frac{q'}{p}\right\}^2 \left\{\frac{q}{p'}\right\}^2 + \left\{\frac{q'}{p'}\right\}^2 \left\{\frac{q}{p}\right\}^2\right)$$

wo die Summe Σ über *alle* Kombinationen (q, q', p, p') $(q' \neq q,\ p' \neq p$ erstreckt ist, die Summe Σ' über alle Kombinationen, bei denen $q' > q$ $p' > p$ ist. Andererseits ist nach (17)

$$(22)\quad c_2 = \sum' \frac{\left(\left\{\frac{q'}{p}\right\}\left\{\frac{q}{p'}\right\} - \left\{\frac{q'}{p'}\right\}\left\{\frac{q}{p}\right\}\right)^2}{(p'^2 - p^2)^2}$$

mit der gleichen Bedeutung des Summenzeichens wie oben.

Wir bezeichnen mit $Q(q', q, p', p)$ den Quotienten

$$Q(q', q, p', p) = \frac{1}{(p'^2 - p^2)^2} \frac{\left(\left\{\frac{q'}{p}\right\}\left\{\frac{q}{p'}\right\} - \left\{\frac{q'}{p'}\right\}\left\{\frac{q}{p}\right\}\right)^2}{\left\{\frac{q'}{p}\right\}^2 \left\{\frac{q}{p'}\right\}^2 + \left\{\frac{q'}{p'}\right\}^2 \left\{\frac{q}{p}\right\}^2}.$$

Ist g eine obere Grenze dieses Quotienten für alle möglichen Werte der Indizes, so ist

$$(23)\quad \frac{c_2}{c_1^2} < \frac{g}{2}.$$

Nun rechnet sich auf Grund der Gleichungen (9′)

$$Q(q', q, p', p) = \frac{1}{(p'^2 - p^2)^2} \frac{\left(\frac{1}{q'^2 - p^2}\frac{1}{q^2 - p'^2} - \frac{1}{q'^2 - p'^2}\frac{1}{q^2 - p^2}\right)^2}{\frac{1}{(q'^2 - p^2)^2}\frac{1}{(q^2 - p'^2)^2} + \frac{1}{(q'^2 - p'^2)^2}\frac{1}{(q^2 - p^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{(p'^2 - p^2)^2} \frac{[(q'^2 - p'^2)(q^2 - p^2) - (q'^2 - p^2)(q^2 - p'^2)]^2}{(q'^2 - p'^2)^2 (q^2 - p^2)^2 + (q'^2 - p^2)^2 (q^2 - p'^2)^2}$$

$$= \frac{(q'^2 - q^2)^2}{(q'^2 - p'^2)^2 (q^2 - p^2)^2 + (q'^2 - p^2)^2 (q^2 - p'^2)^2}.$$

Daher

$$(23')\quad Q(q', q, p', p) < \frac{1}{(q^2 - p^2)^2 + (q^2 - p'^2)^2} < \frac{1}{2(q^2 - p'^2)^2}.$$

Daraus folgt für alle Kombinationen (q', q, p', p)

$$(23'')\quad Q(q', q, p', p) < \frac{1}{2[m^2 - (m-1)^2]^2} = \frac{1}{2(2m-1)^2} = g.$$

Der kleinste, in Betracht kommende Wert von m ist 2. Also ist immer

$$\frac{c_2}{c_1^2} < \frac{1}{4 \cdot 3^2} = \frac{1}{36}.$$

Damit ist der geforderte Nachweis geführt. Es zeigt sich, daß $\frac{c_2}{c_1^2}$ stark unter dem Werte $\frac{1}{4}$ bleibt.

Wir können noch unsere Resultate (23), (23″) in die Ungleichung (20) agen und damit *eine sehr genaue Eingrenzung des Minimums* von s en:

$$\frac{1}{c_1} < s_{min} < \frac{1}{c_1}\left(1 + \frac{1}{(2m-1)^2}\right).$$

Für große m nähern sich die beiden Grenzen, d. h.

$$\lim_{m=\infty} c_1 s_{min} = 1.$$

Dieselbe asymptotische Gleichheit besteht aber auch noch in einem ren Falle, nämlich bei beliebigem m dann, wenn n groß gegen m ist, d. h.

$$\lim_{\frac{n}{m}=\infty} c_1 s_{min} = 1.$$

Um auch dies noch zu zeigen, setzen wir $n \geqq aAm$, wo a und A gend große ganze Zahlen sind. In c_1^2 und c_2 fassen wir die Glieder, n $q \geqq Am$ ist, zu den Teilsummen T_1 und T_2 zusammen. Die Ge- heiten der übrigen Glieder seien mit t_1 und t_2 bezeichnet. Es gibt $\frac{Am+1)(n-Am)}{2} = \frac{n^2}{2}(1-\varepsilon)$ Kombinationen (q', q) $(q' > q)$, die räge zu den T liefern; dagegen liefern nur

$$(n - Am)[(A-1)m+1] + \frac{[(A-1)m+1](A-1)m}{2} < \frac{n^2}{a}$$

binationen (q', q) Beiträge zu den t [7]). Da außerdem bei festem p Ausdrücke $\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}$ mit q zunehmen, ist sicher

$$t_1 < \frac{2T_1}{a(1-\varepsilon)} < 3\frac{T_1}{a}.$$

Wir schreiben jetzt

$$\frac{c_2}{c_1^2} = \frac{T_2}{T_1+t_1} + \frac{t_2}{T_1+t_1} < \frac{T_2}{T_1} + \frac{3}{a}\frac{t_2}{t_1}.$$

wir vorhin gesehen haben, ist $\frac{t_2}{t_1} < \frac{1}{36}$, denn die dortige, auf die ganzen men c_1^2 und c_2 bezügliche Abschätzung gilt ohne weiteres auch für die summen t. Daher geht das letzte Glied mit wachsendem a gegen Null.

Für $\frac{T_2}{T_1}$ gilt nach dem früheren

$$\frac{T_2}{T_1} < \frac{g_A}{2},$$

g_A die obere Grenze des Quotienten $Q(q', q, p, p')$ bezeichnet, wenn nd q beide $\geqq Am$ sind. Aus (23′) folgt sofort

[7]) ε bedeutet eine mit wachsendem a gegen Null gehende Größe.

$$g_A \leqq \frac{1}{2(A^2-1)^2 m^4},$$

und dieser Ausdruck geht mit wachsendem A gegen Null.

Wir geben zum Schluß als Anwendung einen Vergleich der Größen der Minima s bei verschiedenen Werten der Nullstellenzahl $2m$ und des Grades n. Wir bedienen uns dabei der ausführlicheren Schreibweise $s_m^{(n)}$.

Es besteht die Beziehung:

$$s_{m+1}^{(n+1)} < s_m^{(n)},$$

d. h. das Minimum wird kleiner, wenn gleichzeitig die Nullstellenzahl um 2, der Grad um 1 zunimmt.

Der Beweis beruht auf dem Vergleich der zu den genannten Werten der Nullstellenzahlen und der Grade gehörigen Größen c_1, die wir entsprechend mit $c_1^{(m,n)}$, $c_1^{(m+1,n+1)}$ bezeichnen. Da nämlich

$$s_m^{(n)} > \frac{1}{c_1^{(m,n)}}, \qquad s_{m+1}^{(n+1)} < \left(1+\frac{1}{(2m+3)^2}\right)\frac{1}{c_1^{(m+1,n+1)}},$$

so genügt für unseren Zweck der Nachweis, daß

$$c_1^{(m+1,n+1)} > \left(1+\frac{1}{(2m+3)^2}\right) c_1^{(m,n)}.$$

Um dies zu zeigen, ordnen wir jedem Glied (q, p) in $c_1^{(m,n)}$ die Kombination $(q+1, p)$ in $c_1^{(m+1,n+1)}$ zu und bezeichnen die diesen Kombinationen entsprechenden Glieder in den beiden Ausdrücken mit $\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}_m$ und $\left\{\begin{matrix} q+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}$. Es ist dann

$$c_1^{(m,n)} = \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=m}^{n}\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}_m^2,$$

$$c_1^{(m+1,n+1)} = \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=m+1}^{n+1}\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}^2 = \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=m}^{n}\left\{\begin{matrix} q+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}^2$$

$$> \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=m}^{n}\left\{\begin{matrix} q+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}^2,$$

und daher ist

$$\frac{c_1^{(m+1,n+1)}}{c_1^{(m,n)}} > \text{Minimum}\,\frac{\left\{\begin{matrix} q+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}^2}{\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}_m^2}$$

Die Formeln (9′) ergeben aber für alle Werte von p (auch $p=0$ nicht ausgenommen)

$$\frac{\left\{\begin{matrix} q+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}}{\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}_{m}} = \frac{\dfrac{q+1}{(q+1)^2-p^2}\,\dfrac{(q+m+1)!}{(q-m)!}\,\dfrac{1}{(m+p)!\,(m-p)!}}{\dfrac{q}{q^2-p^2}\,\dfrac{(q+m-1)!}{(q-m)!}\,\dfrac{1}{(m+p-1)!\,(m-p-1)!}}$$

$$= \frac{q+1}{q}\,\frac{q^2-p^2}{(q+1)^2-p^2}\,\frac{(q+m+1)\,(q+m)}{(m+p)\,(m-p)}.$$

festem q und m hat dieser Ausdruck seinen kleinsten Wert für $p=0$, also

$$\frac{\left\{\begin{matrix} q+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}}{\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}_{m}} \geqq \frac{q}{q+1}\,\frac{(q+m+1)\,(q+m)}{m^2} \geqq \frac{m}{m+1}\,\frac{(2m+1)\,2m}{m^2} = \frac{2\,(2m+1)}{m+1}.$$

die rechte Seite für alle positiven ganzen m größer als 3 ist, so ist alle Wertepaare (m, n)

$$\frac{c_1^{(m+1,\,n+1)}}{c_1^{(m,\,n)}} > 9,$$

unsere Behauptung beweist. Man sieht sogar, daß die Minima $s_m^{(n)}$ rasch, nämlich mindestens in geometrischer Progression mit dem tienten 9, gegen Null gehen, wenn halbe Nullstellenzahl und Grad in her arithmetischer Progression von der Differenz 1 wachsen.

Als Gegenbeispiel ist es interessant festzustellen, daß *bei festem Grad n Minima $s_m^{(n)}$ mit wachsendem m nicht alle abnehmen.* Es läßt sich lich leicht zeigen, daß für genügend großes m

$$s_m^{(m+1)} < s_{m+1}^{(m+1)}.$$

Zu diesem Nachweis genügt es festzustellen, daß für genügend großes m

$$c_1^{(m+1,\,m+1)} < \tfrac{1}{2}\,c_1^{(m,\,m+1)}.$$

$$_{n,\,m+1)} = \sum_{q=m}^{m+1}\sum_{p=0}^{m-1}\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}_m^2 > \sum_{p=0}^{m-1}\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p \end{matrix}\right\}_m^2 = \left\{\begin{matrix} m+1 \\ 0 \end{matrix}\right\}_m^2 + \sum_{p=1}^{m-1}\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p \end{matrix}\right\}_m^2,$$

$$_{1,\,m+1)} = \sum_{p=0}^{m}\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m+1}^2 = \left(\left\{\begin{matrix} m+1 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{m+1}^2 + \left\{\begin{matrix} m+1 \\ 1 \end{matrix}\right\}_{m+1}^2\right) + \sum_{p=1}^{m-1}\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p+1 \end{matrix}\right\}_{m+1}^2,$$

st $\dfrac{c_1^{(m+1,\,m+1)}}{c_1^{(m,\,m+1)}}$ kleiner als der größte der Ausdrücke

$$\frac{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{m+1}^2 + \left\{\begin{matrix} m+1 \\ 1 \end{matrix}\right\}_{m+1}^2}{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{m}^2}, \qquad \frac{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p+1 \end{matrix}\right\}_{m+1}^2}{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m}^2} \quad (p = 1, 2, \ldots, m-1).$$

betrachten zuerst die letzteren Quotienten. Für $p > 0$ kommt nach achen Kürzungen

$$\frac{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p+1 \end{matrix}\right\}_{m+1}}{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ 1 \end{matrix}\right\}_{m}} = \frac{(m+1)^2-p^2}{(m+1)^2-(p+1)^2}\,\frac{2m+1}{(m+p)(m+p+1)}.$$

Wir erhalten eine obere Grenze, wenn wir in dem ersten Quotienten de rechten Seite $p = m-1$, in dem zweiten $p = 0$ setzen. So kommt

$$\frac{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p+1 \end{matrix}\right\}_{m+1}}{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ p \end{matrix}\right\}_{m}} < \frac{4}{m+1}.$$

Der Ausdruck geht mit wachsendem m gegen Null. Das gleiche gilt fü

$$\frac{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ 0 \end{matrix}\right\}^2_{m+1} + \left\{\begin{matrix} m+1 \\ 1 \end{matrix}\right\}^2_{m+1}}{\left\{\begin{matrix} m+1 \\ 0 \end{matrix}\right\}^2_{m}} = \frac{4(m+1)^2+(m+2)^2}{(m+2)^2}\,\frac{(2m+1)^2}{m^4}.$$

Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Berlin, Januar 1918.

(Eingegangen am 28. Januar 1918.)

ine besondere metrische Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Mit 1 Figur im Text.

Die lineare Strahlenkongruenz K_1^1 und ihr geschart involutorischer m Σ_g haben i. a. drei einander rechtwinklig schneidende Symmetrieen d, e, e'[1]). Die eine d ist der zur Fluchtebene μ von Σ_g senkte Hauptstrahl von K_1^1; die beiden anderen e, e' sind mit μ inzident, zen die ihnen in Σ_g zugeordneten unendlich fernen Strahlen e_1, e_1' twinklig und mögen die „Fluchtachsen" der linearen Kongruenz und s geschart involutorischen Raumes heißen. Während einer halben hung um eine ihrer Fluchtachsen durchläuft die lineare Kongruenz, wir im folgenden nachweisen werden, einen linearen Strahlenkomplex, en Hauptachse mit jener Fluchtachse zusammenfällt. Umgekehrt kann r lineare Komplex durch eine halbe Drehung einer linearen Strahlengruenz um eine ihrer Fluchtachsen beschrieben werden. Insbesondere rt die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz bei einer halben Dreg um eine ihrer Fluchtachsen eine ebenso einfache wie anschauliche rische Erzeugung des linearen Komplexes. Daß umgekehrt ein linearer hlenkomplex i. a. von jeder seiner linearen Kongruenzen beschrieben l, sobald diese eine halbe Drehung um seine Hauptachse ausführt[2]), bt sich aus seiner rotatorischen Invarianz, wird aber erst durch die ende Untersuchung restlos begründet.

1. Kreuzt der Strahl p einer linearen Strahlenkongruenz K_1^1 ihre Symrieachsen d, e, e' schiefwinklig, so sind p und das Spiegelbild q von p einer der Fluchtachsen — etwa an e — eigentliche Kongruenzstrahlen. in K_1^1 enthaltene Regelschar zweiter Ordnung, welche den Hauptstrahl

[1]) Reye, Die Geometrie der Lage, 2. Abteilung, 4. Auflage, Stuttgart 1907, S. 80.
[2]) Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen, I. Band, Leipzig, 1902, § 59.

d mit p und dem unendlich fernen Kongruenzstrahl s verbindet, hat in der Fluchtebene μ einen Leitstrahl g, der mit den Punkten $d\mu$ und $p\mu$ inzident ist. Der Punkt $q\mu$ ist das Spiegelbild von $p\mu$ für die Fluchtachse e; er liegt nicht auf g. Der Strahl q ist also nicht in der Regelschar pds enthalten, und durch die vier Strahlen p, d, s, q geht also außer K_1^1 keine andere lineare Strahlenkongruenz. Kurz:

Eine lineare Strahlenkongruenz K_1^1 ist bestimmt durch ihren Hauptstrahl d, ihre Fluchtachsen e, e' und einen d, e, e' schiefwinklig kreuzenden Kongruenzstrahl p.

Es gibt nur einen linearen Strahlenkomplex Γ, der den Strahl p von K_1^1 enthält und die Fluchtachse e der Kongruenz zur Hauptachse hat. Γ geht durch den unendlich fernen Kongruenzstrahl s und die e rechtwinklig schneidenden Strahlen d, e'. Nun sind aber, wie Herr Reye[3]) gezeigt hat, alle zur Hauptachse normalen Strahlen Symmetrieachsen des Komplexes. K_1^1 und Γ liegen also symmetrisch zu d und e, und das Spiegelbild q von p an e ist ein gemeinsamer Strahl beider Gebilde. Da hiernach der Komplex Γ vier K_1^1 bestimmende Strahlen p, d, s, q von K_1^1 enthält, so enthält er alle Strahlen der Kongruenz oder:

Durch eine lineare Kongruenz K_1^1 geht nur ein linearer Komplex Γ, dessen Hauptachse mit einer Fluchtachse der Kongruenz zusammenfällt.

Γ ist helikoidisch, K_1^1 geht folglich während einer halben Drehung um e nacheinander in ∞^1 lineare Kongruenzen des Komplexes über. Wir wollen nachweisen: jeder Strahl von Γ liegt in einer dieser Kongruenzen, d. h. K_1^1 beschreibt bei einer halben Drehung um die Fluchtachse e den linearen Strahlenkomplex Γ.

Ist die lineare Strahlenkongruenz K_1^1 hyperbolisch, so sind ihre Leitgeraden u, v im Nullraume des Komplexes Γ einander zugeordnet, und jede von ihnen wird an der Hauptachse e des Nullraumes in die andere gespiegelt. u, v fallen somit, wenn sie eigentliche Strahlen sind und K_1^1 eine halbe Drehung um e ausführt, nacheinander mit den Strahlenpaaren einer rotatorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ des Nullraumes zusammen. Von den ∞^1 Kongruenzen, in die K_1^1 dabei übergeht, sendet jede in eine gegebene Ebene π einen Strahl. Er ist mit dem Nullpunkte P von π inzident, und dieser liegt, weil $\mathfrak{R}^2$ eine elliptisch involutorische Regelschar des Nullraumes ist, innerhalb des Kegelschnittes, den π mit $\mathfrak{R}^2$ gemein hat. Jeder mit P inzidente Komplexstrahl schneidet zwei einander zugeordnete Strahlen von $\mathfrak{R}^2$, jeder dieser Strahlen ist somit ein Strahl einer der ∞^1 Kongruenzen, und die lineare Kongruenz K_1^1 beschreibt folglich bei einer

[3]) Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. XXVI, 1. Abt. (1917), S. 350, Fußnote.

n Drehung um eine ihrer Fluchtachsen einen linearen Komplex. olcher enthält ∞^2 rotatorische Regelscharen, deren Drehungsachsen einer Hauptachse zusammenfallen. Es gibt also ∞^2 hyperbolische e Strahlenkongruenzen mit einer gemeinsamen Fluchtachse e, die bei halben Drehung um diese denselben linearen Komplex beschreiben. 2. Daß auch eine elliptische lineare Strahlenkongruenz durch eine Drehung um eine Fluchtachse einen linearen Komplex erzeugt, wird em folgenden Beweise hervorgehen, bei dem wir unter K_1^1 sowohl elliptische lineare Strahlenkongruenz wie auch eine hyperbolische mit lichen Leitgeraden verstehen können.

Eine Ebene ν schneide eine der Fluchtachsen der linearen Kongruenz - etwa e — rechtwinklig im Punkt N. Die im geschart involuto- n Raume Σ_g von K_1^1 der Ebene ν zugeordnete Ebene ν_1 geht durch den in ν liegenden Kongruenzstrahl n. In Σ_g entspricht einem e n^2 von ν mit dem Mittelpunkte N (Fig. 1) ein Kegelschnitt n_1^2 ν_1. Da die Fluchtebene μ von Σ_g mit e inzident ist und folglich Kreis n^2 in zwei reellen Punkten A^n, B^n schneidet, so ist n_1^2 eine rbel. Ihre Asymptoten a_1^n, b_1^n ent- nen den Tangenten a^n, b^n des Krei- ^{2} in A^n, B^n. Die Geraden a^n, b^n parallel zum Hauptstrahle d von nd treffen n bzw. in zwei Punkten , deren Abstand der Punkt N hälf- Folglich ist der Punkt $d\mu = M$ Mittelpunkt der Hyperbel n_1^2, und N t den Abstand der Schnittpunkte B_1 der Asymptoten a_1^n, b_1^n mit dem ruenzstrahle n. Die Hyperbel n_1^2 also die Fluchtachse e zur Neben- und zur Hauptachse die Schnitt- e von ν_1 mit der in Σ_g der Ebene de rdneten Ebene de'. — In Σ_g sind emeinsamen Punkten S, T des Krei- ^{2} und des Kongruenzstrahles n die Schnittpunkte S_1 T_1 von n mit der rbel n_1^2 zugeordnet, und den gemeinsamen Punkten A, B des Kon- zstrahles n und der Tangenten a^n, b^n von n^2 die Schnittpunkte A_1, on n mit den Asymptoten a_1^n, b_1^n von n_1^2. Bei einer halben Drehung re Nebenachse e beschreibt folglich die Hyperbel n_1^2 ein einschaliges ionshyperboloid H^2, das die Ebene ν in einem Kreise h^2 mit der Durch- rsehne S_1 T_1 durchdringt, während der von den Asymptoten a_1^n, b_1^n n_1^2 beschriebene Asymptotenkegel von H^2 mit ν einen Kreis i^2 mit

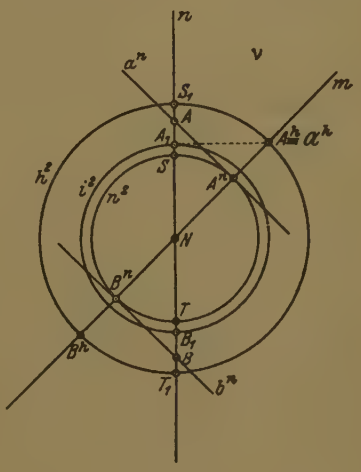

Fig. 1.

der Durchmessersehne $A_1 B_1$ gemein hat. Trifft nun die Asymptotenebene von H^2, die mit der Asymptote a_1^n von n_1^2 inzident ist, die Schnittgerade m von ν mit der Fluchtebene μ im Punkte $\mathfrak{A}^h$, so sind die rechtwinkligen Dreiecke NAA^n und $N\mathfrak{A}^h A_1$ ähnlich. Sie liefern die Proportion

$$NA : N\mathfrak{A}^h = NA^n : NA_1,$$

aus der

$$(\alpha) \qquad NA \cdot NA_1 = NA^n \cdot N\mathfrak{A}^h = NS \cdot N\mathfrak{A}^h$$

folgt. Zwischen den Punktepaaren A, A_1 und S, S_1 des geschart involutorischen Raumes Σ_g auf dem Strahle n und dem Mittelpunkte N der sie verbindenden Involution besteht aber die Beziehung:

$$NA \cdot NA_1 = NS \cdot NS_1;$$

aus ihr und (α) ergibt sich:

$$N\mathfrak{A}^h = NS_1 = NA^h.$$

Die Punkte $\mathfrak{A}^h$ und A^h sind also identisch. Die mit a_1^n inzidente Asymptotenebene des Hyperboloides H^2 geht somit durch den Schnittpunkt A^h von m mit dem Kreise h^2, und der Punkt A^h ist mit einem zu a_1 parallelen Strahle a von H^2 inzident. Die Hyperbel n_1^2 und der Kreis h^2 sind nun durch die den Strahl a enthaltende Regelschar $\mathfrak{H}_a^2$ von H^2 projektiv aufeinander bezogen, die Hyperbel n_1^2 und der ihr in Σ_g zugeordnete Kreis n^2 durch eine in K_1^1 enthaltene Regelschar vierter Ordnung $\mathfrak{R}^4$. Die Kreise h^2 und n^2 sind also projektiv, wenn je zwei ihrer Punkte auf Strahlen von $\mathfrak{H}_a^2$ und $\mathfrak{R}^4$ einander entsprechen, die mit denselben Punkten von n_1^2 inzident sind. Die Projektivität von h^2 und n^2 ist festgelegt durch die drei Paare einander entsprechender Punkte S_1, S; T_1, T und A^h, A^n. Die drei Geraden $S_1 S$, $T_1 T$ und $A^h A^n$ gehen aber durch den Punkt N, folglich liegt N auf den Verbindungsgeraden aller einander entsprechenden Punkte der projektiven Kreise h^2 und n^2. Der rotatorische Ebenenkegel ν^2, der die Regelschar $\mathfrak{H}_a^2$ aus N projiziert, ist sonach auch perspektiv zum Kreise n^2 und zur Regelschar $\mathfrak{R}^4$. Homologe Strahlen p und $p^{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{H}_a^2$ und $\mathfrak{R}^4$ schneiden sich in denselben Punkten von n_1^2 und sind bzw. mit den einander entsprechenden Elementen P^n und π^N der projektiven Elementargebilde n^2 und ν^2, inzident.

Während einer halben Drehung um e fällt Σ_g nacheinander mit ∞^1 geschart involutorischen Räumen $\Sigma_{1g}, \Sigma_{2g}, \ldots$ zusammen und die in Σ_g dem Kreise n^2 zugeordnete Hyperbel n_1^2 mit den Meridiankurven des Rotationshyperboloides H^2. Jede Meridiankurve von H^2 ist n^2 in einem der Räume zugeordnet. Geht durch einen Punkt $P_{\lambda 1}^n$ des Strahles p der Regelschar $\mathfrak{H}_a^2$ von H^2 die Meridiankurve $n_{\lambda 1}^2$, so sind $P_{\lambda 1}^n$ und der Schnittpunkt P^n von $p^{\mathfrak{R}}$ und n^2 ein Punktepaar von $\Sigma_{\lambda g}$. Während Σ_g nach-

der mit den Räumen Σ_{1g}, Σ_{2g}, ... zusammenfällt, decken die dem
te P^n in ihnen zugeordneten Punkte P^n_{11}, P^n_{21}, ... von P^n_1 ausgehend
inander alle Punkte von p. Die Geraden $P''P^n_1$, $P''P^n_{11}$, $P''P^n_{21}$, ...
aber bzw. Doppelstrahlen der geschart involutorischen Räume
$_{1g}$, Σ_{2g}, ..., d. h. Strahlen ihrer linearen Kongruenzen K^1_1, K^1_{11}, K^1_{21}, ...,
bilden die von diesen Kongruenzen durch den Punkt P'' gesandten
len einen Strahlenbüschel erster Ordnung, und zwar den Büschel
$_N$). Nun war ν eine gegebene zu e senkrechte Ebene, n^2 ein in ihr
ener Kreis mit dem Mittelpunkte $e\nu = N$ und P'' ein gegebener
t von n^2. Jeder Raumpunkt kann also zum Punkte P'' gewählt
n, und es gilt:

*Während eine lineare Kongruenz K^1_1 um eine ihrer Fluchtachsen
halbe Drehung ausführt, durchläuft der von ihr durch einen ge-
en Punkt P'' gesandte Strahl einen Strahlenbüschel erster Ordnung.*

Durch die lineare Kongruenz K^1_1 läßt sich nur ein linearer Komplex
gen, dessen Hauptachse mit der Fluchtachse e von K^1_1 zusammenfällt
4). Da Γ rotatorisch ist, geht K^1_1 bei einer halben Drehung um e
^{1} lineare Kongruenzen von Γ über. Demnach folgt aus dem vorstehen-
Lehrsatze:

*Jede elliptische lineare Strahlenkongruenz und jede hyperbolische
eigentlichen Leitgeraden beschreibt bei einer halben Drehung um eine
Fluchtachsen einen linearen Komplex, dessen Hauptachse die Dre-
sachse ist. Umgekehrt kann jeder nicht singuläre lineare Strahlen-
lex auf diese Weise beschrieben werden.*

3. Einfach ergibt sich, daß auch eine parabolische lineare Strahlen-
ruenz P^1_1 mit einer eigentlichen Leitgerade u durch eine halbe Dre-
um die nicht in ihr enthaltene Symmetrieachse e einen linearen
plex erzeugt.

Durch einen e kreuzenden Kongruenzstrahl p geht nämlich nur ein
rer Komplex Γ, der e zur Hauptachse hat. Γ enthält außer p den
dlich fernen Kongruenzstrahl s, ferner die Leitgerade u und die zu
arallelen Kongruenzstrahlen, endlich den zu u und e rechtwinkligen
ruenz- und Symmetriestrahl d. Die paraboloidische Regelschar zwei-
rdnung, welche d mit p und dem unendlich fernen Kongruenzstrahle s
ndet, hat u zum Leitstrahle und enthält somit keinen zu u parallelen
l. Folglich ist die parabolische Kongruenz P^1_1 durch einen zu u
lelen Kongruenzstrahl u' und durch die drei Strahlen p, d, s bestimmt,
d, s sind aber gleichzeitig Strahlen von Γ, somit ist zunächst er-
n:

*Eine parabolische lineare Strahlenkongruenz P^1_1 mit einer eigent-
n Leitgerade u ist bestimmt durch u, ihre beiden von u verschie-*

denen Symmetrieachsen d, e und durch einen Kongruenzstrahl p, der d nicht in P_1^1 enthaltene Symmetrieachse e kreuzt. Durch P_1^1 geht nur ei linearer Komplex Γ, dessen Hauptachse mit e zusammenfällt.

Während einer halben Drehung um *e* geht P_1^1 nacheinander in ∞ parabolische lineare Kongruenzen von Γ über. Ihre Leitgeraden bilde in einer zu *e* normalen Ebene einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessc Mittelpunkt auf *e* liegt. Jeder *e* kreuzende Kongruenzstrahl ist mit einer Strahle dieses Büschels inzident und sonach ein Strahl der parabolisch linearen Kongruenz, deren Leitgerade dieser Büschelstrahl ist. Also i dargetan:

Eine parabolische lineare Strahlenkongruenz mit einer eigentliche Leitgerade u beschreibt bei einer halben Drehung um die nicht in ih enthaltene Symmetrieachse e einen linearen Komplex, e ist seine Haup achse[4]*). Jeder nicht singuläre lineare Strahlenkomplex läßt sich au solche Weise erzeugen.*

4. Fällt der geschart involutorische Raum Σ_g bei einer halben Dr hung um seine Fluchtachse *e* nacheinander mit den ∞^1 Räumen Σ_1, Σ_{2g}, ... zusammen, so beschreiben die in ihnen der Ebene ν zugeordnete Ebenen um *e* einen Büschel und die dem Punkte P'' zugeordneten Punkt P_1'', P_2'', ... auf der Gerade *p* eine zum Büschel *e* perspektive Punkt reihe (S. 307). In je vier dieser Räume, in denen ν bzw. die Ebene eines harmonischen Ebenenwurfes zugeordnet sind, sind also P'' stet die Punkte eines harmonischen Punktwurfes zugeordnet, und die vie linearen Kongruenzen der Räume senden durch P'' die Strahlen eine harmonischen Strahlenwurfes. Mit Rücksicht hierauf nennen wir vie solcher geschart involutorischen Räume und ihre linearen Kongruenze „harmonisch", ferner die Gesamtheit der Räume wie ihrer linearen Kon gruenzen einen „Büschel". Auf die projektiven Beziehungen dieser Bü schel, die nunmehr der Untersuchung zugänglich sind, sei hier nur hin gewiesen; sie führen zu bemerkenswerten Eigenschaften des linearen Kom plexes.

Berlin-Halensee, d. 15. Oktober 1917.

---

[4]) Ein Beweis dieses Satzes findet sich auch in meiner Arbeit, „Die helikoidische Invarianz des linearen Strahlenkomplexes und eine neue Definition seines Para meters", Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. XXVI, 1. Abt. (1917) S. 351.

(Eingegangen am 8. Februar 1918.)

er die Fourierschen Koeffizienten der nach Riemann integrierbaren Funktionen.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

(Aus einem Brief an Herrn L. Fejér.)

In unserer letzten gemeinsamen Arbeit[1]) haben wir u. a. die notwen-en und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine Folge unendlich vielen Zahlen die Fourierschen Koeffizienten einer *be-ränkten* Funktion darstellen[2]). Vor kurzem habe ich nun die Bemer-g gemacht, daß man mit ähnlichen Mitteln die Bedingungen dafür stellen kann, daß die Folge (1) aus den Fourierschen Koeffizienten er *nach Riemann* integrierbaren Funktion bestehe.

Dieses Resultat, das im ersten Augenblick etwas überrascht, weil ja Fourierschen Koeffizienten einer Funktion mit Hilfe *Lebesguescher* egrale berechnet werden müssen, folgt aus sehr einfachen Überlegungen, ich Ihnen hier auseinandersetzen möchte.

Dabei werde ich die Terminologie und die Bezeichnungen meiner orlesungen über reelle Funktionen" (Leipzig, Teubner, 1918) benutzen dieses Buch im folgenden mit „V." zitieren.

1. Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $0 < x < 2\pi$ definierte, beschränkte, ßbare Funktion mit den Fourierschen Koeffizienten

$$a_0,\ a_1,\ \bar{a}_1,\ a_2,\ \bar{a}_2,\ \cdots.$$

Jede zu $f(x)$ „äquivalente" Funktion (V. § 359), d. h. jede Funktion $x)$, die nur höchstens in einer Nullmenge des gegebenen Intervalls von) verschieden ist, besitzt *dieselben* Fourierschen Koeffizienten wie $f(x)$

[1]) Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit n Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz, Rendiconti del Cir-Matematico di Palermo 32 (1911), S. 218—239.

[2]) a. a. O. S. 226.

und es wird sich darum handeln, zu untersuchen, ob unter diesen Funktionen $f_1(x)$ solche existieren, die nach Riemann integrierbar sind.

Wir führen zu diesem Zweck folgende Definitionen ein: eine Funktion $\varphi(x)$ soll *Unterfunktion* von $f(x)$ genannt werden, falls die Punktmenge (V. § 85)

$$\boldsymbol{M}(\varphi > f)$$

eine Nullmenge ist; ebenso soll $\varphi(x)$ eine *Oberfunktion* von $f(x)$ genannt werden, falls die Punktmenge

$$\boldsymbol{M}(\varphi < f)$$

eine Nullmenge ist.

Aus diesen Definitionen entnimmt man unmittelbar eine Reihe von Eigenschaften der Unter- und Oberfunktionen, die ich in folgendem Satze zusammenfasse:

Satz 1. *Eine Funktion, die zugleich Unter- und Oberfunktion von $f(x)$ ist, ist dieser Funktion äquivalent.*

Ist $\varphi(x)$ Unterfunktion von $f(x)$, so ist $f(x)$ Oberfunktion von $\varphi(x)$.

Ist $\varphi(x)$ Unterfunktion von $f(x)$ und $\psi(x)$ Unterfunktion von $\varphi(x)$, so ist $\psi(x)$ auch Unterfunktion von $f(x)$.

Es seien $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... abzählbar unendlich viele Unterfunktionen von $f(x)$ und

$$\varphi(x) = \text{obere Grenze von } \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}.$$

Dann ist, wenn man

$$N_k = \boldsymbol{M}(f < \varphi_k)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots$$

setzt, die Punktmenge N als Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ebenfalls eine Nullmenge; außerdem hat man aber

$$\boldsymbol{M}(f < \varphi) \prec N$$

und hieraus folgt, daß $\varphi(x)$ eine Unterfunktion von $f(x)$ ist. Ganz ebenso ist der zweite Teil des folgenden Satzes zu beweisen.

Satz 2. *Die obere Grenze einer abzählbaren Folge von Unterfunktionen von $f(x)$ ist eine Unterfunktion von $f(x)$. Ebenso ist die untere Grenze einer abzählbaren Folge von Oberfunktionen eine Oberfunktion.*

2. Es seien $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ zwei beschränkte Funktionen, von denen die erste nach unten, die zweite nach oben halbstetig ist (V. § 127); ferner sei $\varphi(x)$ eine Unterfunktion von $\Phi(x)$. Wegen der Halbstetigkeit der gegebenen Funktionen folgt, daß $\varphi(x)$ die obere und $\Phi(x)$ die untere Grenze eine Folge von stetigen Funktionen ist (V. § 367). Es gibt also stetige Funktionen $\varphi_k(x)$, $\Phi_k(x)$, so daß die Gleichungen

$$\varphi(x) = \text{obere Grenze von } \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}$$

$$\Phi(x) = \text{untere Grenze von } \{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots\}$$

ich gelten. Ferner muß nach dem Satze 1 jede Funktion $\varphi_p(x)$ eine rfunktion einer jeden Funktion $\Phi_q(x)$ sein und dieses ist, wegen der gkeit der Funktionen $\varphi_p(x)$ und $\Phi_q(x)$, dann und nur dann der wenn für jeden Wert von x

$$\varphi_p(x) \leqq \Phi_q(x)$$

Es müßte nämlich sonst mindestens ein Intervall auf der x-Achse, eine Punktmenge von nicht verschwindendem Inhalte geben, in dem $) > \Phi_q(x)$ ist.

Aus (2), (3) und (4) folgt ferner, daß für jeden Wert von x

$$\varphi(x) \leqq \Phi(x)$$

muß.

Die Eigenschaft von $\varphi(x)$, eine Unterfunktion von $\Phi(x)$ zu sein, ist vorhanden, wenn wir voraussetzen, daß $\varphi(x)$ eine Unter- und $\Phi(x)$ Oberfunktion von $f(x)$ ist und daher haben wir den

Satz 3. *Eine nach unten halbstetige Unterfunktion von $f(x)$ kann nds eine nach oben halbstetige Oberfunktion dieser Funktion über- n.*

3. Wir wollen jetzt zeigen, daß im Intervalle

$$I : 0 < x < 2\pi$$

größte nach unten halbstetige Unterfunktion von $f(x)$ existiert. Dazu chten wir die *abzählbar* unendlich vielen Teilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots$ I, deren Endpunkte *rationale* Abszissen besitzen. Jedem dieser Teil- valle δ_k ordnen wir eine zweiwertige Funktion $\chi_k(x)$ zu, die in $(I - \delta_k)$ h der unteren Grenze g von $f(x)$ ist, und in δ_k ebenfalls konstant soll und den größten Wert annimmt, der sich mit der Bedingung ägt, daß $\chi_k(x)$ eine Unterfunktion von $f(x)$ ist. Die Punktmengen δ_k) sind relativ zu I abgeschlossen (V. § 74), woraus man entnimmt 136), daß die Funktionen $\chi_k(x)$ nach unten halbstetig sind.

Nun setze ich

$$\chi(x) = \text{obere Grenze von } \{\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots\}$$

bemerke daß $\chi(x)$ erstens nach dem Satze 2 eine *Unterfunktion* von ist, und daß zweitens diese Funktion als obere Grenze von nach halbstetigen Funktionen ebenfalls *nach unten halbstetig* ist (V. § 174).

Es sei jetzt $\varphi(x)$ eine beliebige im Intervalle I definierte nach unten tetige Unterfunktion von $f(x)$ und x_0 ein fester Punkt von I.

Ist dann ε eine beliebige positive Zahl, so gibt es eine stetige Funktion $\psi(x)$, die beide Bedingungen

$$\psi(x) \leqq \varphi(x) \qquad (0 < x < 2\pi) \tag{6}$$

$$\psi(x_0) \geqq \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

zugleich erfüllt.

Ferner kann man im Streifen zwischen den beiden stetigen Funktionen $\left(\psi(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $\psi(x)$ mindestens eine zur x-Achse parallele Strecke finden, die einen inneren Punkt mit der Abszisse x_0 und Endpunkte mit rationalen Abszissen besitzt. Bezeichnet man mit δ_{k_0} das Intervall unserer Folge, in das sich diese Strecke projiziert, so muß nach unserer Konstruktion

$$\chi_{k_0}(x_0) \geqq \psi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher nach (5) und (7)

$$\chi(x_0) \geqq \varphi(x_0) - \varepsilon$$

sein. Die Wahl des Punktes x_0 innerhalb I und der positiven Zahl ε ist aber willkürlich; man hat daher allgemein

$$\varphi(x) \leqq \chi(x)$$

d. h. den

Satz 4. *Im Intervalle $0 < x < 2\pi$ gibt es eine größte nach unten halbstetige Unterfunktion $\chi(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$.*

Ebenso beweist man den

Satz 5. *Es gibt im Intervalle $0 < x < 2\pi$ eine kleinste nach oben halbstetige Funktion $X(x)$ der Funktion $f(x)$.*

4. Es sei $f_1(x)$ eine beliebige, zu $f(x)$ äquivalente Funktion und mit $\varphi_1(x)$ ihre untere, mit $\Phi_1(x)$ ihre obere Limesfunktion bezeichnet (V. § 123). Aus $\varphi_1(x) \leqq f_1(x)$ folgt, daß $\varphi_1(x)$ eine Unterfunktion von $f(x)$ ist; außerdem ist aber $\varphi_1(x)$ nach unten halbstetig und daher, nach dem Satze 4

$$\varphi_1(x) \leqq \chi(x) \qquad (0 < x < 2\pi). \tag{8}$$

Man beweist auf gleichem Wege, daß

$$X(x) \leqq \Phi_1(x) \tag{9}$$

ist. Ich bezeichne ferner mit $f_2(x)$ eine Funktion, die in jedem Punkte der Punktmenge

$$M(\chi \leqq f \leqq X)$$

gleich $f(x)$ ist und auf der übrigbleibenden Nullmenge des Intervalls

$< x < 2\pi$ gleich $\chi(x)$ ist. Die Funktion $f_2(x)$ ist zu $f(x)$ äquivalent
l genügt der Bedingung

)
$$\chi(x) \leqq f_2(x) \leqq X(x).$$

Aus (10) folgt nun mit Berücksichtigung der Halbstetigkeit von $\chi(x)$
l $X(x)$, daß die Limesfunktionen $\varphi_2(x)$ und $\Phi_2(x)$ von $f_2(x)$ den
lingungen

$$\chi(x) \leqq \varphi_2(x) \quad \text{und} \quad \Phi_2(x) \leqq X(x)$$

nügen und hieraus folgt mit Berücksichtigung von (8) und (9)

$$\varphi_2(x) = \chi(x), \qquad \Phi_2(x) = X(x).$$

ses Resultat kann folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz 6. *Die Funktion $\chi(x)$ ist nirgends kleiner als die untere*
d die Funktion $X(x)$ nirgends größer als die obere Limesfunktion
er beliebigen zu $f(x)$ äquivalenten Funktion. Es gibt zu $f(x)$ äqui-
ente Funktionen, deren Limesfunktionen mit $\chi(x)$ und $X(x)$ zu-
mmenfallen.

5. Nach einem bekannten Satze von Lebesgue ist eine Funktion
nn und nur dann nach Riemann integrierbar, wenn ihre Limesfunktionen
ander äquivalent sind (V. § 415).

Gibt es eine zu $f(x)$ äquivalente Funktion $f_1(x)$ mit den Limes-
nktionen $\varphi_1(x)$ und $\Phi_1(x)$, die nach Riemann integrierbar ist, so
gt aus der Äquivalenz dieser letzteren Funktionen und aus

$$\varphi_1(x) \leqq \chi(x) \leqq X(x) \leqq \Phi_1(x),$$

ß auch

$$\chi(x) \sim X(x)$$

. Umgekehrt folgt aber aus der Äquivalenz von $\chi(x)$ und $X(x)$, nach
m letzten Satze, daß es zu $f(x)$ äquivalente, nach Riemann integrier-
re Funktionen gibt.

Satz 7. *Es gibt dann und nur dann nach Riemann integrierbare*
d zu $f(x)$ äquivalente Funktionen, wenn die Funktionen $\chi(x)$ und $X(x)$
ander äquivalent sind.

6. Aus der Tatsache, daß nach dem Satze 3 stets $\chi(x) \leqq X(x)$ ist,
gt, daß die Funktionen $\chi(x)$ und $X(x)$ dann und nur dann einander
uivalent sind, wenn

1)
$$\int_0^{2\pi} \chi(x)\,dx = \int_0^{2\pi} X(x)\,dx$$

(V. § 405). Bezeichnet man die Fourierschen Koeffizienten von $\chi(x)$ mit

2)
$$b_0,\ b_1,\ \bar{b}_1,\ b_2,\ \bar{b}_2,\ \ldots$$

und die Fourierschen Koeffizienten von $X(x)$ mit

$$B_0,\ B_1,\ \overline{B}_1,\ B_2,\ \overline{B}_2,\ \ldots, \tag{13}$$

so kann man die Gleichung (11) durch

$$b_0 = B_0$$

ersetzen und folgendes Resultat aussprechen.

Satz 8. *Für die im vorigen Satze geforderte Äquivalenz der Funktionen $\chi(x)$ und $X(x)$ ist notwendig und hinreichend, daß die konstanten Glieder in den Fourierschen Entwicklungen dieser Funktionen übereinstimmen.*

7. Ich will nun zeigen, wie man die Zahlen b_0 und B_0 bestimmen kann. Ich bezeichne mit s_p die obere Grenze der konstanten Glieder aller trigonometrischen Polynome p^{ter} Ordnung, die Unterfunktionen von $f(x)$ sind; diese Zahlen bilden natürlich nach ihrer Definition eine monoton wachsende Folge und es existiert daher der Grenzwert

$$\lim_{p=\infty} s_p.$$

Da ferner jedes trigonometrische Polynom, das Unterfunktion von $f(x)$ ist, als stetige Unterfunktion von $f(x)$ nie größer als $\chi(x)$ sein kann, muß für jeden Wert von p

$$s_p \leqq b_0$$

und daher auch

$$\lim_{p=\infty} s_p \leqq b_0 \tag{14}$$

sein. Anderseits kann man, nach einem bekannten Satze über Lebesguesche Integrale (V. § 399), wenn man noch berücksichtigt, daß $\chi(x)$, als nach unten halbstetige Funktion, die Grenze einer monoton wachsenden Folge von stetigen Funktionen ist, jeder positiven Zahl ε eine stetige Unterfunktion $\varphi(x)$ von $f(x)$ zuordnen, für die

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} = b_0 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Ferner gibt es für hinreichend große p trigonometrische Polynome, die eine zwischen den stetigen Kurven $\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\varphi(x)$ verlaufende Kurve darstellen. Für diese Werte von p ist dann

$$s_p \geqq b_0 - \varepsilon$$

und man hat, weil $s_0 \leqq s_1 \leqq \ldots$ ist,

$$\lim_{p=\infty} s_p \geqq b_0 - \varepsilon. \tag{15}$$

Vergleich von (14) und (15) liefert dann den ersten Teil des folgenden es, dessen zweiter Teil ebenso zu beweisen ist.

Satz 9. *Bezeichnet man mit s_p die obere Grenze der konstanten der aller trigonometrischen Polynome p^{ter} Ordnung, die Unterfunktionen $f(x)$ sind, so ist stets*

$$b_0 = \lim_{p=\infty} s_p.$$

nso ist

$$B_0 = \lim_{p=\infty} S_p,$$

n S_p die untere Grenze der konstanten Glieder aller trigonometrischen ynome p^{ter} Ordnung bedeutet, die Oberfunktionen von $f(x)$ sind.

8. Die Bestimmung von b_0 und B_0 ist also auf die Berechnung von nd S_p zurückgeführt. Die Zahl λ, die wir in § 3 unserer schon oben ähnten gemeinsamen Arbeit berechnet haben, stellt die größte konstante erfunktion von $f(x)$ dar und fällt daher in der Bezeichnung des vorigen agraphen mit s_0 zusammen.

Die von uns damals benutzten Hilfsmittel erlauben, wie jetzt zu gen ist, ganz allgemein die Zahlen s_p und S_p zu bestimmen. Diese fsmittel beruhen im wesentlichen auf folgenden beiden Sätzen:

Satz A. *Eine meßbare Funktion $f(x)$ mit den Fourierschen ffizienten*

$$a_0,\ a_1,\ \bar{a}_1,\ \ldots$$

dann und nur dann einer beschränkten nicht negativen Funktion ivalent, wenn die harmonische Funktion

$$U(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a \cos k\vartheta + \bar{a}_k \sin k\vartheta)$$

$r < 1$ regulär und dort beschränkt und nicht negativ ist.

Satz B. *Sind*

$$a_0,\ a_1,\ \bar{a}_1,\ \ldots,\ a_n,\ \bar{a}_n$$

ndwelche $(2n+1)$ reelle Zahlen, so gibt es dann und nur dann für $r < 1$ reguläre, nicht negative harmonische Funktion $U(r, \vartheta)$, n Entwicklung (18) mit den gegebenen Koeffizienten (19) beginnt, n a_0 nicht kleiner ist als die größte Wurzel $\bar{\lambda}$ der algebraischen chung in λ

$$D_n(2\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

Die linke Seite von (20) *ist eine Abkürzung für die rekurrente Determinante*

$$\begin{vmatrix} 2\lambda, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \\ \alpha_{-1}, & 2\lambda, & \alpha_1, & \dots, & \alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{-n}, & \alpha_{-n+1}, & \alpha_{-n+2}, & \dots, & 2\lambda, \end{vmatrix}$$

in die man

$$\alpha_k = a_k + i\bar{a}_k, \qquad \alpha_{-k} = a_k - i\bar{a}_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

zu setzen hat. Es gelten außerdem stets die Ungleichheiten

$$(21) \qquad |a_k| \leqq 2\lambda, \qquad |\bar{a}_k| \leqq 2\lambda \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

9. Ich kehre nun zu unserer beschränkten, meßbaren Funktion $f(x)$ mit den Fourierschen Koeffizienten

$$(22) \qquad a_0, a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \dots$$

zurück und bezeichne wieder mit g ihre untere Grenze.

Es sei p eine beliebige natürliche Zahl und $n > p$; ich führe $2p$ Veränderliche ein

$$(23) \qquad y_1, \bar{y}_1, \dots, y_p, \bar{y}_p,$$

sowie auch die Abkürzungen

$$(24) \qquad \eta_k = y_k + i\bar{y}_k, \qquad \eta_{-k} = y_k - i\bar{y}_k \qquad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Hierauf suche ich *die untere Grenze der größten Wurzel der algebraischen Gleichung in* λ

$$(25) \qquad D_n(\lambda, \eta_1, \dots, \eta_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n) = 0,$$

wenn man die p *komplexen Zahlen* $\eta_1, \dots, \eta_p$ *irgendwie variieren läßt.*

Nun bemerke ich, daß, da die Funktion $(f(x) - g)$ nach Voraussetzung beschränkt und nicht negativ ist, die größte Wurzel der Gleichung

$$D_n(\lambda, a_1 \dots a_n) = 0$$

nach den Sätzen des vorigen Paragraphen sicher nicht größer als $(a_0 - g)$ sein kann. Ich brauche also nur solche Wertsysteme $y_1, \bar{y}_1, \dots, y_p, \bar{y}_p$ zu betrachten, für die die größte Wurzel der Gleichung (25) die Zahl $(a_0 - g)$ nicht übertrifft, und hieraus folgt, mit Berücksichtigung von (21),

$$(26) \qquad |y_k| \leqq 2(a_0 - g), \qquad |\bar{y}_k| \leqq 2(a_0 - g) \qquad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Es genügt also, wenn ich die y_k, $\bar{y}_k$ innerhalb der beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge (26) variieren lasse, und da die größte Wurzel der Gleichung (25) eine stetige Funktion dieser Zahlen ist, wird ihre untere Grenze für mindestens ein System von Werten der y_k, $\bar{y}_k$ erreicht, das ich mit

$$(27) \qquad y_{pk}(n), \qquad \bar{y}_{pk}(n) \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

hnen will. Es ist für das Folgende bequem die untere Grenze selbst $a_0 - s_p(n)$) zu bezeichnen.

0. Aus dem Satze B folgt dann, daß jede nicht negative harmonische ion (18), für welche die Koeffizienten a_k, $\bar{a}_k$ für $k = p+1, \ldots, n$ len gegebenen aus der Folge (22) übereinstimmen, ein konstantes besitzt, das sicher nicht kleiner ist als $(a_0 - s_p(n))$. Hieraus ent- t man aber, wenn man p festhält und n wachsen läßt,

$$a_0 - s_p(n) \leqq a_0 - s_p(n+1)$$

laher existiert auch stets der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} s_p(n) = s_p.$$

r Grenzwert s_p ist wegen $a_0 - s_p(n) \leqq a_0 - s_p \leqq a_0 - g$ eine end- Zahl.

Ferner bemerke man, daß wegen (26)

$$|y_{pk}(n)| \leqq 2(a_0 - g), \quad |\bar{y}_{pk}(n)| \leqq 2(a_0 - g) \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

Man kann daher aus der Folge

$$n = p+1,\ p+2, \ldots$$

atürlichen Zahlen eine Teilfolge

$$n_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

hlen, so daß die $2p$ Grenzwerte

$$\begin{cases} \lim\limits_{j=\infty} y_{pk}(n_j) = y_{pk} \\ \lim\limits_{j=\infty} \bar{y}_{pk}(n_j) = y_{pk} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

ch existieren.

1. Nach dem Satze B kann man jeder natürlichen Zahl j eine im itskreise reguläre nicht negative harmonische Funktion $U_j(r, \vartheta)$ zu- n, deren Entwicklung die $(2n_j + 1)$ Anfangskoeffizienten

$$a_0 - s_p(n_j),\ y_{p1}(n_j), \ldots, y_{pp}(n_j),\ a_{p+1}, \ldots, \bar{a}_{n_j}$$

t. Diese und auch die folgenden Koeffizienten von $U_j(r, \vartheta)$ sind absoluten Betrage nach nicht größer als die feste Zahl $2(a_0 - g)$. un überdies die Koeffizienten der Entwicklung von $U_j(r, \vartheta)$ nach (30) und (31) mit wachsendem j gegen die Zahlen der Folge

$$a_0 - s_p,\ y_{p1}, \ldots, \bar{y}_{pp},\ a_{p+1},\ \bar{a}_{p+1}, \ldots$$

rgieren, so existiert ebenfalls der Grenzwert

$$\lim_{j=\infty} U_j(r, \vartheta) = U(r, \vartheta).$$

ei bedeutet $U(r, \vartheta)$ eine *nicht negative* für $r < 1$ reguläre harmo-

nische Funktion, die die Koeffizienten (32) besitzt. Hieraus folgt nach dem Satze A, daß das trigonometrische Polynom

$$\psi_p(x) = s_p + \sum_{k=1}^{p} (a_k - y_{pk}) \cos kx + (a_k - \bar{y}_{pk}) \sin kx$$

eine *Unterfunktion* von $f(x)$ ist.

Es sei nun

$$\psi'_p(x) = s'_p + \sum_{k=1}^{p} (a_k - y'_k) \cos kx + (a_k - y'_k) \sin kx$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom p^{ter} Ordnung, das zugleich Unterfunktion von $f(x)$ ist. Dann muß für jedes $n > p$ mindestens eine für $r < 1$ reguläre und nicht negative harmonische Funktion existieren, deren Entwicklung mit den Koeffizienten

$$a_0 - s'_p,\ y'_1, \ldots,\ y'_p,\ a_{p+1}, \ldots,\ \bar{a}_n$$

beginnt. Hieraus folgt, nach der Definition von $s_p(n)$,

$$a_0 - s_p(n) \leqq a_0 - s'_p$$

und es ist daher auch

$$s'_p \leqq \lim_{n=\infty} s_p(n) = s_p.$$

Die Zahlen s_p haben also genau dieselbe Bedeutung wie im Satze 9.

12. Um auf analogem Wege die Zahlen S_p zu berechnen, muß man mit $(S_p(n) - a_0)$ die untere Grenze der größten Wurzel der Gleichung

$$D_n(\lambda, -\eta_1, \ldots, -\eta_p, -a_{p+1}, \ldots, -a_n) = 0$$

oder was dasselbe ist mit $[a_0 - S_p(n)]$ die obere Grenze der kleinsten Wurzel von

$$D_n(\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_p, a_{p+1}, \ldots, a_n) = 0$$

für alle möglichen Wertsysteme $\eta_1, \ldots, \eta_p$ bezeichnen. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} S_p(n) = S_p.$$

Vergleicht man diese letzten Resultate mit unseren früheren Sätzen, so erhält man schließlich den

Satz 10. *Man bezeichne mit $(a_0 - s_p(n))$ die untere Grenze der größten Wurzel der Gleichung in λ*

$$D_n(\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_p, a_{p+1}, \ldots, a_n) = 0$$

und mit $(a_0 - S_p(n))$ die obere Grenze der kleinsten Wurzel dieser Gleichung, wenn man die komplexen Zahlen $\eta_1, \ldots, \eta_p$ beliebig variieren läßt. Dann drückt die Gleichung

(33)
$$\lim_{p=\infty} \lim_{n=\infty} (S_p(n) - s_p(n)) = 0$$

otwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß eine nach ann integrierbare Funktion mit den Fourierschen Koeffizienten , $\bar{a}_1, \ldots$ existiert.

13. Der letzte Satz enthält das Resultat, das ich beweisen wollte, ch habe nur noch einige kleinere Bemerkungen hinzuzufügen. Zu- t bemerke ich, daß da stets $b_0 \leqq a_0 \leqq B_0$ ist, die Bedingung $b_0 = B^0$ 9 sich spalten läßt in die zwei Bedingungen

$$b_0 = a_0 \quad \text{und} \quad a_0 = B_0.$$

Was bedeutet nun jede dieser letzten Gleichungen, wenn man sie ln nimmt?

Die Gleichung $b_0 = a_0$ sagt z. B. aus, daß unter den zu $f(x)$ äqui- ten Funktionen mindestens eine existiert, deren *unteres Darbouxsches ral* gleich dem Lebesgueschen ist, und die Gleichung $a_0 = B_0$ hat analoge Bedeutung. Es ist daher sehr leicht Funktionen anzugeben, welche $b_0 = a_0$ und $a_0 < B_0$ ist. Man betrachte z. B. auf dem valle

$$I : 0 < x < 2\pi$$

überall dicht liegende offene Punktmenge A, deren Inhalt gleich π und setze $f(x) = 1$ auf A und $f(x) = 0$ auf $I - A$. Es ist sehr t einzusehen, daß man hier

$$b_0 = a_0 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_0 = 1$$

14. Zweitens möchte ich noch zeigen, wie man auch die übrigen rierschen Koeffizienten b_k, $\bar{b}_k$ der Funktion $\chi(x)$ ermitteln kann. dem § 11 ist die Funktion $\chi(x) - \psi_p(x)$ eine nicht negative Funk- deren Fouriersche Entwicklung mit $(b_0 - \varepsilon_p)$ beginnt. Man hat z. B. für jedes $j < p$

$$|b_j - (a_j - y_{pj})| \leqq 2(b_0 - \varepsilon_p)$$

wegen der Gleichung (16)

$$b_j = \lim_{p=\infty} (a_j - y_{pj})$$

ebenso findet man

$$\bar{b}_j = \lim_{p=\infty} (a_j - \bar{y}_{pj}).$$

Man kann sogar die b_j, $\bar{b}_j$ direkt aus den $y_{pk}(n)$, $\bar{y}_{pk}(n)$ berechnen, von dem Auswahlprinzip, das im § 10 benutzt worden ist, Gebrauch nachen. Man kann nämlich die Teilfolge $n_1, n_2, \ldots$, die wir in diesem graphen benutzt haben, so bestimmen, daß für ein *festes* $j < p$

$$y_{pj} = \overline{\lim_{n=\infty}} \; y_{pj}(n)$$

ist; tut man dies für jedes $p > j$, so wird

$$b_j = a_j - \lim_{p=\infty} \overline{\lim_{n=\infty}} y_{pj}(n)$$

und diese letzte Gleichung gilt für jedes beliebige j.

15. Endlich möchte ich Sie darauf aufmerksam machen, daß man mit ähnlichen Mitteln auch versuchen könnte zu untersuchen, ob unter den zu $f(x)$ äquivalenten Funktionen eine *stetige, periodische* Funktion existiert. Dazu müßte man statt der früheren trigonometrischen Polynome andere $\omega_p(x)$ und $\Omega_p(x)$ bestimmen, mit folgenden Eigenschaften:

$\omega_p(x)$ ist ein trigonometrisches Polynom p^{ter} Ordnung, das Unterfunktion von $f(x)$ ist und für welches die obere Grenze der Differenz $[\chi(x) - \omega_p(x)]$ möglichst klein ist. Das trigonometrische Polynom $\Omega_p(x)$ aber ist eine Oberfunktion von $f(x)$, für welches die obere Grenze der Differenz $[\Omega(x) - X(x)]$ möglichst klein ist. Setzt man dann

$$\alpha_p = \text{obere Grenze von } [\Omega_p(x) - \omega_p(x)],$$

so ist

$$\lim_{p=\infty} \alpha_p = 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß eine zu $f(x)$ äquivalente stetige und periodische Funktion existiert. Man müßte diesen Gedanken aber erheblich weiterverfolgen, ehe er in bequeme algebraische Form erscheinen kann.

Der § 12 unserer gemeinsamen Arbeit führt ebenfalls zu vielen interessanten Anwendungen, z. B. zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Summierbarkeit oder die Totalstetigkeit einer durch ihre Fourierschen Koeffizienten gegebenen Funktion. Das sind aber Fragen, die ich heute nicht mehr berühren möchte.

Göttingen, den 23. März 1917.

(Eingegangen am 1. Februar 1918.)

eis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen egebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt.

Von

R. Courant in Göttingen (z. Z. im Heere).

In der vorliegenden Mitteilung soll der Satz bewiesen werden:

Unter allen ebenen Gebieten, die von einer stückweise analytischen e gegebener Länge begrenzt sind, besitzt der Kreis und nur der den kleinsten möglichen Eigenwert für die Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

er Randbedingung $u = 0$.

Hierbei ist wie üblich

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

x und y bezeichnen rechtwinklige Koordinaten in der Ebene der beteten Kurve.

Physikalisch besagt der Satz, daß von allen homogenen Membranen enen Umfanges bei gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten lton besitzt. Diese Tatsache ist eng mit dem von Lord Rayleigh stellten, noch unbewiesenen Satze verwandt, bei dem nicht der Umsondern der Flächeninhalt als gegeben betrachtet wird[1]). Der Bewird hier durch Überlegungen geführt werden, wie sie zuerst Steiner Lösung des isoperimetrischen Problems angewandt hat. Auf das liche Problem von Rayleigh hoffe ich in einer späteren Mitteilung kkommen zu können.

Der kleinste Eigenwert λ eines einfach zusammenhängenden Bereiches x-y-Ebene für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ unter der Rand-

[1]) Lord Rayleigh, Theorie of sound, London und New York 1894, Vol. 1, 0, S. 340 ff.

bedingung $u = 0$ ist bekanntlich dadurch charakterisiert, daß er den kleinsten Wert darstellt, den das über den Bereich B erstreckte Integral

$$D(u) = \iint_{(B)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy \tag{1}$$

annehmen kann, wenn zum Vergleich alle auf dem Rande von B verschwindenden Funktionen zugelassen werden, die in B mit Einschluß des Randes stetig sind, deren erste Ableitungen bis auf erlaubte endliche Sprünge an endlich vielen analytischen Kurvenstücken im Innern von B ebenfalls stetig sind, und für die endlich das über den Bereich B erstreckte Integral

$$J(u) = \iint_{(B)} u^2 dx\,dy \tag{2}$$

den Wert 1 besitzt. Über den Bereich B soll vorausgesetzt werden, daß er von einer stückweise analytischen[2]) Randkurve begrenzt wird. Die Funktion u, für die das Minimum erreicht wird, heißt die erste Eigenfunktion des Bereiches B. Sie genügt in B der Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

und ist eine überall in B analytische Funktion von x und y.

Über die erste Eigenfunktion und den zugehörigen Eigenwert λ gelten die folgenden drei bekannten Hilfssätze[3]), von denen wir Gebrauch machen werden.

---

[2]) Stückweise analytisch soll eine Kurve heißen, wenn sie aus einer endlichen Anzahl von analytischen Kurvenstücken zusammengesetzt ist, die unter beliebigem Winkel aneinander stoßen dürfen. Die Voraussetzung stückweise analytischer Kurven hat mit dem Wesen der Sache nichts zu tun; sie wird nur der Einfachheit der Formulierung halber gemacht.

[3]) Vgl. H. A. Schwarz, Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, Acta soc. sc. Fennicae 15 (1885), S. 315 bis 362, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Berlin 1890, Bd. 1, S. 223—269 (S. 241—262). Um den Leser von anderer Literatur unabhängig zu machen, sei hier der Abriß eines einfachen Beweises gegeben: Man folgert zunächst aus der Definition des kleinsten Eigenwertes eines Gebietes sofort, daß er sich bei Vergrößerung dieses Gebietes im linearen Verhältnis a mit dem Faktor $\frac{1}{a^2}$ multipliziert. Ferner geht aus der Minimumseigenschaft hervor, daß der kleinste Eigenwert eines Gebietes kleiner ist als der eines jeden Teilgebietes. Ist nun B ein Gebiet mit der Randkurve C, B' ein benachbartes Gebiet mit der C hinreichend benachbarten Randkurve C', O ein beiden Gebieten gemeinsamer innerer Punkt, so unterwerfe man das Gebiet B einer Ähnlichkeitstransformation vom Punkte O aus mit dem kleinsten möglichen Faktor $1+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), so daß das entstehende Gebiet B'' das Gebiet B' als Teilgebiet enthält, sodann einer ebensolchen Transformation, mit dem Faktor $1-\delta$ ($\delta > 0$), bei der das entstehende Gebiet B''' ganz in B hineinfällt. Bei hinreichend genauer An-

Hilfssatz 1. Der kleinste Eigenwert λ eines Gebietes B ändert mit diesem stetig.

Hilfssatz 2. Die erste Eigenfunktion des Gebietes B ist im Innern von Null verschieden.

Hilfssatz 3. Der kleinste Eigenwert λ des Gebietes B ist ein ein- Eigenwert, d. h. es gibt nicht zwei abgesehen vom Vorzeichen ver- ene Funktionen u, u', für die $D(u) = \lambda$ und $D(u') = \lambda$ ist und die en oben gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Außer diesen Hilfssätzen werden wir noch die folgende Eigenschaft ifferentialgleichung $\Delta u + ku = 0$ benutzen:

Hilfssatz 4. Wenn eine Lösung u der Differentialgleichung $ku = 0$ bei konstantem k im Innern und auf dem Rande eines tes G mit einem geradlinigen Begrenzungsstück g stetig, im Innern und auf g (höchstens mit Ausnahme der Endpunkte dieser Strecke) ir ist und wenn die normale Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ dieser Lösung auf g ver- ndet, so läßt sich u in das aus G durch Spiegelung an g entstehende t G' analytisch fortsetzen, und zwar sind die Werte von u in den ten von G' gleich den Werten von u in den entsprechenden Punkten G.

Zum Beweise nehmen wir an, daß g in die x-Achse falle. Man er- zunächst unmittelbar, daß u in dem Gesamtgebiete $G + G'$ stetig nd stetige erste Ableitungen besitzt; denn sowohl $\frac{\partial u}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial u}{\partial y}$ n sich bei Annäherung an g von beiden Seiten denselben Werten. lbe gilt für $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und, da u offenbar sowohl in G, als in G' der rentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ku = 0$ genügt, auch für $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Es ist

---

ung von B' und B werden die Zahlen ε und δ beliebig klein. Der kleinste wert von B und ebenso der von B' liegt aber nach der zweiten der obigen Be- ngen zwischen dem von B'' und dem von B''', die Grenzen eingeschlossen, la die letzteren beiden sich nur durch den Faktor $\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\delta}\right)^2$ unterscheiden, also inreichend kleinem ε, δ um beliebig wenig, so ist der Hilfssatz 1 bewiesen. atz 2 folgt daraus, daß einerseits das Auftreten von Nullinien der ersten Eigen- ion in B zur Folge haben würde, daß diese Eigenfunktion auch erste Eigen- ion eines Teilgebietes von B sein müßte, was nach der obigen Bemerkung nicht ch ist, andererseits isolierte Nullstellen in B, wie sich leicht zeigen läßt, nicht mmen können. Hilfssatz 3 schließlich ergibt sich daraus, daß man aus zwei unabhängigen zum selben Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen stets eine dritte lineare Kombination bilden kann, die mit der ersten die bekannte Orthogo- tsbedingung erfüllt. Dies aber ist nur dann möglich, wenn eine der beiden tionen in B Nullinien besitzt, was zu Hilfssatz 2 im Widerspruch stände.

also u eine in $G + G'$ überall mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Lösung von $\Delta u + ku = 0$, womit die Behauptung des Hilfssatzes erwiesen ist.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Beweis des anfangs aufgestellten Satzes ohne Hindernis führen.

1. Minimalfolgen. Wir betrachten sämtliche von stückweise analytischen Kurven der Länge l begrenzten einfach zusammenhängenden Gebiete B der x-y-Ebene. Da ihre kleinsten Eigenwerte positiv sind, besitzen sie eine untere Schranke λ, d. h. es gibt eine Folge von stückweise analytischen doppelpunktlosen Kurven $C_1, C_2, C_3 \ldots$, die sämtlich die Länge l besitzen und deren zugehörige kleinsten Eigenwerte gegen λ konvergieren, während es keine solche Kurve der Länge l gibt, deren zugehöriger kleinster Eigenwert kleiner als λ ist. Eine solche Folge von Kurven, bzw. die zugehörige Folge von Gebieten soll eine „Minimalfolge" heißen. Man kann nun offenbar jede solche Kurve C mit beliebiger Genauigkeit durch ein Polygon von einer geraden Anzahl gleich langer Seiten mit der Gesamtlänge l approximieren. Denn bestimmt man auf einer solchen Kurve, von einem Punkte A in einem Sinne fortschreitend, nacheinander eine Folge von Punkten $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$, von denen jeder folgende vom vorhergehenden den gegebenen, hinreichend kleinen Abstand d besitzt, so kommt man nach einer endlichen Zahl von Schritten, etwa nach m Schritten, mit dem Punkt A_m dem Ausgangspunkt A zum ersten Male näher als $\frac{3}{2}d$. Je nachdem m gerade oder ungerade ist, schalte man nun zwischen A_m und A irgendwie zwei oder drei Strecken der Länge d ein und schließe so das Polygon $A A_1 A_2 A_3 \ldots$. Ist d hinreichend klein, so approximiert das Polygon die Kurve C mit beliebiger Genauigkeit, und dasselbe gilt, wenn das Polygon durch Ähnlichkeitstransformation auf die genaue Länge l gebracht wird.

Da nun nach Hilfssatz 1 der kleinste Eigenwert eines Gebietes sich mit dem Gebiete stetig ändert, so kann man zu jeder der Kurven C_n der Minimalfolge ein Polygon P_n mit einer geraden Anzahl gleich langer Seiten und der Gesamtlänge l finden, dessen kleinster Eigenwert sich von dem der Kurve C_n um weniger als $\frac{1}{n}$ unterscheidet. Diese Polygone bilden dann ebenfalls eine Minimalfolge.

2. Minimalpolygone. Die Aufgabe, ein Polygon von $2p$ gleichen Seiten der Gesamtlänge l zu bestimmen, dessen zugehöriger kleinster Eigenwert möglichst klein ist, muß notwendigerweise eine Lösung besitzen. Denn, da ein solches Polygon durch endlich viele Parameter eindeutig bestimmt ist und sich mit diesen stetig ändert, so ist nach Hilfssatz 1

einste Eigenwert eines solchen Polygons eine stetige Funktion endlich Parameter, besitzt also ein Minimum. Wir nennen jedes Polygon der setzten Art, welches das Minimum des kleinsten Eigenwertes liefert, nimalpolygon M_p. Diese Minimalpolygone wachsender gerader Seiten- bilden offenbar ebenfalls eine Minimalfolge. Das Ziel der folgenden gungen ist der Nachweis, daß diese Minimalpolygone gegen den vom Umfange l konvergieren.

. **Konvexität der Minimalpolygone.** Das Minimalpolygon M_p muß x sein. Hätte es nämlich einen einspringenden Winkel $A_1 A_2 A_3$, nnte man statt des Polygons M_p dasjenige M_p' betrachten, dessen mit Ausnahme von A_2 mit denen von M_p übereinstimmen, während rch seinen Spiegelpunkt in bezug auf die Gerade $A_1 A_3$ ersetzt ist. eue Polygon genügt ebenfalls den Bedingungen über Seitenzahl und . Da es das Polygon M_p als Teilgebiet enthält, so muß sein kleinster wert, wie bekannt[4]), kleiner sein als der von M_p, was nicht der ein darf. Mithin besitzt M_p keine einspringenden Ecken, ist also x.

. **Eine Eigenschaft der ersten Eigenfunktion für die Minimal- one.** Die Verbindungslinie zweier Ecken des Minimalpolygons M_p, en Umfang in zwei gleiche Teile teilt, soll Hauptdiagonale heißen. wollen wir zeigen, daß die normale Ableitung der ersten Eigen- on u von M_p auf jeder Hauptdiagonale verschwindet.

Es sei g eine solche Hauptdiagonale; sie möge in die x-Achse hinein- Die beiden Teile, in die M_p durch g zerlegt wird, heißen M_p' M_p''. Setzen wir

$$\left\{\begin{array}{ll} \iint\limits_{(M_p')} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = D', & \iint\limits_{(M_p'')} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = D'', \\ \iint\limits_{(M_p')} u^2 dx\,dy = J', & \iint\limits_{(M_p'')} u^2 dx\,dy = J'', \end{array}\right.$$

diese Integrale über die Bereiche M_p' bzw. M_p'' zu erstrecken sind, t

$$D' + D'' = \lambda_p (J' + J'') = \lambda_p,$$

λ_p der kleinste Eigenwert für M_p ist. Setzen wir ferner

$$D' = \lambda_p' J', \qquad D'' = \lambda_p'' J'',$$

d λ_p', λ_p'' zwei positive Zahlen, und es folgt aus der Gleichung

$$\lambda_p' J' + \lambda_p'' J'' = \lambda_p (J' + J''),$$

---

[4]) Vgl. Fußnote [3]).

in der nur positive Zahlen auftreten, daß die Zahlen λ_p' und λ_p'' nicht alle beide größer als λ_p sein können. Es sei also etwa λ_p' nicht größer als λ_p. Wir betrachten das Polygon $\overline{M}_p$, das entsteht, wenn zu M_p' das Spiegelbild M_p''' in bezug auf g hinzugefügt wird. Sei $\bar{u}$ die Funktion, die in M_p' mit u übereinstimmt, und deren Werte in den Punkten von M_p''' mit den Werten von u in den entsprechenden Punkten von M_p' identisch sind. Ferner sei v die erste Eigenfunktion von $\overline{M}_p$, $\bar{\lambda}_p$ der zugehörige Eigenwert. Dann ist erstens wegen (3), (5) und der Definition von $\bar{u}$

$$(7) \qquad \iint\limits_{(\overline{M}_p)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \lambda_p' \iint\limits_{(\overline{M}_p)} \bar{u}^2\,dx\,dy,$$

wobei, wie früher, der Index unter dem Integralzeichen das Integrationsgebiet bezeichnet. Ferner muß wegen der Grundeigenschaft der ersten Eigenfunktion v für $\overline{M}_p$ sein:

$$(8) \qquad \bar{\lambda}_p \leqq \lambda_p'.$$

Nun ist aber das Polygon $\overline{M}_p$ ebenfalls ein Polygon der Seitenzahl $2p$ mit der Gesamtlänge l und lauter gleich langen Seiten. Also folgt wegen der Minimaleigenschaft des Minimalpolygons M_p

$$\bar{\lambda}_p \geqq \lambda_p.$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung

$$\lambda_p' \leqq \lambda_p.$$

Es ergibt sich also wegen (8)

$$(9) \qquad \bar{\lambda}_p = \lambda_p' = \lambda_p.$$

Da nach Hilfssatz 3. die erste Eigenfunktion eines Gebietes einfach ist, so müssen $\bar{u}$ und v bis höchstens auf einen konstanten Faktor übereinstimmen. Wir können also setzen $\bar{u} = v$.

Da bei der Transformation

$$w(x, y) = v(x, -y)$$

aus v eine für $\overline{M}_p$ denselben Rand- und Stetigkeitsbedingungen wie v genügende Funktion w entsteht, für die ebenfalls ersichtlich

$$\iint\limits_{(\overline{M}_p)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \lambda_p \iint\limits_{(\overline{M}_p)} w^2\,dx\,dy$$

gilt, so folgt aus Hilfssatz 3 wiederum

$$v = w.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = -\left[\frac{\partial}{\partial \eta} v(x, \eta)\right]_{\eta = -y}.$$

Somit folgt für $y = 0$ die Beziehung

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

en $v = u$ in M_p' und der Stetigkeit der Ableitungen von u in M_p
t sich also auf g

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

gezeigt werden sollte.

5. Symmetrieeigenschaft der Minimalpolygone. Zwei aufeinander-
nde Hauptdiagonalen des Minimalpolygons M_p, die sich im Punkte O
eiden, definieren mit der Seite AA_1 des Polygons, von der sie aus-
n, ein Dreieck OAA_1, auf dessen einer Seite AA_1 die erste Eigen-
tion u verschwindet, während sie auf den beiden anderen Seiten OA
OA_1 verschwindende normale Ableitungen besitzt. Zufolge Hilfssatz 4
t sich nun der Gesamtverlauf der Funktion u durch Spiegelung
s Dreiecks an den letzteren beiden Seiten und durch Wiederholung
s Prozesses; dabei sind die Werte von u in zwei homologen Punkten
r kongruenten Dreiecke einander gleich. Die Spiegelbilder der Seite AA_1
en mit den Seiten des Polygons übereinstimmen. Denn würde etwa
erste Spiegelbild A_1A_2 innerhalb des Polygons fallen, so hieße dies,
u an Kurvenstücken im Innern von M_p verschwinden würde, im
erspruch zu Hilfssatz 2. Würde das Spiegelbild jedoch außerhalb M_p
n, so gäbe es eine durch das Innere des Dreiecks OA_1A_2 führende
de, nämlich eine Seite des Polygons M_p, auf der u verschwindet;
in gäbe es auch eine durch das Innere von OAA_1 führende Gerade,
Spiegelbild der vorigen an OA_1, auf der u verschwindet, und wir
n ebenfalls im Widerspruch zu Hilfssatz 2 zu dem Ergebnis geführt,
u im Innern von M_p Nullinien besäße.

Somit folgt, daß M_p aus $2p$ kongruenten Dreiecken besteht, die alle
n Eckpunkt O, den Mittelpunkt des Polygons, gemeinsam haben, und
denen je zwei zu der gemeinsamen Seite spiegelbildlich symmetrisch sind.

6. Ausführung des Grenzüberganges. Um die gestellte Aufgabe
h Grenzübergang zu lösen, brauchen wir keine weiteren Eigenschaften
Minimalpolygone M_p. Die vom Punkte O ausgehenden Seiten des
gons M_p mögen die Längen a_p bzw. b_p haben. Dann ist jedenfalls

$$|a_p - b_p| \leqq \frac{l}{2p}.$$

nehmen an, daß $a_p \geqq b_p$ ist. Daraus folgt, daß M_p dem Kreise mit
Radius a_p einbeschrieben ist. Andererseits muß M_p sämtliche inneren
kte des Kreises mit dem Radius $a_p - \frac{l}{2p}$ um O im Innern enthalten.

Wegen der Konvexität des Polygons und der beiden Kreise stehen die drei Kurvenlängen dieser Linien in der Beziehung

$$2\pi a_p > l > 2\pi\left(a_p - \frac{l}{2p}\right).$$

Mithin konvergieren mit wachsendem p die Zahlen a_p, b_p gegen einen Grenzwert

$$r = \frac{l}{2\pi},$$

die Minimalpolygone gegen den Kreis vom Radius r und Umfang l. Wegen der Stetigkeit des kleinsten Eigenwertes als Funktion des Gebietes ist der kleinste Eigenwert dieses Kreises gleich dem Grenzwert der kleinsten Eigenwerte der Minimalpolygone, d. h. gleich λ.

Der Kreis besitzt also den kleinsten möglichen Eigenwert aller Gebiete mit gleichem Umfang.

7. Eindeutigkeit der Lösung. Es bleibt noch zu zeigen, daß eine andere stückweise analytische Kurve des Umfanges l nicht denselben minimalen Eigenwert besitzen kann. Ist K eine solche Kurve, so muß sie der obigen Betrachtung unter **3.** zufolge konvex sein. Ist ferner g irgendeine Hauptdiagonale von K, d. h. eine Gerade, die den Umfang in zwei gleiche Teile teilt, so ergibt sich wörtlich wie oben unter **4.**, daß die normale Ableitung der zugehörigen ersten Eigenfunktion auf g verschwindet. Sind nun g und g' zwei im Winkel $\frac{\pi}{n}$ bei beliebigem n aneinanderstoßende Hauptdiagonalen, die sich im Punkte O schneiden, so folgt durch das Spiegelungsverfahren (siehe die Betrachtungen unter **5.**), daß das von K eingeschlossene Gebiet durch Aneinanderreihung von $2n$ Elementargebieten entsteht, die alle kongruent sind und aus zwei vom Schnittpunkt O im Winkel $\frac{\pi}{n}$ zueinander ausgehenden Strahlen sowie einem Stück der Begrenzung von K bestehen. Hieraus folgt, daß sämtliche von O zu einem Randpunkt führende Strahlen, die mit g einen Winkel $\frac{2h\pi}{n}$ bei beliebigem h und n einschließen, gleich lang sind. Wegen der Stetigkeit von K muß also K ein Kreis um den Punkt O sein.

Schlußbemerkung über die Differentialgleichung der schwingenden Platte. Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, daß die obigen Überlegungen sich ohne weiteres auf die Differentialgleichung der schwingenden Platte

$$\Delta\Delta u + \lambda u = 0$$

übertragen lassen, wobei als Randbedingung das Verschwinden von u und der normalen Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ gestellt wird. Es ergibt sich auch hier, daß bei gegebenem Umfang die kreisförmige Platte aus gegebenem Material den tiefsten Grundton besitzt.

(Eingegangen am 3. Februar 1918.)

twendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß eine nach ann integrierbare Funktion mit den Fourierschen Koeffizienten $\bar{a}_1, \ldots$ *existiert.*

3. Der letzte Satz enthält das Resultat, das ich beweisen wollte, ch habe nur noch einige kleinere Bemerkungen hinzuzufügen. Zu- bemerke ich, daß da stets $b_0 \leqq a_0 \leqq B_0$ ist, die Bedingung $b_0 = B^0$ 9 sich spalten läßt in die zwei Bedingungen

$$b_0 = a_0 \quad \text{und} \quad a_0 = B_0.$$

Was bedeutet nun jede dieser letzten Gleichungen, wenn man sie n nimmt?

Die Gleichung $b_0 = a_0$ sagt z. B. aus, daß unter den zu $f(x)$ äqui- ten Funktionen mindestens eine existiert, deren *unteres Darbouxsches ral* gleich dem Lebesgueschen ist, und die Gleichung $a_0 = B_0$ hat analoge Bedeutung. Es ist daher sehr leicht Funktionen anzugeben, welche $b_0 = a_0$ und $a_0 < B_0$ ist. Man betrachte z. B. auf dem valle

$$I: 0 < x < 2\pi$$

überall dicht liegende offene Punktmenge A, deren Inhalt gleich π und setze $f(x) = 1$ auf A und $f(x) = 0$ auf $I - A$. Es ist sehr einzusehen, daß man hier

$$b_0 = a_0 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_0 = 1$$

14. Zweitens möchte ich noch zeigen, wie man auch die übrigen rierschen Koeffizienten b_k, $\bar{b}_k$ der Funktion $\chi(x)$ ermitteln kann. dem § 11 ist die Funktion $\chi(x) - \psi_p(x)$ eine nicht negative Funk- deren Fouriersche Entwicklung mit $(b_0 - \varepsilon_p)$ beginnt. Man hat z. B. für jedes $j < p$

$$|b_j - (a_j - y_{pj})| \leqq 2(b_0 - \varepsilon_p)$$

wegen der Gleichung (16)

$$b_j = \lim_{p=\infty} (a_j - y_{pj})$$

ebenso findet man

$$\bar{b}_j = \lim_{p=\infty} (a_j - \bar{y}_{pj}).$$

Man kann sogar die b_j, $\bar{b}_j$ direkt aus den $y_{pk}(n)$, $\bar{y}_{pk}(n)$ berechnen, von dem Auswahlprinzip, das im § 10 benutzt worden ist, Gebrauch achen. Man kann nämlich die Teilfolge $n_1, n_2, \ldots$, die wir in diesem graphen benutzt haben, so bestimmen, daß für ein *festes* $j < p$

$$y_{pj} = \overline{\lim_{n=\infty}}\, y_{pj}(n)$$

ist; tut man dies für jedes $p > j$, so wird

$$b_j = a_j - \lim_{p=\infty} \overline{\lim_{n=\infty}} y_{pj}(n)$$

und diese letzte Gleichung gilt für jedes beliebige j.

15. Endlich möchte ich Sie darauf aufmerksam machen, daß ma mit ähnlichen Mitteln auch versuchen könnte zu untersuchen, ob unt den zu $f(x)$ äquivalenten Funktionen eine *stetige, periodische* Funktic existiert. Dazu müßte man statt der früheren trigonometrischen Polynom andere $\omega_p(x)$ und $\Omega_p(x)$ bestimmen, mit folgenden Eigenschaften:

$\omega_p(x)$ ist ein trigonometrisches Polynom p^{ter} Ordnung, das Unte funktion von $f(x)$ ist und für welches die obere Grenze der Differe $[\chi(x) - \omega_p(x)]$ möglichst klein ist. Das trigonometrische Polynom Ω_p (aber ist eine Oberfunktion von $f(x)$, für welches die obere Grenze d Differenz $[\Omega(x) - X(x)]$ möglichst klein ist. Setzt man dann

$$\alpha_p = \text{obere Grenze von } [\Omega_p(x) - \omega_p(x)],$$

so ist

$$\lim_{p=\infty} \alpha_p = 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß eine zu $f(x)$ äquivalente steti und periodische Funktion existiert. Man müßte diesen Gedanken aber e heblich weiterverfolgen, ehe er in bequeme algebraische Form erscheinen kan

Der § 12 unserer gemeinsamen Arbeit führt ebenfalls zu vielen inte essanten Anwendungen, z. B. zu notwendigen und hinreichenden B dingungen für die Summierbarkeit oder die Totalstetigkeit einer durch ih Fourierschen Koeffizienten gegebenen Funktion. Das sind aber Frage die ich heute nicht mehr berühren möchte.

Göttingen, den 23. März 1917.

(Eingegangen am 1. Februar 1918.)

Beweis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt.

Von

R. Courant in Göttingen (z. Z. im Heere).

In der vorliegenden Mitteilung soll der Satz bewiesen werden:

Unter allen ebenen Gebieten, die von einer stückweise analytischen Kurve gegebener Länge begrenzt sind, besitzt der Kreis und nur der Kreis den kleinsten möglichen Eigenwert für die Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

bei der Randbedingung $u = 0$.

Hierbei ist wie üblich

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

und x und y bezeichnen rechtwinklige Koordinaten in der Ebene der betrachteten Kurve.

Physikalisch besagt der Satz, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges bei gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt. Diese Tatsache ist eng mit dem von Lord Rayleigh aufgestellten, noch unbewiesenen Satze verwandt, bei dem nicht der Umfang, sondern der Flächeninhalt als gegeben betrachtet wird[1]). Der Beweis wird hier durch Überlegungen geführt werden, wie sie zuerst Steiner zur Lösung des isoperimetrischen Problems angewandt hat. Auf das eigentliche Problem von Rayleigh hoffe ich in einer späteren Mitteilung zurückkommen zu können.

Der kleinste Eigenwert λ eines einfach zusammenhängenden Bereiches B der x-y-Ebene für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ unter der Rand-

[1]) Lord Rayleigh, Theorie of sound, London und New York 1894, Vol. 1, Nr. 210, S. 340 ff.

bedingung $u = 0$ ist bekanntlich dadurch charakterisiert, daß er de kleinsten Wert darstellt, den das über den Bereich B erstreckte Integra

$$D(u) = \iint_{(B)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy \tag{1}$$

annehmen kann, wenn zum Vergleich alle auf dem Rande von B ve schwindenden Funktionen zugelassen werden, die in B mit Einschluß d Randes stetig sind, deren erste Ableitungen bis auf erlaubte endlich Sprünge an endlich vielen analytischen Kurvenstücken im Innern von ebenfalls stetig sind, und für die endlich das über den Bereich B e streckte Integral

$$J(u) = \iint_{(B)} u^2\,dx\,dy \tag{2}$$

den Wert 1 besitzt. Über den Bereich B soll vorausgesetzt werden, d er von einer stückweise analytischen[2]) Randkurve begrenzt wird. D Funktion u, für die das Minimum erreicht wird, heißt die erste Eige funktion des Bereiches B. Sie genügt in B der Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

und ist eine überall in B analytische Funktion von x und y.

Über die erste Eigenfunktion und den zugehörigen Eigenwert λ gelt die folgenden drei bekannten Hilfssätze[3]), von denen wir Gebrauch mach werden.

---

[2]) Stückweise analytisch soll eine Kurve heißen, wenn sie aus einer endlich Anzahl von analytischen Kurvenstücken zusammengesetzt ist, die unter beliebig Winkel aneinander stoßen dürfen. Die Voraussetzung stückweise analytischer Kurv hat mit dem Wesen der Sache nichts zu tun; sie wird nur der Einfachheit der F mulierung halber gemacht.

[3]) Vgl. H. A. Schwarz, Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts treffendes Problem der Variationsrechnung, Acta soc. sc. Fennicae 15 (1885), S. 3 bis 362, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Berlin 1890, Bd. 1, S. 223—2 (S. 241—262). Um den Leser von anderer Literatur unabhängig zu machen, sei h der Abriß eines einfachen Beweises gegeben: Man folgert zunächst aus der Definiti des kleinsten Eigenwertes eines Gebietes sofort, daß er sich bei Vergrößerung die Gebietes im linearen Verhältnis a mit dem Faktor $\frac{1}{a^2}$ multipliziert. Ferner geht der Minimumseigenschaft hervor, daß der kleinste Eigenwert eines Gebietes klei ist als der eines jeden Teilgebietes. Ist nun B ein Gebiet mit der Randkurve B' ein benachbartes Gebiet mit der C hinreichend benachbarten Randkurve C', O beiden Gebieten gemeinsamer innerer Punkt, so unterwerfe man das Gebiet B ei Ähnlichkeitstransformation vom Punkte O aus mit dem kleinsten möglichen Fak $1+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), so daß das entstehende Gebiet B'' das Gebiet B' als Teilgebiet e hält, sodann einer ebensolchen Transformation, mit dem Faktor $1-\delta$ ($\delta > 0$), der das entstehende Gebiet B''' ganz in B hineinfällt. Bei hinreichend genauer

Hilfssatz 1. Der kleinste Eigenwert λ eines Gebietes B ändert ch mit diesem stetig.

Hilfssatz 2. Die erste Eigenfunktion des Gebietes B ist im Innern on B von Null verschieden.

Hilfssatz 3. Der kleinste Eigenwert λ des Gebietes B ist ein ein- cher Eigenwert, d. h. es gibt nicht zwei abgesehen vom Vorzeichen ver- chiedene Funktionen u, u', für die $D(u) = \lambda$ und $D(u') = \lambda$ ist und die brigen oben gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Außer diesen Hilfssätzen werden wir noch die folgende Eigenschaft er Differentialgleichung $\Delta u + ku = 0$ benutzen:

Hilfssatz 4. Wenn eine Lösung u der Differentialgleichung $u + ku = 0$ bei konstantem k im Innern und auf dem Rande eines ebietes G mit einem geradlinigen Begrenzungsstück g stetig, im Innern on G und auf g (höchstens mit Ausnahme der Endpunkte dieser Strecke) egulär ist und wenn die normale Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ dieser Lösung auf g ver- chwindet, so läßt sich u in das aus G durch Spiegelung an g entstehende ebiet G' analytisch fortsetzen, und zwar sind die Werte von u in den unkten von G' gleich den Werten von u in den entsprechenden Punkten on G.

Zum Beweise nehmen wir an, daß g in die x-Achse falle. Man er- ennt zunächst unmittelbar, daß u in dem Gesamtgebiete $G + G'$ stetig st und stetige erste Ableitungen besitzt; denn sowohl $\frac{\partial u}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial u}{\partial y}$ nähern sich bei Annäherung an g von beiden Seiten denselben Werten. Dasselbe gilt für $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und, da u offenbar sowohl in G, als in G' der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ku = 0$ genügt, auch für $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Es ist

---

näherung von B' und B werden die Zahlen ε und δ beliebig klein. Der kleinste Eigenwert von B und ebenso der von B' liegt aber nach der zweiten der obigen Bemerkungen zwischen dem von B'' und dem von B''', die Grenzen eingeschlossen, und da die letzteren beiden sich nur durch den Faktor $\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\delta}\right)^2$ unterscheiden, also bei hinreichend kleinem ε, δ um beliebig wenig, so ist der Hilfssatz 1 bewiesen. Hilfssatz 2 folgt daraus, daß einerseits das Auftreten von Nullinien der ersten Eigenfunktion in B zur Folge haben würde, daß diese Eigenfunktion auch erste Eigenfunktion eines Teilgebietes von B sein müßte, was nach der obigen Bemerkung nicht möglich ist, andererseits isolierte Nullstellen in B, wie sich leicht zeigen läßt, nicht vorkommen können. Hilfssatz 3 schließlich ergibt sich daraus, daß man aus zwei linear unabhängigen zum selben Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen stets eine dritte durch lineare Kombination bilden kann, die mit der ersten die bekannte Orthogonalitätsbedingung erfüllt. Dies aber ist nur dann möglich, wenn eine der beiden Funktionen in B Nullinien besitzt, was zu Hilfssatz 2 im Widerspruch stände.

also u eine in $G + G'$ überall mit stetigen ersten und zweiten A leitungen versehene Lösung von $\Delta u + ku = 0$, womit die Behauptu des Hilfssatzes erwiesen ist.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Beweis des anfangs a gestellten Satzes ohne Hindernis führen.

1. Minimalfolgen. Wir betrachten sämtliche von stückweise ana tischen Kurven der Länge l begrenzten einfach zusammenhängenden G biete B der x-y-Ebene. Da ihre kleinsten Eigenwerte positiv sin besitzen sie eine untere Schranke λ, d. h. es gibt eine Folge von stü weise analytischen doppelpunktlosen Kurven $C_1, C_2, C_3 \ldots$, die sämtli die Länge l besitzen und deren zugehörige kleinsten Eigenwerte gegen konvergieren, während es keine solche Kurve der Länge l gibt, der zugehöriger kleinster Eigenwert kleiner als λ ist. Eine solche Folge v Kurven, bzw. die zugehörige Folge von Gebieten soll eine „Minim folge" heißen. Man kann nun offenbar jede solche Kurve C mit b liebiger Genauigkeit durch ein Polygon von einer geraden Anzahl glei langer Seiten mit der Gesamtlänge l approximieren. Denn bestim man auf einer solchen Kurve, von einem Punkte A in einem Sinne fo schreitend, nacheinander eine Folge von Punkten $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$ von denen jeder folgende vom vorhergehenden den gegebenen, hinreiche kleinen Abstand d besitzt, so kommt man nach einer endlichen Zahl v Schritten, etwa nach m Schritten, mit dem Punkt A_m dem Ausgangspunkt zum ersten Male näher als $\frac{3}{2}d$. Je nachdem m gerade oder ungerade i schalte man nun zwischen A_m und A irgendwie zwei oder drei Strecken d Länge d ein und schließe so das Polygon $A A_1 A_2 A_3 \ldots$. Ist d hi reichend klein, so approximiert das Polygon die Kurve C mit beliebig Genauigkeit, und dasselbe gilt, wenn das Polygon durch Ähnlichkeitstra formation auf die genaue Länge l gebracht wird.

Da nun nach Hilfssatz 1 der kleinste Eigenwert eines Gebietes si mit dem Gebiete stetig ändert, so kann man zu jeder der Kurven C_n d Minimalfolge ein Polygon P_n mit einer geraden Anzahl gleich lang Seiten und der Gesamtlänge l finden, dessen kleinster Eigenwert sich v dem der Kurve C_n um weniger als $\frac{1}{n}$ unterscheidet. Diese Polygo bilden dann ebenfalls eine Minimalfolge.

2. Minimalpolygone. Die Aufgabe, ein Polygon von $2p$ gleich Seiten der Gesamtlänge l zu bestimmen, dessen zugehöriger kleinster Eige wert möglichst klein ist, muß notwendigerweise eine Lösung besitze Denn, da ein solches Polygon durch endlich viele Parameter eindeut bestimmt ist und sich mit diesen stetig ändert, so ist nach Hilfssatz

r kleinste Eigenwert eines solchen Polygons eine stetige Funktion endlich eler Parameter, besitzt also ein Minimum. Wir nennen jedes Polygon der stgesetzten Art, welches das Minimum des kleinsten Eigenwertes liefert, n Minimalpolygon M_p. Diese Minimalpolygone wachsender gerader Seitenhl bilden offenbar ebenfalls eine Minimalfolge. Das Ziel der folgenden berlegungen ist der Nachweis, daß diese Minimalpolygone gegen den reis vom Umfange l konvergieren.

3. Konvexität der Minimalpolygone. Das Minimalpolygon M_p muß onvex sein. Hätte es nämlich einen einspringenden Winkel $A_1 A_2 A_3$, könnte man statt des Polygons M_p dasjenige M_p' betrachten, dessen cken mit Ausnahme von A_2 mit denen von M_p übereinstimmen, während $_2$ durch seinen Spiegelpunkt in bezug auf die Gerade $A_1 A_3$ ersetzt ist. as neue Polygon genügt ebenfalls den Bedingungen über Seitenzahl und änge. Da es das Polygon M_p als Teilgebiet enthält, so muß sein kleinster igenwert, wie bekannt[4]), kleiner sein als der von M_p, was nicht der all sein darf. Mithin besitzt M_p keine einspringenden Ecken, ist also onvex.

4. Eine Eigenschaft der ersten Eigenfunktion für die Minimalolygone. Die Verbindungslinie zweier Ecken des Minimalpolygons M_p, ie den Umfang in zwei gleiche Teile teilt, soll Hauptdiagonale heißen. ann wollen wir zeigen, daß die normale Ableitung der ersten Eigenunktion u von M_p auf jeder Hauptdiagonale verschwindet.

Es sei g eine solche Hauptdiagonale; sie möge in die x-Achse hineinllen. Die beiden Teile, in die M_p durch g zerlegt wird, heißen M_p' nd M_p''. Setzen wir

$$3) \quad \begin{cases} \iint\limits_{(M_p')} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = D', \quad \iint\limits_{(M_p'')} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = D'', \\ \iint\limits_{(M_p')} u^2 dx\,dy = J', \qquad \iint\limits_{(M_p'')} u^2 dx\,dy = J'', \end{cases}$$

obei diese Integrale über die Bereiche M_p' bzw. M_p'' zu erstrecken sind, gilt

$$4) \qquad D' + D'' = \lambda_p (J' + J'') = \lambda_p,$$

obei λ_p der kleinste Eigenwert für M_p ist. Setzen wir ferner

$$5) \qquad D' = \lambda_p' J', \qquad D'' = \lambda_p'' J'',$$

sind λ_p', λ_p'' zwei positive Zahlen, und es folgt aus der Gleichung

$$6) \qquad \lambda_p' J' + \lambda_p'' J'' = \lambda_p (J' + J''),$$

[4]) Vgl. Fußnote [3]).

in der nur positive Zahlen auftreten, daß die Zahlen λ_p' und λ_p'' nicht a
beide größer als λ_p sein können. Es sei also etwa λ_p' nicht größer als
Wir betrachten das Polygon $\overline{M}_p$, das entsteht, wenn zu M_p' das Spieg
bild M_p''' in bezug auf g hinzugefügt wird. Sei $\bar{u}$ die Funktion, die
M_p' mit u übereinstimmt, und deren Werte in den Punkten von M_p''' m
den Werten von u in den entsprechenden Punkten von M_p' identis
sind. Ferner sei v die erste Eigenfunktion von $\overline{M}_p$, $\bar{\lambda}_p$ der zugehör
Eigenwert. Dann ist erstens wegen (3), (5) und der Definition von

$$(7) \qquad \iint\limits_{(\overline{M}_p)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \lambda_p' \iint\limits_{(\overline{M}_p)} \bar{u}^2\,dx\,dy,$$

wobei, wie früher, der Index unter dem Integralzeichen das Integratio
gebiet bezeichnet. Ferner muß wegen der Grundeigenschaft der erst
Eigenfunktion v für $\overline{M}_p$ sein:

$$(8) \qquad \bar{\lambda}_p \leqq \lambda_p'.$$

Nun ist aber das Polygon $\overline{M}_p$ ebenfalls ein Polygon der Seitenzahl
mit der Gesamtlänge l und lauter gleich langen Seiten. Also folgt we
der Minimaleigenschaft des Minimalpolygons M_p

$$\bar{\lambda}_p \geqq \lambda_p.$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung

$$\lambda_p' \leqq \lambda_p.$$

Es ergibt sich also wegen (8)

$$(9) \qquad \bar{\lambda}_p = \lambda_p' = \lambda_p.$$

Da nach Hilfssatz 3. die erste Eigenfunktion eines Gebietes einf
ist, so müssen $\bar{u}$ und v bis höchstens auf einen konstanten Faktor übere
stimmen. Wir können also setzen $\bar{u} = v$.

Da bei der Transformation

$$w(x, y) = v(x, -y)$$

aus v eine für $\overline{M}_p$ denselben Rand- und Stetigkeitsbedingungen wie v
nügende Funktion w entsteht, für die ebenfalls ersichtlich

$$\iint\limits_{(\overline{M}_p)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \lambda_p \iint\limits_{(\overline{M}_p)} w^2\,dx\,dy$$

gilt, so folgt aus Hilfssatz 3 wiederum

$$v = w.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = -\left[\frac{\partial}{\partial \eta} v(x, \eta)\right]_{\eta = -y}.$$

Somit folgt für $y = 0$ die Beziehung

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Wegen $v = u$ in M_p' und der Stetigkeit der Ableitungen von u in M_p ergibt sich also auf g

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

wie gezeigt werden sollte.

5. Symmetrieeigenschaft der Minimalpolygone. Zwei aufeinanderfolgende Hauptdiagonalen des Minimalpolygons M_p, die sich im Punkte O schneiden, definieren mit der Seite AA_1 des Polygons, von der sie ausgehen, ein Dreieck OAA_1, auf dessen einer Seite AA_1 die erste Eigenfunktion u verschwindet, während sie auf den beiden anderen Seiten OA und OA_1 verschwindende normale Ableitungen besitzt. Zufolge Hilfssatz 4 ergibt sich nun der Gesamtverlauf der Funktion u durch Spiegelung dieses Dreiecks an den letzteren beiden Seiten und durch Wiederholung dieses Prozesses; dabei sind die Werte von u in zwei homologen Punkten dieser kongruenten Dreiecke einander gleich. Die Spiegelbilder der Seite AA_1 müssen mit den Seiten des Polygons übereinstimmen. Denn würde etwa das erste Spiegelbild A_1A_2 innerhalb des Polygons fallen, so hieße dies, daß u an Kurvenstücken im Innern von M_p verschwinden würde, im Widerspruch zu Hilfssatz 2. Würde das Spiegelbild jedoch außerhalb M_p fallen, so gäbe es eine durch das Innere des Dreiecks OA_1A_2 führende Gerade, nämlich eine Seite des Polygons M_p, auf der u verschwindet; mithin gäbe es auch eine durch das Innere von OAA_1 führende Gerade, das Spiegelbild der vorigen an OA_1, auf der u verschwindet, und wir wären ebenfalls im Widerspruch zu Hilfssatz 2 zu dem Ergebnis geführt, daß u im Innern von M_p Nullinien besäße.

Somit folgt, daß M_p aus $2p$ kongruenten Dreiecken besteht, die alle einen Eckpunkt O, den Mittelpunkt des Polygons, gemeinsam haben, und von denen je zwei zu der gemeinsamen Seite spiegelbildlich symmetrisch sind.

6. Ausführung des Grenzüberganges. Um die gestellte Aufgabe durch Grenzübergang zu lösen, brauchen wir keine weiteren Eigenschaften der Minimalpolygone M_p. Die vom Punkte O ausgehenden Seiten des Polygons M_p mögen die Längen a_p bzw. b_p haben. Dann ist jedenfalls

$$|a_p - b_p| \leqq \frac{l}{2p}.$$

Wir nehmen an, daß $a_p \geqq b_p$ ist. Daraus folgt, daß M_p dem Kreise mit dem Radius a_p einbeschrieben ist. Andererseits muß M_p sämtliche inneren Punkte des Kreises mit dem Radius $a_p - \frac{l}{2p}$ um O im Innern enthalten.

Wegen der Konvexität des Polygons und der beiden Kreise stehen die drei Kurvenlängen dieser Linien in der Beziehung

$$2\pi a_p > l > 2\pi\left(a_p - \frac{l}{2p}\right).$$

Mithin konvergieren mit wachsendem p die Zahlen a_p, b_p gegen einen Grenzwert

$$r = \frac{l}{2\pi},$$

die Minimalpolygone gegen den Kreis vom Radius r und Umfang l. Wegen der Stetigkeit des kleinsten Eigenwertes als Funktion des Gebietes ist der kleinste Eigenwert dieses Kreises gleich dem Grenzwert der kleinsten Eigenwerte der Minimalpolygone, d. h. gleich λ.

Der Kreis besitzt also den kleinsten möglichen Eigenwert aller Gebiete mit gleichem Umfang.

7. Eindeutigkeit der Lösung. Es bleibt noch zu zeigen, daß eine andere stückweise analytische Kurve des Umfanges l nicht denselben minimalen Eigenwert besitzen kann. Ist K eine solche Kurve, so muß sie der obigen Betrachtung unter **3.** zufolge konvex sein. Ist ferner g irgendeine Hauptdiagonale von K, d. h. eine Gerade, die den Umfang in zwei gleiche Teile teilt, so ergibt sich wörtlich wie oben unter **4.**, daß die normale Ableitung der zugehörigen ersten Eigenfunktion auf g verschwindet. Sind nun g und g' zwei im Winkel $\frac{\pi}{n}$ bei beliebigem n aneinanderstoßende Hauptdiagonalen, die sich im Punkte O schneiden, so folgt durch das Spiegelungsverfahren (siehe die Betrachtungen unter **5.**), daß das von K eingeschlossene Gebiet durch Aneinanderreihung von $2n$ Elementargebieten entsteht, die alle kongruent sind und aus zwei vom Schnittpunkt O im Winkel $\frac{\pi}{n}$ zueinander ausgehenden Strahlen sowie einem Stück der Begrenzung von K bestehen. Hieraus folgt, daß sämtliche von O zu einem Randpunkt führende Strahlen, die mit g einen Winkel $\frac{2h\pi}{n}$ bei beliebigem h und n einschließen, gleich lang sind. Wegen der Stetigkeit von K muß also K ein Kreis um den Punkt O sein.

Schlußbemerkung über die Differentialgleichung der schwingenden Platte. Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, daß die obigen Überlegungen sich ohne weiteres auf die Differentialgleichung der schwingenden Platte

$$\Delta\Delta u + \lambda u = 0$$

übertragen lassen, wobei als Randbedingung das Verschwinden von u und der normalen Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ gestellt wird. Es ergibt sich auch hier, daß bei gegebenem Umfang die kreisförmige Platte aus gegebenem Material den tiefsten Grundton besitzt.

(Eingegangen am 3. Februar 1918.)

Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs.

Von

Artur Winternitz in Prag.

Bei wenigen geometrischen Sätzen ist der Gegensatz zwischen der Anschaulichkeit des Inhalts und der Schwierigkeit des Beweises ein so großer, wie bei der Behauptung, daß eine einfache, geschlossene stetige Kurve in der Ebene zwei Gebiete bestimmt, deren gemeinsame Grenze sie ist. Der erste, welcher sie genau formuliert und einen im wesentlichen richtigen Beweis gegeben hat, war C. Jordan[1]), dessen Namen der Satz heither trägt. Das von ihm angewandte Beweisverfahren beruht auf der Möglichkeit, die Kurve durch Folgen von einfachen Polygonen zu approximieren. Für diese wird der Satz als bekannt angenommen. So naturgemäß auch dieser Gedanke ist, so hat sich doch seine vollständige Durchführung als so umständlich erwiesen, daß der Wunsch entstand, den Beweis auf prinzipiell andere und einfachere Grundlage zu stellen. Dies geschah namentlich in der Arbeit, welche L. E. J. Brouwer im 69. Bande der Mathematischen Annalen im Jahre 1910 veröffentlicht hat. Auch in ihr wird der Polygonsatz benutzt, aber nicht zu einem Approximationsverfahren, vielmehr in einer mehr topologischen Weise. Auch wir werden ähnlich verfahren.

Die Grundlage des neuen Beweises bildet die Erkenntnis, daß sich die Unterscheidung der beiden Seiten einer Jordankurve in äußerst einfacher Weise mit Hilfe von Jordanbogen vornehmen läßt (IV 3), wodurch die Zurückführung des Jordanschen Kurvensatzes auf den Satz vom Jordanbogen gelingt, auf die Aussage nämlich, daß ein einfacher stetiger Kurvenbogen die Ebene nicht zerschneidet. Mein Beweis für diesen Satz steht teilweise dem Gedankengang von § 4 der Brouwerschen Arbeit nahe. Die Polygonsätze, welche auch für uns ein wesentliches Hilfsmittel bilden,

[1]) Vgl. Cours d'analyse, Paris 1887, Bd. 3, S. 587; zweite Auflage (1893), Bd. 1, S. 90.

habe ich an die Spitze gestellt und bin auch auf ihren Beweis eingegange um keinen Zweifel an der Einfachheit desselben zu lassen. Dieser Teil (geht im wesentlichen auf Untersuchungen von Hans Hahn zurück[2] In II sind einige bekannte, einfache Sätze über Kontinua der Vollständigke halber auseinandergesetzt, in III wird der Satz vom Jordanbogen ur der Jordansche Kurvensatz für eine teilweise geradlinige Jordankurv in IV der Jordansche Kurvensatz allgemein bewiesen. Daran schlie sich in V eine einfache Kennzeichnung des Zweidimensionalen gegenüb dem Mehr-als-zwei-dimensionalen. In VI werden dann allgemeinere G bietsteilungssätze im Sinne unserer Methode behandelt und damit ei einfache Begründung der Riemannschen Zusammenhangstheorie eben Gebiete gegeben.

I. Streckenzüge und Polygone.

Wir beginnen damit, daß wir die elementargeometrischen Spezialfäl der Sätze vom Jordanbogen und von der (geschlossenen) Jordankurv beweisen. Dazu brauchen wir nur jene einfachen Verknüpfungs- ur Anordnungssätze der ebenen Geometrie, wie sie etwa in den Axiome I 1—3, II von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* zusammengestel sind, beziehungsweise unmittelbar aus ihnen fließen; namentlich den Sat daß eine Gerade die Ebene in zwei Gebiete zerlegt (zwei Seiten hat eine Eigenschaft, welche auch einer „geknickten Geraden" zukommt, d heißt einer aus zwei von demselben Punkt ausgehenden Halbstrahl gebildeten Figur.

Einen außerhalb eines (einfachen)[3] Streckenzuges $\mathfrak{S}$ gelegen Punkt A kann man mit demselben auf folgende Art verbinden. Ma zieht von A aus einen Weg nach einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{S}$ u bestimmt auf ihm jene Stelle M, wo er $\mathfrak{S}$ zum erstenmal trifft. W nennen M die Mündung dieses Weges und bezeichnen das Stück A desselben als einen Weg von A bis $\mathfrak{S}$. Mündung eines Weges von bis $\mathfrak{S}$ kann jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ sein. Man kann nämlich die Mündu nach folgendem Verfahren schrittweise weiterverlegen. Sei RM die letz Strecke des Weges AM und PM, MQ zwei aufeinanderfolgende gera linige Strecken auf $\mathfrak{S}$. Will man die Mündung von M nach Q verlege so prüfe man zunächst, ob die Strecke RQ den Halbstrahl von M über trifft. Ist dies nicht der Fall, so bestimme man auf RM einen Punkt

[2]) „Über die Anordnungssätze der Geometrie", Monatshefte der Math. u Physik. 19 (1908), S. 289—303.

[3]) Den Zusatz „einfach" bei Streckenzügen und Polygonen lassen wir i folgenden fort, da hier nur von solchen die Rede ist. Auch die Ausdrücke „We und „Verbindung" bedeuten in I. einfache Streckenzüge.

o nahe an M, daß das Dreieck $R'MQ$ gänzlich (M und Q nötigenfalls usgenommen) frei von den (nur in endlicher Anzahl vorhandenen) Eck- nd Endpunkten von $\mathfrak{S}$ ist und ersetze $R'M$ durch $R'Q$. Im anderen 'alle aber verlängere man PM über M hinaus um eine Strecke, welche $\mathfrak{S}$ nicht mehr trifft und wähle auf ihr R'' so, daß das Dreieck $R''MQ$ bis auf M und allenfalls Q) frei von Eck- und Endpunkten von $\mathfrak{S}$ ist nd dann R' auf RM so, daß dasselbe auch vom Dreieck RMR'' (bis uf M) gilt und ersetze schließlich $R'M$ durch $R'R''Q$.

Nun können wir den einfachsten unserer Sätze schon ohne weiteres eweisen: *Ein einfacher Streckenzug zerlegt die Ebene nicht, oder: je wei außerhalb des Streckenzuges $\mathfrak{S}$ gelegene Punkte A und B lassen ich durch einen $\mathfrak{S}$ nicht treffenden Weg miteinander verbinden.* In der 'at braucht man nur $\mathfrak{S}$ ein wenig über ein Ende hinaus zu verlängern nd von A und B aus in die Verlängerung einmündende Wege zu ziehen.

Nun zu den Polygonen! Ein solches ($\mathfrak{P}$) besteht aus einer Strecke PQ und einem Streckenzug $\mathfrak{S}$, welche nur die Endpunkte gemein haben. Einen nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkt A kann man nach dem eben bewiesenen Satze derart mit $\mathfrak{P}$ verbinden, daß die Mündung auf der Strecke PQ liegt. Machen wir dasselbe mit einem zweiten, nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte B, o können wir entscheiden, ob die Einmündung auf PQ von derselben Seite her erfolgt oder nicht, d. h. ob die letzten Strecken auf derselben Seite der Geraden PQ liegen oder nicht. Im ersten Falle sieht man ofort, auf welche Weise man zu einem A und B verbindenden Weg elangt, der $\mathfrak{P}$ nicht trifft. Wie aber steht es im zweiten Falle? Daß r tatsächlich eintritt, sieht man an den Endpunkten I, A einer PQ durchkreuzenden Strecke, welche $\mathfrak{S}$ nicht trifft. Wir stellen nun folgende Überlegung an: Zieht man von einem nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte C us zwei Halbstrahlen, so bilden sie zusammen eine „geknickte Gerade“ γ. Durchläuft man das Polygon von einem seiner (nicht auf γ liegenden) Punkte aus, so bleibt man entweder auf einer Seite von γ oder man eht abwechselnd von der einen Seite auf die andere und kehrt schließ- ich auf jene zurück, von der man ausgegangen ist. Daher muß eine erade Anzahl von Durchsetzungen vorhanden sein. Eine Durchsetzung esteht darin, daß der Weg in einen der Halbstrahlen mündet und ann entweder unmittelbar oder nach Durchlaufen einer Strecke längs esselben auf die andere Seite geht. Hiernach ist klar: entweder ragen alle von C ausgehenden Halbstrahlen eine gerade oder alle ine ungerade Anzahl von Durchsetzungen. Im ersten Falle wollen wir lem Punkte C die Marke a, im zweiten die Marke i erteilen. Dadurch st die Markenverteilung für alle nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte eindeutig lefiniert. Zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke $\mathfrak{P}$ nicht trifft, erhalten

offenbar dieselbe Marke (ihre Verbindungsgerade trägt eine gerade Anzahl von Durchsetzungen). Das gleiche gilt für je zwei Punkte, die durch einen $\mathfrak{P}$ nicht treffenden Streckenweg verbunden werden können. Die Punkte I und A hingegen müssen offenbar verschiedene Marken erhalten und sind also durch $\mathfrak{P}$ getrennt. Wir haben bewiesen, *daß das Polygon wirklich zwei Gebiete bestimmt.* (Die Marke i kennzeichnet das Innere, a das Äußere; das zweite enthält Halbstrahlen, das erste nicht.)

II. Hilfssätze über Kontinua.

Bevor wir uns mit dem Studium allgemeiner Jordanbogen und Jordankurven näher befassen, erledigen wir zwei Hilfssätze, welche wir gleich für Kontinua aussprechen, obwohl wir sie zunächst nur für Jordanbogen brauchen. Unter einem Kontinuum verstehen wir eine beschränkte[*]) zusammenhängende, abgeschlossene Punktmenge; eine solche beschränkte Punktmenge also, welche auf keine Weise als aus zwei fremden (nicht leeren), abgeschlossenen Teilmengen bestehend, aufgefaßt werden kann.

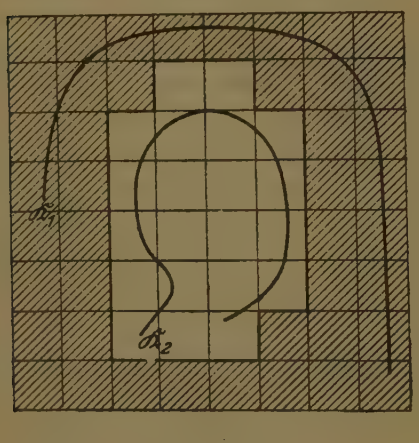

Fig. 1.

1. *Zwei fremde Kontinua lassen sich durch ein Polygon trennen.* Zwei fremde Kontinua $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ haben voneinander einen positiven Abstand d. Um ein Polygon herzustellen, welches sie voneinander trennt, verfahre man folgendermaßen. Zunächst schließe man beide zusammen in ein Quadrat ein (Seitenlänge a), welches von $\mathfrak{K}_2$ um mehr als d entfernt ist und zerlege es durch zu den Seiten parallele Geraden in n^2 kongruente Teilquadrate von solcher Kleinheit, daß niemals Punkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zugleich in demselben Quadrat vorkommen; man erreicht dies, indem man $n > \frac{a\sqrt{2}}{d}$ annimmt.

Sodann reihe man von einem Teilquadrat, welches einen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ enthält, ausgehend, durch wiederholten Übergang von einem Quadrat zu einem benachbarten — welches von einem beliebigen der erreichten Quadrate aus, aber immer nur durch Überschreiten einer Seite erfolgen darf —, Quadrate aneinander, welche einschließlich des Randes frei von $\mathfrak{K}_2$ sind, solange es geht; die erhaltenen Quadrate mache man et

[*]) Die Beschränktheit nehmen wir der Bequemlichkeit halber zur Definition

urch Schraffieren kenntlich. Dann ist man in der Lage, ein Trennungs-olygon anzugeben. Beim Schraffieren ist man jedenfalls auf Seiten stoßen, welche man nicht überschreiten durfte, weil jenseits schon $\mathfrak{K}_2$ liegt. Sei $\alpha\beta$ eine solche, links von ihr ein schraffiertes, rechts ein cht schraffiertes Quadrat (in welches $\mathfrak{K}_2$ hineinragt). Dann stoßen och zwei andere Quadrate in β an, nsichtlich deren zunächst die in ig. 2 angedeuteten Möglichkeiten -4 bestehen; 4 scheidet aber sofort us. Denn die beiden gegenüberlie-enden schraffierten Quadrate müßten urch einen Zug seitenweise aneinan-erstoßender schraffierter Quadrate rbunden sein und die beiden ande-n, welche Punkte von $\mathfrak{K}_2$ enthalten, ären durch ein Polygon getrennt, elches $\mathfrak{K}_2$ nicht trifft. Die Punkte on $\mathfrak{K}_2$, welche auf der einen Seite des-lben, und die, welche auf der ande-n liegen, wären zwei fremde, abge-hlossene Teilmengen von $\mathfrak{K}_2$, welches och ein Kontinuum sein sollte. Dar-

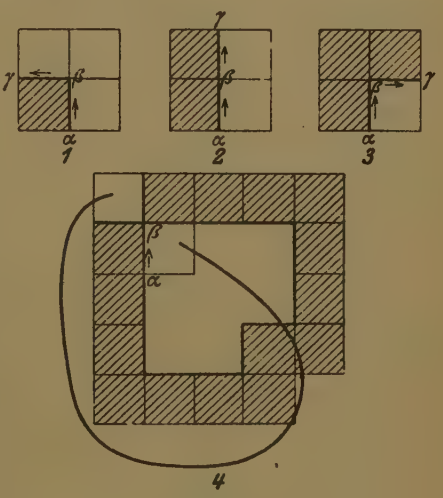

Fig. 2.

us ist zu entnehmen, daß sich an jede Grenzseite $\alpha\beta$ immer eine zweite γ in eindeutig bestimmter Weise anschließt. Da nur endlichviele solche eiten zur Verfügung stehen, müssen sie sich zu einem Polygon schließen, nd dieses trennt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. (Die eine Seite ist schraffiert, die andere icht. Vgl. Fig. 1.)

2. *Zwei fremde Kontinua lassen sich durch einen Jordanbogen miteinander „verbinden“.*

Zwei fremde Kontinua $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ können zunächst durch einen Jordan-ogen (das ein-eindeutige, stetige Abbild einer Strecke) miteinander verbun-en werden, indem man einen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ zum Anfangs-, einen Punkt von $\mathfrak{K}_2$ zum Endpunkt des Bogens macht. Es gibt dann (nach Bolzano) uf ihm eine Stelle, wo er $\mathfrak{K}_1$ zuletzt verläßt, und später eine erste, wo r in $\mathfrak{K}_2$ eintritt. Das dazwischenliegende Stück ist es, welches wir als ine „Verbindung“ zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ bezeichnen wollen. Eine Verbindung wischen einem Punkt P und einem Kontinuum $\mathfrak{K}$ nennen wir auch einen Weg von P bis $\mathfrak{K}$, den zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Endpunkt: die Mündung desselben n $\mathfrak{K}$. Besteht $\mathfrak{K}$ nicht bloß aus einem einzigen Punkt, so läßt sich die Mündung abändern, indem man den vorliegenden Weg unter Vermeidung eines Endpunktes mit $\mathfrak{K}$ verbindet.

III. Der Satz vom Jordanbogen.

Nun kommen wir zum Beweis des Satzes, daß *ein Jordanbogen keine Zerlegung der Ebene bewirkt, so daß sich je zwei außerhalb desselben gelegene Punkte A und B durch einen Weg verbinden lassen, welcher ihn nicht trifft.*

1. Wir beweisen den Satz zunächst unter einer scheinbaren Einschränkung. Wir nehmen nämlich an: Nachdem wir von A aus einen Weg bis t gezogen haben, dessen Mündung t_A von den Endpunkten verschieden ist, sei es gelungen, von B aus zwei Wege bis t zu ziehen, deren Mündungen t_B, t'_B durch t_A getrennt werden, und beweisen unter dieser Annahme, daß A mit B durch einen Weg verbunden werden kann, der t nicht trifft. Die Erfüllbarkeit der Annahme selbst werden wir hernach zeigen (vgl. 2.).

Wir ziehen zunächst noch einen Weg von A bis t, dessen Mündung t'_A auf dieselbe Seite falle wie t'_B. Nun zerlegen wir den Jordanbogen t durch zwei Punkte in drei Teilbogen, so daß t_A und t_B dem ersten, t'_A und t'_B dem dritten angehören, während der mittlere m keinen von den 4 Mündungen enthält. Die beiden äußeren Teilbogen lassen sich dann nach unserem Hilfssatz II. 1. durch ein Polygon $\mathfrak{P}$ voneinander trennen, welches keinen von ihnen trifft; dieses trennt dann auch sowohl t_A und t'_A, als auch t_B und t'_B. Die Wege $t_A A t'_A$ (w_A) und $t_B B t'_B$ (w_B) durchsetzen also beide $\mathfrak{P}$, und zwar eine ungerade Anzahl mal. Wir werden uns nun davon überzeugen, daß es möglich ist, längs $\mathfrak{P}$ von w_A zu w_B überzugehen, ohne t zu überschreiten. Offenbar handelt es sich bloß darum, m zu vermeiden; denn nur dieser Teilbogen trifft $\mathfrak{P}$. Nun lassen sich zu beiden Seiten von $\mathfrak{P}$ die Endstücke von w_A und w_B durch Streckenwege verbinden, welche weder m noch $\mathfrak{P}$ treffen (denn die verbindenden t-Bogen tun es nicht). Diese bilden zusammen mit w_A und w_B ein einfaches Polygon $\mathfrak{Q}$, welches m nicht trifft. m liegt also auf einer bestimmten (der schraffierten) Seite von $\mathfrak{Q}$. Auf der anderen Seite müssen wir unseren Weg längs $\mathfrak{P}$ suchen, der w_A und w_B verbindet. Unter den auf ihr verlaufenden Teilstreckenzügen von $\mathfrak{P}$ gibt es aber in der Tat einen w_A und w_B verbindenden, — wegen der Ungeradheit der beiden Schnittpunktszahlen. (Der Weg von A nach B ist in Fig. 3 durch Pfeile markiert.)

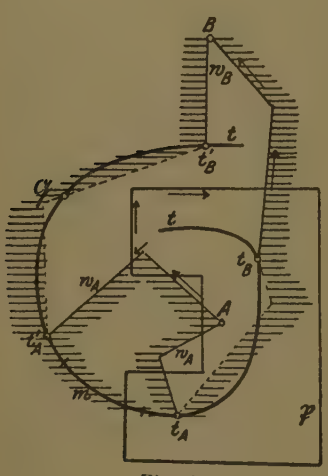

Fig. 3.

2. Nun haben wir noch zu zeigen, daß man wirklich von einem beliebigen Punkt B aus einen Weg ziehen kann, welcher auf einer gegebenen Seite eines bestimmten Kurvenpunktes t_A einmündet. Angenommen also, es gäbe etwa keine Mündung $t_B < t_A$; dann sei $\underline{t}$ die untere Grenze aller t_B; sie zerlegt die Kurve in zwei Teilbögen. Verbinden wir sie miteinander durch einen Weg, der $\underline{t}$ vermeidet, und wählen auf ihm einen Punkt C, so erhalten wir zwei Wege von C bis t, deren Mündungen die Anordnung $t_C < \underline{t} < t'_C$ haben. Da es zwischen t_C und t'_C Mündungen t_B gibt, ist B nach 1. mit C verbindbar; also t_C ein $t_B < \underline{t}$, während $\underline{t}$ doch die untere Grenze aller t_B sein sollte. Damit ist der Beweis für die Umgehbarkeit des Jordanbogens zu Ende geführt.

Bemerkung. Der hier gegebene indirekte Beweis läßt sich auch zu einem direkten Konstruktionsverfahren umgestalten.

3. Die Mündungen t_A der Wege von einem außerhalb des Jordanbogens t liegenden Punkt A bis zu ihm erfüllen t dicht. Sind t_0, t'_0 zwei von den Endpunkten verschiedene Stellen des Jordanbogens, so haben wir soeben bewiesen, daß man von A aus sowohl Wege ziehen kann, deren Mündung $t_A < t_0$, als auch solche, deren Mündung $t'_A > t'_0$ ist. Wir haben noch zu zeigen, daß man auch einen finden kann, dessen Mündung zwischen t_0 und t'_0 liegt. Zu diesem Zwecke brauchen wir bloß die beiden äußeren Teilbogen durch ein Polygon voneinander zu trennen. Dieses trifft dann sowohl t_A A t'_A als auch den mittleren Teilbogen und vermittelt so eine Verbindung zwischen A und demselben. Der Jordanbogen ist also die Grenze des von ihm bestimmten Gebiets; jedenfalls also eine abgeschlossene, nirgends dichte Punktmenge. (In jedem Kreis bleibt ein Kreis frei.)

4. Nun können wir einen Spezialfall des Jordanschen Kurvensatzes sehr leicht beweisen; den Fall nämlich, daß die Jordankurve $\mathfrak{J}$ ein geradliniges Stück enthält, also aus einer Strecke PQ und einem Jordanbogen t besteht, welche bloß ihre Endpunkte gemein haben. Da letzterer eine Gebietsteilung der Ebene bewirkt, kann man von jedem nicht auf t liegenden Punkte aus einen Weg ziehen, der auf der Strecke PQ in $\mathfrak{J}$ einmündet. Macht man das für zwei Punkte A und B, so können die beiden Wege von derselben Seite her in die Strecke münden; dann bekommt man sofort eine $\mathfrak{J}$ nicht treffende Verbindung zwischen A und B. Im anderen Falle aber gibt es keine. Eine solche (w) gäbe nämlich zur Entstehung eines Polygons Anlaß, welches P und Q trennte. Der sie verbindende Bogen t müßte es treffen gegen die Voraussetzung über w. Daß durch die Kurve getrennte Punktepaare wirklich vorhanden sind, sieht man an den Endpunkten einer PQ durchkreuzenden Strecke, welche nur den Bogen t nicht erreicht.

IV. Der Jordansche Kurvensatz.

1. Nun gehen wir zum Beweis des allgemeinen Jordanschen Kurven-satzes über und stellen zunächst eine kleine Hilfsbetrachtung an.

Wir denken uns drei Jordanbogen 1, 2, 3, welche nur ihre Endpunkte P und Q gemein haben. Zwei Punkte A und B seien beide mit 1 und 2 durch Streckenwege verbindbar, so daß vorher keiner von den beiden andern Bogen getroffen wird. Die Mündungen seien t_A^1, t_A^2, t_B^1, t_B^2. Ich behaupte: A und B lassen sich durch einen Weg verbinden, der keinen von den drei Bogen trifft[5]). Zum Beweise brauchen wir bloß die spezielle Jordankurve $A t_A^1 t_B^1 B t_B^2 t_A^2 A$ ($\mathfrak{J}$) heranzuziehen. Diese hat nach dem Vorangehenden (III. 4.) zwei Seiten. Auf einer von ihnen (schraffiert) liegen 3 und die nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Reste von 1 und 2. Von einem auf der anderen Seite liegenden Punkt C aus kann man nun sowohl $t_A^1 A t_A^2$ als auch $t_B^1 B t_B^2$ erreichen, wodurch in der Tat eine Verbindung zwischen A und B hergestellt wird.

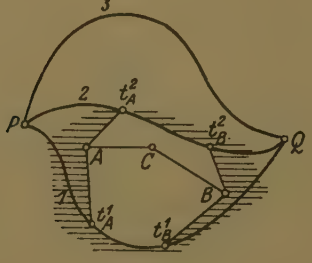

Fig. 4.

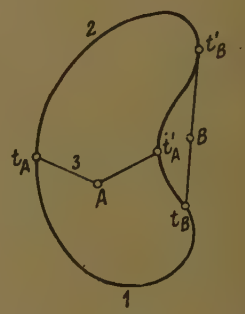

Fig. 5.

2. Liegt nun eine beliebige Jordankurve $\mathfrak{K}$ vor, so können wir von einem nicht zu ihr gehörigen Punkte A aus zwei Streckenwege nach ihr ziehen, welche an verschiedenen Stellen t_A, t'_A einmünden und erhalten dadurch drei Jordanbogen, welche nur ihre Endpunkte gemein haben. Die Bogen 1 und 2 bilden $\mathfrak{K}$, 3 ist ein Streckenzug. Wir haben also den eben betrachteten Fall vor uns. Doch wissen wir hier mehr. Die Bogen 1 und 3 bilden zusammen eine spezielle Jordankurve der in III. 4. betrachteten Art. Der Bogen 2 verläuft (bis auf die Endpunkte) auf einer Seite von ihr. Es gibt Punkte, welche auf der anderen liegen. Von einem solchen aus lassen sich 1 und 3 erreichen, 2 aber nicht. Nach unserer

[5]) Natürlich wird angenommen, daß die von A und B aus gezogenen Wege einander nicht schon begegnen; überdies können wir annehmen, daß die von A ausgehenden Wege nur A, die von B ausgehenden nur B gemein haben.

lfsbetrachtung ist also *jeder* Punkt, von dem aus 1 und 3 erreichbar
id, von 2 getrennt. Es gibt somit keinen Punkt, von dem aus alle
ei Bogen erreichbar wären. Auch 2 und 3 bilden eine spezielle Jordan-
rve der behandelten Art und es gibt 1 gegenüberliegende Punkte. Von
esen aus sind 2 und 3 erreichbar, 1 nicht. Diese beiden Klassen von
nkten (Gebiete) sind fremd. In bezug auf die Jordankurve $\mathfrak{K}$ er-
ben sie erst ein Gebiet, 3 ist ja dann als Verbindungsweg benutzbar.
bt es noch weitere Punkte? Punkte also, welche weder von 1 noch
n 2 getrennt sind, d. h. solche, von denen aus man 1 und 2, und
mit 3 nicht erreichen kann. Ja, solche gibt es. Man braucht nur
nen Verbindungsweg $t_B B t'_B$ zwischen 1 und 2 herzustellen, welcher 3
ngeht. Dann ist B ein solcher Punkt. Je zwei Punkte, von denen aus
und 2 (ohne Begegnung mit 3) erreichbar sind, können wieder nach un-
rer Hilfsbetrachtung miteinander verbunden werden.

*Die Jordankurve bestimmt also genau zwei Gebiete; der Jordan-
he Satz ist bewiesen.*

3. Zugleich gewinnen wir ein äußerst einfaches Kennzeichen der ge-
ennten Lage zweier Punkte A und B in bezug auf eine Jordankurve $\mathfrak{K}$.

Nennen wir einen Weg, der nur seine Endpunkte auf der Kurve hat,
nen „Steg", so können wir es so aussprechen:

A und B sind dann und nur dann getrennt, wenn sie auf zwei
emden Stegen liegen, deren Enden getrennte Paare auf $\mathfrak{K}$ bilden. (Fig. 5.)

Unter einem Weg (bzw. Steg) können wir hier einen allgemeinen
ordanbogen verstehen. Die Streckenwege haben ihre Rolle ausgespielt.
ie Kenntnis des Jordanschen Satzes gestattet uns jetzt die Wieder-
olung der Überlegungen dieses Abschnitts unter Benutzung beliebiger
ordanbogen an Stelle der Streckenzüge.

Etwas allgemeiner als oben können wir noch sagen:

Zwei einander und der Jordankurve fremde Kontinua sind dann
id nur dann durch dieselbe getrennt, wenn man von ihnen nach der
urve je zwei fremde Stege legen kann, deren Enden auf ihr getrennte
aare bilden.

4. Daß ferner die Jordankurve die gemeinsame Grenze der beiden
on ihr bestimmten Gebiete ist, folgt unmittelbar aus dem Satz vom
ordanbogen. Denn um von einem gegebenen Punkte aus einen Weg
u ziehen, der in einen gegebenen Teilbogen mündet, braucht man nur
en Restbogen zu umgehen.

V. Invarianz der Dimensionenzahl.

1. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich aus unseren Überlegunge der folgende Satz, der einen Teil des Satzes von der Invarianz de Dimensionenzahl ausspricht:

Eine Punktmenge, die einen dreidimensionalen Würfel enthält, kann kein eindeutig-stetiges Abbild in der Ebene haben.

Man nehme innerhalb des Würfels einen Kreis und eine Streck AB, welche keinen Punkt gemein haben. Dann lassen sich sicher zw fremde Stege legen, deren Enden getrennte Punktepaare auf dem Kreis sind und von denen der eine über A, der andere über B geht. De Bild des Kreises wäre eine Jordankurve $\mathfrak{K}$. Die Bilder von A und wären durch das Bild der Strecke AB miteinander verbunden, währen sie doch nach IV. 3. durch $\mathfrak{K}$ getrennt sein müßten.

2. Auch folgender Satz läßt sich leicht mit unseren Hilfsmitteln be weisen, der gleichfalls eine Kennzeichnung des Zweidimensionalen gegen über dem Mehr-als-zwei-dimensionalen enthält:

Es ist unmöglich, je zwei von fünf Punkten der Ebene in ihr durc Wege zu verbinden, welche einander (außer in den fünf Punkten selbst nicht treffen.

VI. Ein Jordanbogen in einem Gebiet. Theorie der Querschnitte.

Aus IV. 3. ergibt sich unmittelbar, daß ein Jordansches Gebiet durc einen hindurchgehenden Steg (Querschnitt) in zwei Teilgebiete zerlegt wird Wir wollen jetzt allgemein die Frage behandeln, auf welche Weise die Ver bindbarkeit der Punktepaare irgendeines Gebiets[6]) mit beschränkter Grenz durch einen nicht überschreitbaren Jordanbogen beeinflußt wird, welcher bis auf seine Endpunkte in ihm verläuft. Es ist leicht zu erkennen, da der Jordanbogen umgangen werden kann, wenn er einschließlich seine Endpunkte im Gebiet liegt, auch dann, wenn nur einer von den End punkten der Grenze angehört, ebenso aber, wenn die beiden Endpunkt verschiedenen Komponenten[7]) der Gebietsgrenze α angehören. Dazu ist nu

[6]) Ein Gebiet ist eine Punktmenge $\mathfrak{G}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:
1. Um jeden ihrer Punkte als Mittelpunkt läßt sich eine Kreisscheibe lege die ihr ganz angehört,
2. Je zwei Punkte derselben lassen sich innerhalb $\mathfrak{G}$ durch einen Weg ve binden.

Ein Punkt gehört der Grenze von $\mathfrak{G}$ an, wenn in jedem Kreis um ih sowohl Punkte von $\mathfrak{G}$, als auch Punkte des Restes liegen.

[7]) Man sagt von zwei Punkten, daß sie derselben Komponente einer b schränkten, abgeschlossenen Punktmenge α angehören, wenn es ein in derselbe enthaltenes Kontinuum gibt, dem sie angehören.

ne leichte Modifikation unseres in II. 1., 2. gegebenen Beweises für den tz vom Jordanbogen erforderlich. Man muß nur jedesmal die Wege und s Trennungspolygon $\mathfrak{P}$ so einrichten, daß sie im Gebiet verlaufen[8]).

Gehören aber beide Endpunkte des Jordanbogens t derselben Komnente $\varkappa$ der Gebietsgrenze an, so zerlegt er das Gebiet $\mathfrak{G}$ in zwei Teilbiete.

Wir stellen zunächst innerhalb $\mathfrak{G}$ einen Steg $t_1 M_1 t_1'$ (1) her (einen ogen, von dem nur die Endpunkte zu t gehören) und verbinden den Teilgen $t_1 < t < t_1'$ mit dem Rest von t durch einen zweiten, den ersten nicht effenden Steg $t_2 M_2 t_2'$ (2). Die Endpunkte bilden getrennte Paare auf t und ben etwa die Anordnung $t_1 < t_2 < t_1' < t_2'$. Nun können wir zeigen, daß der nicht auf t liegende Punkt A von $\mathfrak{G}$ tweder mit (1) oder mit (2) verbunden erden kann, wonach sicher nicht mehr als ei Teilgebiete vorhanden sind. Fassen r die Jordankurve $t_1 M_1 t_1' t_2' M_2 t_2 t_1$ ($\mathfrak{J}$) s Auge, so liegt der Teilbogen $t_2 < t < t_1'$ n Enden $t < t_1$ und $t > t_2'$, welche durch verbunden sind, gegenüber (IV. 3.). Nun nn man von A aus zwei Wege bis t ehen, von denen der eine zwischen t_2 d t_1', der andere aber unterhalb t_1 in t nmündet. Einer von ihnen muß notwendig einen von den beiden Stegen treffen, omit unsere Behauptung bewiesen ist. nderseits ist aber auch leicht zu zeigen, aß die beiden Stege nicht innerhalb $\mathfrak{G}$ urch einen Weg verbunden werden können, elcher t nicht trifft, so daß also wirklich zwei Teilgebiete da sind. äre nämlich $M_1 (w) M_2$ ein solcher, so ergäbe sich wieder eine ordankurve $M_1 (w) M_2 t_2 t_1' M_1$ ($\mathfrak{K}$); t_1 und t_2' lägen auf verschiedenen iten derselben. (Sie lägen nämlich auf den Stegen $M_1 t_1 t_2$ bzw. $M_2 t_2' t_1'$, ren Mündungen auf $\mathfrak{K}$ getrennt liegen.) Das sie verbindende Kontinuum, elches aus den Bogen $t < t_1$, $t > t_2'$ und der Grenzkomponente $\varkappa$ besteht, elcher die Endpunkte angehören, müßte die Jordankurve $\mathfrak{K}$ treffen

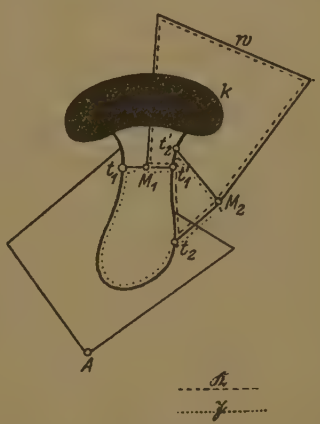

Fig. 6.
Der schwarze Fleck stellt hier den Rest von $\mathfrak{G}$ dar.

[8]) Zwei verschiedene Komponenten von α lassen sich — wie in der Mengenlehre gezeigt wird (vgl. etwa Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 303) — zu zwei fremden, abgeschlossenen Teilmengen erweitern, die zusammen α erschöpfen. Auf deren Abstand $d > 0$ kommt es bei der Herstellung eines α nicht an. Ein offenden Trennungspolygons zwischen den beiden Komponenten an. Ein solches liegt von selbst im Gebiet.

(sonst zerfiele es in zwei fremde abgeschlossene Teilmengen); w bliebe nicht in $\mathfrak{G}$, was doch vorausgesetzt war.

Das Gesagte gibt auch ohne weiteres die Möglichkeit, bei einem beliebigen Netz, das aus endlich vielen Punkten und einander nicht treffenden Verbindungen zwischen ihnen besteht, zu entscheiden, wieviel Gebiete vorhanden sind und von welchen Bogen dieselben begrenzt werden. Man braucht sich die Figur nur dadurch entstanden zu denken, daß ein Bogen nach dem anderen zu den Punkten hinzugefügt wird.

Prag, im Januar 1918.

(Eingegangen am 31. Januar 1918.)

Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi.

Von

Gábor Szegö in Budapest.

Im folgenden will ich einen einfachen Satz über die Laguerreschen Polynome beweisen und einige Fragen untersuchen, die mit diesem Satze zusammenhängen. Ich betrachte ferner eine gewisse spezielle Klasse von Jacobischen Polynomen, die mit den Laguerreschen in engem Zusammenhange stehen. Endlich bemerke ich einiges über Legendresche Polynome.

§ 1.

Die Laguerreschen Polynome.

Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Funktionensystem:

$$e^{-\frac{\zeta}{2}},\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta,\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{\nu},\ \ldots$$

und bilde daraus nach dem Vorgange von E. Schmidt durch Orthogonalisierung das System

$$(L) \qquad e^{-\frac{\zeta}{2}}L_0(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}L_1(\zeta),\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}L_\nu(\zeta),\ \ldots,$$

wo die $L_\nu(\zeta)$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{a) } L_\nu(\zeta) \text{ ist ein Polynom } \nu\text{-ten Grades,} \\ \text{b) } \int_0^\infty e^{-\zeta} L_\mu(\zeta) L_\nu(\zeta)\, d\zeta = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu) \end{cases}$$

$$(2)\quad \text{c) } L_\nu(0) = 1.^{1})$$

---

[1]) Die Bedingung b) ist mit der folgenden äquivalent:

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} L_\nu(\zeta)\, \zeta^\varrho\, d\zeta = 0, \qquad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$

und hieraus folgt bekanntlich, daß alle Wurzeln von $L_\nu(\zeta)$ positiv sind. Die Normierung $L_\nu(0) = 1$ ist also stets möglich

Durch diese Bedingungen ist das System (L) eindeutig bestimmt. D. h. wenn

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}F_0(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}F_1(\zeta),\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}F_\nu(\zeta),\ \ldots$$

ein System von Funktionen bezeichnet, die diesen Bedingungen genügen, so ist

$$F_\nu(\zeta) = L_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Polynome $L_\nu(\zeta)$ sind die *Laguerreschen Polynome*.

Ich will zunächst zeigen, daß die erzeugende Funktion dieser Polynome, wie schon Laguerre (Werke, Bd. I, S. 436) angibt, folgende ist:

$$\frac{e^{-\frac{\zeta t}{1-t}}}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(\zeta)t^\nu. \tag{3}$$

Ich beweise das, indem ich die drei obenerwähnten Eigenschaften von $L_\nu(\zeta)$ für die Koeffizienten dieser Entwickelung verifiziere. In der Tat erstens ist es klar, daß der ν-te Koeffizient dieser Entwickelung ein Polynom ν-ten Grades ist. D. h. die Bedingung a) ist erfüllt. Ähnliches gilt für c), weil ja

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu$$

ist. Was endlich die Bedingung b) betrifft, so ist deren Gültigkeit folgendermaßen zu beweisen. Zunächst folgt aus (3)

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{1-u} \frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{1-v} d\zeta = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} u^\mu v^\nu \int_0^\infty e^{-\zeta} L_\mu(\zeta) L_\nu(\zeta) d\zeta.$$

Es ist aber

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{1-u} \frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{1-v} d\zeta = \frac{1}{(1-u)(1-v)} \frac{1}{1+\frac{u}{1-u}+\frac{v}{1-v}}$$

$$= \frac{1}{1-uv} = \sum_{\nu=0}^{\infty} u^\nu v^\nu.$$

d. h. b) ist auch erfüllt. Außerdem folgt noch hieraus, daß

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} L_\nu^2(\zeta) d\zeta = 1, \tag{1*}$$

also

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} L_\mu(\zeta) L_\nu(\zeta) d\zeta = \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ich werde weiter eine (ebenfalls schon in der Literatur vorkommende) Darstellung dieser Polynome benutzen, die sich für die Folge als besonders wichtig erweisen wird. Das ist:

$$) \quad e^{-\zeta} L_\nu(\zeta) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} e^{-\zeta} \zeta^\nu = e^{-\zeta} \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \frac{(-\zeta)^h}{h!} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)^2).$$

etzteres ergibt sich vermittelst der wohlbekannten Leibnizschen Regel).

Diese Formel ist leicht zu beweisen, indem man, wie vorher, die iltigkeit der obigen Bedingungen verifiziert. a) und c) sind zunächst füllt. Die Bedingung b) ist der folgenden äquivalent:

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} L_\nu(\zeta) \zeta^\varrho d\zeta = 0 \qquad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1).$$

h setze

$$f_\nu(\zeta) = e^{-\zeta} \zeta^\nu,$$

nn ergibt sich mit Hilfe der partiellen Integration

$$\zeta^\varrho D^{(\nu)} f_\nu(\zeta)\, d\zeta = -\varrho \int_0^\infty \zeta^{\varrho-1} D^{(\nu-1)} f_\nu(\zeta) d\zeta \quad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

die Funktion $f_\nu(\zeta)$ und ihre sämtlichen Derivierten für $\zeta = \infty$ und e ersten $\nu - 1$ Derivierten für $\zeta = 0$ verschwinden. Es ist also

$$\zeta^\varrho D^{(\nu)} f_\nu(\zeta) d\zeta = (-1)^\varrho \varrho! \int_0^\infty D^{(\nu-\varrho)} f_\nu(\zeta) d\zeta = (-1)^\varrho \varrho! D^{(\nu-\varrho-1)} f_\nu(\zeta) \Big|_0^\infty = 0$$
$$(\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

oraus die Behauptung folgt.

§ 2.

Ein Satz über die Laguerreschen Polynome.

Es ist für jedes positive ζ

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu(\zeta)| < 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Beweis. Im Falle $\nu = 0$ ist der Satz trivial. Es seien $\nu > 0$, $\zeta > 0$ ste Zahlen und z bezeichne eine komplexe Variable. Die Entwickelung

$$f_\nu(\zeta + z) = a_0(\zeta) + a_1(\zeta) z + \ldots + a_h(\zeta) z^h + \cdots$$

nvergiert für jeden Wert von z, da $f_\nu(z)$ eine ganze transzendente unktion ist. Ferner ist

$$a_h(\zeta) = \frac{1}{h!} D^{(h)} f_\nu(\zeta)$$

nd man hat nach Cauchy

$$|a_h(\zeta)|\, r^h < \operatorname*{Max.}_{|z|=r} |f_\nu(\zeta + z)| \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots),$$

---

[2]) Ich bezeichne im folgenden die ν-te Derivierte von $f(x)$ mit $D^{(\nu)} f(x)$.

wo $r > 0$ beliebig ist[3]). Da speziell

$$a_\nu(\zeta) = e^{-\zeta} L_\nu(\zeta)$$

ist, bekomme ich folgende Ungleichung:

$$e^{-\zeta} |L_\nu(\zeta)| r^\nu < \underset{0 \leqq \theta < 2\pi}{\text{Max.}} |e^{-(\zeta + re^{i\theta})}(\zeta + re^{i\theta})^\nu|$$

$$< e^{-\zeta} \underset{|\alpha| \leqq 1}{\text{Max.}} e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}},$$

wo

$$p(\alpha) = p(\zeta, r; \alpha) = \zeta^2 + r^2 + 2\zeta r\alpha \geqq 0$$

und α eine reelle Veränderliche bezeichnet. Man hat so

$$|L_\nu(\zeta)| r^\nu < \underset{|\alpha| \leqq 1}{\text{Max.}} e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Ich betrachte jetzt die Funktion

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\zeta, r; \alpha) = e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Es ist

$$\varphi'(\alpha) = e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}-1} \left\{ \frac{\nu}{2} 2\zeta r - rp(\alpha) \right\}$$

$$= re^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}-1} \{\nu\zeta - (\zeta^2 + r^2) - 2\zeta r\alpha\}.$$

D. h. diese Funktion hat an der Stelle

$$\alpha_0 = \alpha_0(\zeta, r) = \frac{\nu\zeta - (\zeta^2 + r^2)}{2\zeta r}$$

ihr einziges Extremum, und zwar ein *Maximum*. Man hat also

$$|L_\nu(\zeta)| r^\nu < \begin{cases} \varphi(1) \\ \varphi(\alpha_0), \\ \varphi(-1) \end{cases} \text{ je nachdem } \begin{cases} \alpha_0 \geqq 1 \\ |\alpha_0| \leqq 1 \\ \alpha_0 \leqq -1 \end{cases} \text{ ist.}$$

Es sei jetzt

a) $0 < \zeta \leqq 4\nu$. Ich setze $r = \sqrt{\nu\zeta}$. Es ist

$$\alpha_0 = -\frac{\zeta^2}{2\zeta\sqrt{\nu\zeta}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}},$$

so daß $-1 \leqq \alpha_0 < 0$. Man hat also

$$|L_\nu(\zeta)| < \frac{\varphi(\alpha_0)}{r^\nu} = \frac{\varphi(\alpha_0)}{(\nu\zeta)^{\frac{\nu}{2}}}.$$

---

[3]) Es gilt sogar der Satz:

$$\sum_{h=0}^{\infty} |a_h(\zeta)|^2 r^{2h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_\nu(x + re^{i\theta})|^2 d\theta < \underset{|z| = r}{\text{Max.}} |f_\nu(x + z)|^2 \qquad (r >$$

ist aber

$$-r\alpha_0 = \sqrt{\nu\zeta}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}} = \frac{\zeta}{2}$$

d

$$p(\alpha_0) = \zeta^2 + \nu\zeta + 2\zeta\sqrt{\nu\zeta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}}\right) = \nu\zeta,$$

daß wir erhalten

$$\varphi(\alpha_0) = e^{\frac{\zeta}{2}}(\nu\zeta)^{\frac{\nu}{2}}$$

d

$$|L_\nu(\zeta)| < e^{\frac{\zeta}{2}}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Es sei

$\zeta \geqq 4\nu$. Ich setze $r = \frac{\zeta}{2}$. Es ist

$$\alpha_0 = \frac{\nu - \frac{1}{4}\zeta}{\zeta} \leqq -1,$$

daß

$$|L_\nu(\zeta)| < \frac{\varphi(-1)}{r^\nu} = \left(\frac{2}{\zeta}\right)^\nu \varphi(-1).$$

an hat aber

$$\varphi(-1) = e^r|\zeta - r|^\nu = e^{\frac{\zeta}{2}}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu,$$

so

$$|L_\nu(\zeta)| < e^{\frac{\zeta}{2}}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 3.

Verallgemeinerung.

Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Funktionensystem

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{k+1},\ \ldots\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{k+\nu},\ \ldots,$$

o $k \geqq 0$ beliebig ist. Durch Orthogonalisierung erhalte ich die Funktionen

$\zeta^{(k)}$) $$e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_0^{(k)}(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_1^{(k)}(\zeta), \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_\nu^{(k)}(\zeta), \ldots,$$

e die folgenden Bedingungen erfüllen:

5) a) $L_\nu^{(k)}(\zeta)$ ist ein Polynom ν-ten Grades,

b) $$\int_0^\infty e^{-\zeta}\zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta)\,d\zeta = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

6) c) $L_\nu^{(k)}(0) = 1$.[4])

[4]) Alle Wurzeln von $L_\nu^{(k)}(\zeta)$ sind positiv. Vgl. [1]).

Durch diese Bedingungen ist das System $(L^{(k)})$ völlig bestimmt. Ferner ist

$$L_\nu^{(0)}(\zeta) = L_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ich will folgenden Satz beweisen:

Es ist für jedes positive ζ

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1 \qquad (k > 0; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dieser Satz folgt aus dem vorigen sehr einfach. Es gilt zunächst die Entwickelung

$$\frac{e^{\frac{\zeta t}{1-t}}}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{\nu} L_\nu^{(k)}(\zeta) t^\nu \qquad (|t| < 1) \tag{7}$$

In der Tat ist der ν-te Koeffizient dieser Entwickelung ein Polynom ν-ten Grades. Ferner hat man $L_\nu^{(k)}(0) = 1$, da

$$\frac{1}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{\nu} t^\nu.$$

Endlich gilt die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} \frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{(1-u)^{2k+1}} \frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{(1-v)^{2k+1}} d\zeta = \frac{\Gamma(2k+1)}{(1-uv)^{2k+1}} =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\mu}{\mu} \binom{2k+\nu}{\nu} \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta) d\zeta \cdot u^\mu v^\nu,$$

so daß

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta) d\zeta = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

d. h. die Entwickelung (7) ist richtig. Ferner bekommt man

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} [L_\nu^{(k)}(\zeta)]^2 d\zeta = \frac{\Gamma(2k+1)}{\binom{2k+\nu}{\nu}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5'}$$

Aus (7) folgt schon leicht unser Satz. Da nämlich

$$\frac{1}{(1-t)^{2k}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu-1}{\nu} t^\nu$$

ist, hat man

$$\binom{2k+\nu}{\nu} L_\nu^{(k)}(\zeta) = L_\nu(\zeta) + \binom{2k}{1} L_{\nu-1}(\zeta) + \binom{2k+1}{2} L_{\nu-2}(\zeta) + \ldots$$
$$+ \binom{2k+\nu-1}{\nu} L_0(\zeta),$$

woraus für $\zeta = 0$

$$\binom{2k+\nu}{\nu} = 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k+1}{2} + \ldots + \binom{2k+\nu-1}{\nu}$$

gt. Also für $\zeta > 0$

$$\binom{2k+\nu}{\nu} e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k+1}{2} + \ldots + \binom{2k+\nu-1}{\nu}$$

d so

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 4.
Anwendungen.

Es sei $P(\zeta)$ ein Polynom ν-ten Grades, welches nicht identisch verwindet. Es gilt dann die Ungleichung

$$e^{-\zeta} P^2(\zeta) \leqq (\nu+1) \int_0^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt \qquad (\zeta \geqq 0)$$

d das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn

$$P(\zeta) = c\,[L_0(\zeta) + L_1(\zeta) + \ldots + L_\nu(\zeta)]$$

d $\zeta = 0$ ist $(c \neq 0)$.

Der Beweis ist sehr einfach. Ich setze

$$P(\zeta) = c_0 L_0(\zeta) + c_1 L_1(\zeta) + \ldots + c_\nu L_\nu(\zeta),$$

die Konstanten $c_0, c_1, \ldots c_\nu$ nicht alle verschwinden. Man hat

$$\int_0^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt = c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_\nu^2;$$

ner nach den vorigen

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |P(\zeta)| \leqq |c_0| + |c_1| + \ldots + |c_\nu|, \qquad (\zeta \geqq 0)$$

o mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$e^{-\zeta} P^2(\zeta) \leqq (\nu+1) \int_0^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt, \qquad \text{q. e. d.}$$

Für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens ist notwendig, daß $\zeta = 0$ und

$$(c_0 + c_1 + \ldots + c_\nu)^2 = (\nu+1)(c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_\nu^2),$$

h. $c_0 = c_1 = \ldots = c_\nu$ sei. Daß umgekehrt diese Bedingung auch hinchend ist, ist ohne weiteres klar.

Zusatz. *Es gilt sogar die Ungleichung*

$$e^{-\zeta} P^2(\zeta) \leqq (\nu+1) \int_\zeta^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt$$

braucht nicht $\geqq 0$ sein), *und das Gleichheitszeichen ist dann und nur nn gültig, wenn*

$$P(\zeta) = c\,[L_0(\zeta - \zeta_0) + L_1(\zeta - \zeta_0) + \ldots + L_\nu(\zeta - \zeta_0)]$$

d $\zeta = \zeta_0$ ist $(c \neq 0,\ \zeta_0$ ist beliebig).

Es sei nämlich ζ_0 beliebig, aber fest. Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Polynom ν-ten Grades

$$\overline{P}(\zeta) = e^{-\frac{\zeta_0}{2}} P(\zeta_0 + \zeta),$$

für welches

$$e^{-\zeta}\overline{P}^2(\zeta) \leqq (\nu+1)\int_0^\infty e^{-t}\overline{P}^2(t)\,dt; \qquad (\zeta \geqq 0$$

speziell

$$\overline{P}^2(0) \leqq (\nu+1)\int_0^\infty e^{-t}\overline{P}^2(t)\,dt = (\nu+1)\int_0^\infty e^{-(\zeta_0+t)}P^2(\zeta_0+t)\,dt$$

$$= (\nu+1)\int_{\zeta_0}^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt,$$

also

$$e^{-\zeta_0}P^2(\zeta_0) \leqq (\nu+1)\int_{\zeta_0}^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt, \qquad \text{q. e. d.}$$

Eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes ist folgende:

Es sei $n = 2\nu$ und $Q(\zeta)$ ein nicht identisch verschwindendes Polynom n-ten Grades, welches für jedes reelle ζ nichtnegativ ist. Man hat dann

$$e^{-\zeta}Q(\zeta) \leqq (\nu+1)\int_\zeta^\infty e^{-t}Q(t)\,dt$$

und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn

$$Q(\zeta) = c[L_0(\zeta-\zeta_0) + L_1(\zeta-\zeta_0) + \ldots + L_\nu(\zeta-\zeta_0)]^2$$

und $\zeta = \zeta_0$ ist ($c > 0$, ζ_0 ist beliebig).

$Q(\zeta)$ kann nämlich in der Form dargestellt werden:

$$Q(\zeta) = P_1^2(\zeta) + P_2^2(\zeta),$$

wo die Polynome $P_1(\zeta)$ und $P_2(\zeta)$ höchstens den Grad ν haben. Daraus folgt gleich der Satz.

Da

$$e^\zeta\int_\zeta^\infty e^{-t}Q(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}Q(\zeta+t)\,dt = \sum_{h=0}^n \frac{Q^{(h)}(\zeta)}{h!}\int_0^\infty e^{-t}t^h\,dt = \sum_{h=0}^\infty Q^{(h)}(\zeta)$$

ist, kann die letzte Ungleichung auch in der Form geschrieben werden

$$\frac{Q(\zeta)}{\nu+1} \leqq Q(\zeta) + Q'(\zeta) + \ldots + Q^{(n)}(\zeta). \tag{8}$$

§ 5.

Zusammenhang mit einem gewissen System von Polynomen.

Es sei $k \geqq 0$ beliebig. Ich betrachte für $-1 \leqq x \leqq 1$ das Funktionensystem

$$|x|^k, |x|^k x, \ldots |x|^k x^n, \ldots$$

d bilde daraus ein System

$$|x|^k P_0^{(k)}(x),\ |x|^k P_1^{(k)}(x),\ \ldots\ |x|^k P_n^{(k)}(x),\ \ldots$$

t folgenden charakteristischen Eigenschaften:

a) $P_n^{(k)}(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades,

b) $\int_{-1}^{1} |x|^{2k} P_m^{(k)}(x)\, P_n^{(k)}(x)\, dx = 0\,, \qquad (m \gtrless n)$

c) $P_n^{(k)}(1) = 1$ [5]).

Diese Polynome [6]) bilden einen Spezialfall der Jacobischen Polynome [7]) d reduzieren sich auf die wohlbekannten Legendreschen Polynome, wenn = 0 gesetzt wird. Ich möchte hier auf einen merkwürdigen Zusammenng hinweisen, der zwischen diesen und den Laguerreschen Polynomen steht. Ich beweise nämlich den Satz:

Es sei $n = 2\nu$ *und*

$$\lim_{k=\infty} k(1 - x_k^2) = \zeta:$$

nn ist

$$\lim_{k=\infty} |x_k|^k P_n^{(k)}(x_k) = e^{-\frac{\zeta}{2}} L_\nu(\zeta).$$

Ich betrachte das Polynom ν-ten Grades $H_\nu^{(k)}(x)$, definiert durch die ormel

$$\Gamma(k+\tfrac{1}{2})\, H_\nu^{(k)}(x) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}} (x-1)^\nu$$

$$= x^{k-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} (\nu+k-\tfrac{1}{2})(\nu+k-\tfrac{3}{2}) \ldots (\nu+k-h+\tfrac{1}{2})\, x^{\nu-h} \frac{(x-1)^h}{h!}$$

$$= x^{k-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \binom{\nu+k-\frac{1}{2}}{h} x^{\nu-h} (x-1)^h,$$

d behaupte zunächst daß

$$P_n^{(k)}(x) = H_\nu^{(k)}(x^2),$$

h.

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} (\nu+k-\tfrac{1}{2})(\nu+k-\tfrac{3}{2}) \ldots (\nu+k-h+\tfrac{1}{2})\, x^{2\nu-2h} \frac{(x^2-1)^h}{h!}$$

1) $$= \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \binom{\nu+k-\frac{1}{2}}{h} x^{2\nu-2h} (x^2-1)^h$$

[5]) Alle Wurzeln von $P_n^{(k)}(x)$ liegen im Innern des Intervalls $-1 \leqq x \leqq 1$. Vgl. [1]).

[6]) Eigentlich nur $P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})$; s. unten.

[7]) Vgl. C. Jordan, Cours d'analyse. Zweite Auflage. Paris (Gauthier-Villars), 96. Bd. 3. S. 231–233.

ist. Zu diesem Zwecke genügt es offenbar, die obigen Eigenschaften von $P_n^{(k)}(x)$, da diese für das System $(P^{(k)})$ charakteristisch sind, für die rechte Seite von (11) verifizieren. Die Bedingungen a) und c) sind offenbar erfüllt. Was b) betrifft, so ist diese mit dem folgenden äquivalent:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x^{\varrho} H_\nu^{(k)}(x^2)\,dx = 0 \qquad (\nu \geqq 1,\ \varrho = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1)$$

oder, da für ungerade ϱ der Integrand eine ungerade Funktion ist und als solche ein verschwindendes Integral liefert, mit dem folgenden:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k+2\sigma} H_\nu^{(k)}(x^2)\,dx = \int_0^1 x^{k+\sigma-\frac{1}{2}} H_\nu^{(k)}(x)\,dx = 0$$

$$(\nu \geqq 1;\ \sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1).^{*})$$

Man bekommt aber durch partielle Integration

$$\int_0^1 x^{k+\sigma-\frac{1}{2}} H_\nu^{(k)}(x)\,dx = \frac{1}{\nu!}\int_0^1 x^{\sigma} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^{\nu}\,dx$$

$$= (-1)^{\sigma}\frac{\sigma!}{\nu!}\int_0^1 D^{(\nu-\sigma)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^{\nu}\,dx = 0$$

da ja die Funktion $x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^{\nu}$ und ihre ersten $\nu - 1$ Derivierten für $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden. Damit ist die Gleichung (11) bewiesen.

Jetzt folgt schon unser Satz sehr leicht. Man hat nämlich (ν und ζ sind feste Zahlen)

$$\lim_{k=\infty} (\nu + k - \tfrac{1}{2})(\nu + k - \tfrac{3}{2}) \ldots (\nu + k - h + \tfrac{1}{2}) x_k^{2\nu-2h} \frac{(x_k^2 - 1)^h}{h!} = \frac{(-\zeta)^h}{h!}$$

und so

$$\lim_{k=\infty} P_n^{(k)}(x_k) = \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \frac{(-\zeta)^h}{h!} = L_\nu(\zeta);$$

ferner

$$\lim_{k=\infty} |x_k|^k = \lim_{k=\infty} \left\{1 - (1 - x_k^2)\right\}^{\frac{k}{2}} = e^{-\frac{\zeta}{2}},$$

also

$$\lim_{k=\infty} |x_k|^k P_n^{(k)}(x_k) = e^{-\frac{\zeta}{2}} L_\nu(\zeta), \qquad \text{q. e. d.}$$

*) Vgl. Jordan, loc. cit. 7)

§ 6.

Über eine Eigenschaft der Polynome $P_n^{(k)}(x)$.

Es gilt für die Legendreschen Polynome $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$ der wohlekannte Satz

2) $$|P_n(x)| < 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; |x| < 1).$$

Herr J. Schur hat nun die Vermutung ausgesprochen, daß auch

3) $$|x^k P_n^{(k)}(x)| < 1 \qquad (k > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots; |x| < 1)$$

ist[9]), eine Vermutung, die für genügend große k (n ist eine feste Zahl) mittels des vorgehenden Satzes leicht bestätigt werden kann. Ich will hier diese Vermutung mit Hilfe der einfachen Methode, die ich im § 2 benutzt habe, für alle k beweisen, die die Form

4) $$k = m + \tfrac{1}{2}$$

haben, wo m eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Zunächst gilt die Formel

5) $$P_{2\nu+1}^{(k)}(x) = x P_{2\nu}^{(k+1)}(x),$$

denn man hat einerseits (laut Definition)

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma+1} dx = \int_{-1}^{1} |x|^{2k+2} P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma} dx = 0$$

$$(\nu \geqq 1;\ \sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$

und andererseits

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma} dx = 0 \qquad (\nu \geqq 0;\ \sigma = 0, 1, \ldots, \nu),$$

da das Polynom $P_{2\nu}^{(k+1)}(x)$ nach (11) nur gerade Potenzen enthält. Also ist

5′) $$x^k P_{2\nu+1}^{(k)}(x) = x^{k+1} P_{2\nu}^{(k+1)}(x),$$

d. h. es genügt den Satz (13) nur für gerade n zu beweisen.

Es sei $\nu \geqq 1$ und x eine gegebene Zahl des Intervalls $0 < x < 1$ (für $\nu = 0$ ist $P_0^{(k)}(x) = 1$, also der Satz trivial).

Man hat nach dem vorhergehenden

$$x^{k-\frac{1}{2}} P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}} (x-1)^{\nu}.$$

Ich setze

$$F_{\nu}^{(k)}(z) = z^{\nu+k-\frac{1}{2}} (z-1)^{\nu};$$

[9]) Diese Vermutung hat die Veranlassung zu den vorangehenden Untersuchungen gegeben.

das ist ein Polynom in z, wenn k die Form $\frac{1}{2}+m$ hat. Es sei

$$F_\nu^{(k)}(x+z)=\sum_{h=0}^{2\nu+[k-\frac{1}{2}]}A_h(x)z^h.$$

Man hat

$$A_h(x)=\frac{1}{h!}D^{(h)}F_\nu^{(k)}(x)$$

und nach Cauchy

$$|A_h(x)|r^h<\underset{|z|=r}{\text{Max.}}|F_\nu^{(k)}(x+z)| \qquad (h=0,1,\ldots,2\nu+k-\tfrac{1}{2})$$

wo $r>0$ beliebig ist. Da speziell

$$A_\nu(x)=x^{k-\frac{1}{2}}P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})$$

ist, bekomme ich folgende Ungleichung[10]):

$$x^{k-\frac{1}{2}}|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})|r^\nu<\underset{|z|=r}{\text{Max.}}\left|(x+z)^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x+z-1)^\nu\right|$$
$$=\underset{|\alpha|\leqq 1}{\text{Max.}}\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}},$$

wo

$$\mu=\nu+k-\tfrac{1}{2}\geqq\nu\geqq 1,$$
$$p(\alpha)=p(x,r;\alpha)=x^2+r^2+2xr\alpha\geqq 0,$$
$$q(\alpha)=q(x,r;\alpha)=(1-x)^2+r^2-2(1-x)r\alpha\geqq 0$$

ist und α eine reelle Veränderliche bezeichnet.

Ich betrachte jetzt die Funktion

$$\Phi(\alpha)=\Phi(x,r;\alpha)=\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Es ist

$$\Phi'(\alpha)=\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}-1}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}-1}\left\{\frac{\mu}{2}2xrq(\alpha)-\frac{\nu}{2}2(1-x)rp(\alpha)\right\}$$

und

$$\frac{\mu}{2}2xq(\alpha)-\frac{\nu}{2}2(1-x)p(\alpha)=$$
$$=\mu x\{(1-x)^2+r^2\}-\nu(1-x)\{x^2+r^2\}-2(\mu+\nu)x(1-x)r\alpha$$

d. h. die Funktion $\Phi(\alpha)$ hat an der Stelle

$$\alpha_0=\alpha_0(x,r)=\frac{\mu\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r}-\nu\frac{x^2+r^2}{2xr}}{\mu+\nu}$$

ihr einziges Extremum, und zwar ein Maximum. Man hat also

---

[10]) Hier kommt zum Vorschein, daß die Einschränkung $k=m+\frac{1}{2}$ wesentlich ist; sonst wird nämlich $F_\nu^{(k)}(z)$ für $z=0$ singulär und man kann daher den Cauchyschen Satz nicht anwenden.

$$x^{k-\frac{1}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right| r^{\nu} < \begin{cases} \Phi(1) \\ \Phi(\alpha_0), \quad \text{je nachdem} \\ \Phi(-1) \end{cases} \begin{cases} \alpha_0 \geqq 1 \\ |\alpha_0| \leqq 1 \\ \alpha_0 \leqq -1 \end{cases} \text{ist.}$$

Es sei jetzt

$$1 > x \geqq \left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\right)^2 \text{[11]}$$

ler, was dasselbe ist,

$$0 < \sqrt{\frac{1-x}{x}} \leqq \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\mu-\nu}.$$

h setze

$$r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}x(1-x)}.$$

s ist dann

$$\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r} = \frac{1-x+\frac{\nu}{\mu}x}{2r}$$

$$\frac{x^2+r^2}{2xr} = \frac{x+\frac{\nu}{\mu}(1-x)}{2r},$$

h.

$$\alpha_0 = \frac{\mu^2-\nu^2}{2r\mu(\mu+\nu)}(1-x) = \frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

daß $0 \leqq \alpha_0 \leqq 1$. Man hat also

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right| < x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(\alpha_0)}{r^{\nu}} = x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(\alpha_0)}{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}}x^{\frac{\nu}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}}.$$

s ist aber

$$p(\alpha_0) = x^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) + 2x\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\sqrt{x(1-x)}\,\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= x^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) + \frac{\mu-\nu}{\mu}x(1-x) = x$$

nd

$$(\alpha_0) = (1-x)^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) - 2(1-x)\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\sqrt{x(1-x)}\,\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= (1-x)^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) - \frac{\mu-\nu}{\mu}(1-x)^2 = \frac{\nu}{\mu}(1-x),$$

aher ist

$$\Phi(\alpha_0) = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}}x^{\frac{\mu}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}$$

nd

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right| < x^{\frac{1-k+\mu-\nu}{2}} = x^{\frac{1}{4}} < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

Es sei

) $$k > \tfrac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad 0 < x \leqq \left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\right)^2,$$

[11]) Wenn $k = \frac{1}{2}$, d. h. $\mu = \nu$ ist, so soll $x > 0$ sein.

oder in anderer Form

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} \geqq \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\mu-\nu}.$$

Ich setze $r = \sqrt{x} - x$[12]. Es ist

$$\mu\left\{\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r} - 1\right\} - \nu\left\{\frac{x^2+r^2}{2xr} + 1\right\} = \mu\frac{(1-x-r)^2}{2(1-x)r} - \nu\frac{(x+r)^2}{2xr} =$$

$$= \mu\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2(1-x)\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} - \nu\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \frac{\mu-\nu-\sqrt{x}(\mu+\nu)}{2\sqrt{x}(1-x)} \geqq 0$$

also

$$\mu\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r} - \nu\frac{x^2+r^2}{2xr} \geqq \mu+\nu,$$

d. h. $c_0 \geqq 1$, so daß

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right| < x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(1)}{r^\nu} = x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(1)}{x^{\frac{\nu}{2}}(1-\sqrt{x})^\nu}.$$

Man hat aber

$$p(1) = (x+r)^2 = x,$$

$$q(1) = (1-x-r)^2 = (1-\sqrt{x})^2$$

und also

$$\Phi(1) = x^{\frac{\mu}{2}}(1-\sqrt{x})^\nu,$$

d. h.

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right| < x^{\frac{1-k+\mu-\nu}{2}} = x^{\frac{1}{4}} < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

Damit ist der Satz (13) für $k = m + \frac{1}{2}$ bewiesen. Es gilt sogar die Ungleichung

$$(13') \quad |x^k P_n^{(k)}(x)| < |x|^{\frac{1}{2}} \qquad \left(k = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ |x| < 1\right)$$

§ 7.

Über die Legendreschen Polynome.

Zum Schluß will ich einen Satz über die Legendreschen Polynome beweisen.

---

[12]) Es ist zu beachten, daß, wenn

$$\lim_{k=\infty} k(1-x_k) = \zeta$$

ist,

$$\lim_{k=\infty} k\sqrt{\frac{\nu}{\mu}x_k(1-x_k)} = \sqrt{\nu\zeta}$$

und

$$\lim_{k=\infty} k\left(\sqrt{x_k} - x_k\right) = \frac{\zeta}{2}$$

wird. Vgl. § 2 und § 5.

Es ist

$$P_{2\nu}^{(\frac{1}{2})}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^\nu (x-1)^\nu = \frac{1}{2^\nu \nu!} D^{(\nu)} (u^2-1)^\nu = P_\nu(u),$$

enn $u = 2x - 1$ gesetzt wird. Hier bezeichnet $P_\nu(u)$ das ν-te Legendre-
he Polynom. Man hat so nach (13′)

2) $$|P_\nu(u)| < 1, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots;\ |u| < 1)$$

as mit einem bekannten Satz übereinstimmt.

Ich will hier einen Satz beweisen, woraus (12) reichlich folgt. Das ist:
Es gilt die Gleichung

6) $$[P_\nu(u)]^2 + 2\sum_{h=1}^{\nu} \left[\frac{D^{(h)} P_\nu(u)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+h)}\right]^2 (1-u^2)^h =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{1 - \cos^2\vartheta (1-u^2)\}^\nu d\vartheta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ |u| \leqq 1).$$

Beweis. Ich setze

$$f(u) = \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu$$

nd

$$f(u+z) = B_0(u) + B_1(u) z + \ldots + B_{2\nu}(u) z^{2\nu}$$

$$= B_\nu(u) z^\nu + \sum_{h=1}^{\nu} \{B_{\nu-h}(u) z^{\nu-h} + B_{\nu+h}(u) z^{\nu+h}\};$$

an hat

$$B_h(u) = \frac{1}{h!} D^{(h)} \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2\nu).$$

s sei jetzt $|u| < 1$. Ich behaupte zunächst, daß das Polynom in z

$$f(u + iz\sqrt{1-u^2})$$

ymmetrisch ist, d. h.

17) $$B_{\nu-h}(u)(i\sqrt{1-u^2})^{\nu-h} = B_{\nu+h}(u)(i\sqrt{1-u^2})^{\nu+h} \quad (h = 1, 2, \ldots, \nu).$$

n der Tat ist

$$(u + iz\sqrt{1-u^2})^2 - 1 = u^2 + 2iuz\sqrt{1-u^2} - z^2(1-u^2) - 1 =$$

$$= z^2 \left\{u^2 + 2iu\frac{\sqrt{1-u^2}}{z} + \frac{u^2-1}{z^2} - 1\right\} = z^2 \left\{\left(u + i\frac{\sqrt{1-u^2}}{z}\right)^2 - 1\right\},$$

o daß

$$f(u + iz\sqrt{1-u^2}) = z^{2\nu} f\left(u + i\frac{\sqrt{1-u^2}}{z}\right)$$

nd hieraus folgt (17). Man hat also

$$B_{\nu-h}(u) = (-1)^h B_{\nu+h}(u)(1-u^2)^h \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu)^{13}).$$

Jetzt benutze ich die Methode, die ich im vorhergehenden mehrmals angewandt habe[14]). Es ist

$$B_\nu^2(u) r^{2\nu} + \sum_{h=1}^{\nu} \{B_{\nu-h}^2(u) r^{2\nu-2h} + B_{\nu+h}^2(u) r^{2\nu+2h}\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(u + re^{i\vartheta})|^2 d$$

Setze ich hier

$$r = \sqrt{1-u^2}\ ^{15}),$$

so folgt

$$B_\nu^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu} + \sum_{h=1}^{\nu} \{B_{\nu-h}^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu-2h} + B_{\nu+h}^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu+2h}\}$$

$$= B_\nu^2(u)(1-u^2)^\nu + 2\sum_{h=1}^{\nu} B_{\nu+h}^2(u)(1-u^2)^{\nu+h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta.$$

Man hat aber

$$(u + \sqrt{1-u^2}\, e^{i\vartheta})^2 - 1 = (1 + u + \sqrt{1-u^2}\, e^{i\vartheta})(u - 1 + \sqrt{1-u^2}\, e^{i\vartheta})$$

und

$$|(u + \sqrt{1-u^2}\, e^{i\vartheta})^2 - 1|^2$$

$$= \{(1+u)^2 + 1 - u^2 + 2(1+u)\sqrt{1-u^2}\,\alpha\}\{(1-u)^2 + 1 - u^2 - 2(1-u)\sqrt{1-$$

$$= (1-u^2)\{2 + 2\sqrt{1-u^2}\,\alpha\}\{2 - 2\sqrt{1-u^2}\,\alpha\} = 2^2(1-u^2)\{1 - \alpha^2(1-u^2)\},$$

wenn $\alpha = \cos\vartheta$ gesetzt wird; also ist

$$|f(u + \sqrt{1-u^2}\, e^{i\vartheta})|^2 = (1-u^2)^\nu \{1 - \cos^2\vartheta(1-u^2)\}^\nu.$$

Ferner wird

$$B_\nu(u) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu = P_\nu(u).$$

$$B_{\nu+h}(u) = \frac{1}{(\nu+h)!} D^{(\nu+h)} \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu = \frac{D^{(h)} P_\nu(u)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots,$$

und hieraus folgt unmittelbar der Satz (16)[16]).

---

[13]) Diese Relation rührt von Jacobi her. Vgl. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, Zweite Auflage, Berlin 1878, Bd. 1, S. 155.

[14]) Eigentlich eine Verallgemeinerung derselben. Vgl. [2]).

[15]) Vgl. § 6, Fall a).

[16]) Es ist, wie aus bekannten Formeln leicht folgt,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{1 - \cos^2\vartheta(1-u^2)\}^\nu d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2\vartheta + u^2\cos^2\vartheta)^\nu d\vartheta = u^\nu P_\nu\left(\frac{u+\frac{1}{u}}{2}\right)$$

(Eingegangen am 6. Februar 1918.)

Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen.

(Erste Mitteilung.)

Von

E. Hecke in Basel.

Einige sehr verschiedenartige Fragen aus der Funktionen- und Zahlentheorie haben mich zu der Erkenntnis geführt, daß die bisher eingeführten Zeta- und L-Funktionen noch nicht ausreichen, um die Theorie in vollem Umfange angreifen zu können. Vielmehr muß noch eine Erweiterung in neuer Richtung eintreten, welche dem Vorhandensein von Einheiten in den algebraischen Körpern gerecht wird. Ich setze den Grundgedanken im reellen quadratischen Körper auseinander.

Sei h die Klassenzahl, ε die Grundeinheit. Alsdann ordnen wir jedem Ideal $\mathfrak{a}$ eine Größe $\lambda(\mathfrak{a})$ zu vermöge der Gleichung

$$\lambda(\mathfrak{a}) = \exp\left\{\frac{\pi i}{\log|\varepsilon|}\log\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right\}, \qquad (\exp x = e^x)$$

worin die Zahl α (α' ist die Konjugierte) sich aus

$$\alpha = \mathfrak{a}^h$$

bestimmt. Ersichtlich hängt $\lambda(\mathfrak{a})$ nicht davon ab, welche der assoziierten Zahlen man für α wählt. λ hat den Betrag 1 und es gilt

$$\lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a})\cdot\lambda(\mathfrak{b}).$$

Daher ist die Reihe

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s},$$

worin $\mathfrak{r}$ alle Ideale des Körpers durchläuft, konvergent für $\Re(s) > 1$ und hier gilt auch noch die Produktzerlegung

$$f(s) = \prod_{\mathfrak{p}}\left(1 - \frac{\lambda(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

(über die Primideale $\mathfrak{p}$ zu erstrecken). Daraus geht hervor, daß $f(s)$ mit der Verteilung der Primideale zusammenhängt. Dieser Ansatz läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern, indem man an Stelle von λ eine Potenz von λ mit ganzen rationalen, oder sogar mit gebrochenen Exponenten einsetzt. Alle diese unendlich vielen verschiedenen Funktionen lassen sich nach meiner von der Zetafunktion her bekannten Methode behandeln. Insbesondere zeigt sich, daß alle $f(s)$ ganze transzendente Funktionen sind, die einer Funktionalgleichung des bekannten Typus genügen, und im Punkte $s = 1$ (wie auch auf der ganzen Geraden $\Re(s) = 1$) nicht verschwinden. Letzteres liefert einen Existenzsatz etwa derart, daß eine indefinite quadratische Form auch dann noch unendlich viele Primzahlen darstellt, wenn man die ganzzahligen Variabeln x, y in der x-y-Ebene auf einen beliebigen *Winkelraum* einschränkt, der durch zwei vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahlen gebildet wird.

Zur obigen Definition von $\lambda(\mathfrak{a})$ gelangt man ganz naturgemäß, wenn man sich die Aufgabe stellt, eine Funktion $\lambda(x)$ des positiven Argumentes x zu bestimmen, so daß

$$\lambda(\varepsilon x) = \lambda(x),$$

$$\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) \cdot \lambda(y).$$

In der vorliegenden Arbeit bringe ich in § 1 für einen beliebigen Körper die Definition der λ, welche ich Charaktere nach den Einheiten nenne. In § 2 führe ich die neuen Zetafunktionen ein und beweise unter Vorwegnahme der Tatsache, daß sie in der ganzen Ebene regulär sind, ihr Nichtverschwinden auf der Geraden $\Re(s) = 1$; sodann gebe ich in § 3 den Existenzbeweis für Primideale, deren Charaktere in einen beliebig vorgeschriebenen Bereich fallen. Die Dirichletsche Methode ist hier, wo man *unendlich viele* Funktionen mit Charakteren hat, erst nach einer Modifikation anwendbar. In § 4 endlich, der nur formaler Natur ist und keinen neuen Gedanken bringt, führe ich diese Zetafunktionen auf die Thetafunktionen zurück, woraus sich ergibt, daß sie ganze transzendente Funktionen sind. Schließlich behandle ich in § 5 einige Modifikationen am Beispiel des reellen quadratischen Körpers, wo ich auch den Zusammenhang dieser Theorie mit dem oben angeführten Satze über Primzahlen in indefiniten quadratischen Formen erörtere. In einer zweiten Mitteilung beabsichtige ich, eine Erweiterung der Definition der λ vorzunehmen, worin dann die konjugierten Größen nicht nur mit ihrem absoluten Betrag auftreten.

§ 1.

Charaktere eines Ideals nach den Einheiten.

Sei k ein algebraischer Zahlkörper von n-tem Grade; unter den Konjugierten seien

$$k^{(1)},\ k^{(2)},\ \ldots\ k^{(r_1)} \quad \text{reell},$$

$$k^{(r_1+1)},\ \ldots\ k^{(r_1+r_2)} \quad \text{imaginär}$$

d $k^{(r_1+p)}$ konjugiert imaginär mit $k^{(r_1+r_2+p)}$ für $p = 1, 2, \ldots, r_2$.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in meiner Note über die Funktionen (Göttinger Nachrichten 1917, S. 299—318).

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten, so hat die Matrix n $(r+1)^2$ Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & \log|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & \log|\varepsilon_r^{(1)}| \\ 1 & \log|\varepsilon_1^{(2)}| & \ldots & \log|\varepsilon_r^{(2)}| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \log|\varepsilon_1^{(r+1)}| & \ldots & \log|\varepsilon_r^{(r+1)}| \end{pmatrix}$$

e von Null verschiedene Determinante und die reziproke Matrix ge sein:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n}e_1 & \frac{1}{n}e_2 & \ldots & \frac{1}{n}e_{r+1} \\ e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \ldots & e_{r+1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^{(r)} & e_2^{(r)} & \ldots & e_{r+1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

bestehen also die Gleichungen

$$\frac{e_q}{n} + \sum_{k=1}^{r} e_q^{(k)} \log|\varepsilon_k^{(p)}| = \delta_{pq}, \quad (p, q = 1, 2, \ldots, r-1)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{r+1} e_q = 1, \qquad \sum_{q=1}^{r+1} e_q^{(p)} = 0, \\ \sum_{l=1}^{r+1} e_q \log|\varepsilon_p^{'q}| = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, r) \end{cases}$$

$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\varepsilon_k^{(p)}| = \delta_{kq}. \qquad (k, q = 1, 2, \ldots, r)$$

Hierbei ist $\delta_{pq} = 1$, wenn $p = q$, sonst gleich Null.

Unter dem log ist hier, wie auch späterhin, der reelle Wert zu verhen.

Aus (2) entnimmt man noch die Werte von e_q:

$$e_q = 1 \quad \text{für} \quad q = 1, 2, \ldots, r_1,$$
$$e_q = 2 \quad \text{für} \quad q \geqq r_1 + 1.$$

Wir ordnen nun jeder von 0 verschiedenen Zahl μ des Körpers k in folgender Weise eine Zahl vom absoluten Betrage 1 zu, die mit $\lambda(\mu)$ bezeichnet werde:

Seien $m_1, m_2, \ldots m_r$ beliebige ganze rationale Zahlen, so setzen wir

$$(4) \qquad \lambda(\mu) = \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\mu^{(p)}|\right\}.$$

Für jedes feste System m ist so eine zahlentheoretische Funktion $\lambda(\mu)$ definiert, welche ein *Charakter der Zahl μ nach den Einheiten* heiße und folgende Eigenschaften hat:

1) Für eine beliebige Einheit η des Körpers ist wegen (3)

$$\lambda(\eta\mu) = \lambda(\mu).$$

Also ist $\lambda(\mu)$ dem *Ideal* (μ) zugeordnet.

2) $|\lambda(\mu)| = 1$,

3) $\lambda(\alpha\cdot\beta) = \lambda(\alpha)\cdot\lambda(\beta)$ für beliebige von Null verschiedene Körperzahlen α, β.

4) Ist $\lambda(\mu)$ für alle ganzen Körperzahlen, also für alle Körperzahlen gleich 1, so ist notwendig $m_1 = m_2 = \ldots m_r = 0$. Denn setzt man dann $1 + t\mu^{(p)}$ an Stelle von $\mu^{(p)}$ und läßt t über rationale Werte gegen Null konvergieren, so folgt $\sum_{p=1}^{r} m_q e_p^{(q)} = 0$ für $p = 1, \ldots r+1$ und hieraus $m_1 = \ldots = m_r = 0$.

Um die Funktion λ auch für Ideale zu erklären, welche nicht Hauptideale sind, verfahren wir folgendermaßen: Das System der Idealklassen des Körpers k (im gewöhnlichen weiteren Sinne genommen) denken wir uns durch eine Basis dargestellt, deren Elemente Primzahlpotenzgrade haben, aus jeder Basisklasse dann ein für allemal fest ein Ideal $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ gewählt; endlich seien $c_1, c_2, \ldots$ ihre Grade, also

$$\varrho_i = \mathfrak{r}_i^{c_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

Körperzahlen, vermittels deren wir die positiven Zahlen $\tau_i^{(p)}$ definieren

$$\tau_i^{(p)} = \left|\sqrt[c_i]{\varrho_i^{(p)}}\right|. \quad (p = 1, 2, \ldots r; \; i = 1, 2, \ldots$$

Diese τ gehören natürlich nicht mehr dem Körper an. Ist dann ein beliebiges Ideal, so gibt es ganze rationale Exponenten a_i (die mod. eindeutig bestimmt sind), so daß

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}_1^{a_1}\mathfrak{r}_2^{a_2}\ldots = \alpha$$

e Körperzahl ist. Alsdann setzen wir

$$\lambda(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\mathfrak{r}_1^{(p)a_1}\,\mathfrak{r}_2^{(p)a_2}\ldots}\right|\right\}.$$

ß diese Zahl, wenn die $\mathfrak{r}$ und m einmal fest angenommen sind, nur n dem Ideal $\mathfrak{a}$ abhängt, erkennt man daraus, daß der Ausdruck sich ht ändert, wenn man α durch eine assoziierte Zahl ersetzt, und daß sich auch nicht ändert, wenn man die ganzen Zahlen a_i irgendwie ders wählt, also mod. c_i verändert. In dieser Arbeit denken wir uns $\mathfrak{r}$ den Bedingungen gemäß auf irgendeine Art fest gewählt; die Zahlen lassen wir dagegen noch willkürlich.

Die idealtheoretische Funktion $\lambda(\mathfrak{a})$ mag ein *Charakter von* $\mathfrak{a}$ *nach n Einheiten* heißen. Es gilt wieder:

$$|\lambda(\mathfrak{a})| = 1,$$

$$\lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a})\cdot\lambda(\mathfrak{b}) \quad \text{für irgend zwei Ideale } \mathfrak{a},\ \mathfrak{b} \text{ des Körpers.}$$

der Charakter läßt sich ersichtlich aus r *Grundcharakteren*

$$\lambda_q(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\mathfrak{r}_1^{(p)a_1}\,\mathfrak{r}_2^{(p)a_2}\ldots}\right|\right\} \qquad (q = 1, \ldots, r)$$

sammensetzen, welche entstehen, wenn man eine der Zahlen $m = 1$, die dern gleich Null nimmt, und zwar ist

$$\lambda(\mathfrak{a}) = \lambda_1^{m_1}(\mathfrak{a})\,\lambda_2^{m_2}(\mathfrak{a})\ldots\lambda_r^{m_r}(\mathfrak{a}).$$

Einem jeden System von Grundeinheiten des Körpers entspricht türlich eine bestimmte Art von Grundcharakteren.

Die Werte der r Charaktere $\lambda_q(\mathfrak{a})$ in Verbindung mit der Zahl $N(\mathfrak{a})$ stimmen das Ideal $\mathfrak{a}$ eindeutig, indem offenbar der Satz gilt:

Wenn zwei Ideale dieselben Grundcharaktere und die gleiche Norm sitzen, so sind sie identisch.

Der Satz ist für zwei Hauptideale unmittelbar aus der Formel (1) d Gl. (4) abzulesen, und daraus ergibt sich seine Richtigkeit auch für ei beliebige Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, indem man die Potenzen $\mathfrak{a}^h$, $\mathfrak{b}^h$ (h die Klassen- hl) betrachtet.

Die Charaktere allein ohne Hinzunahme der Norm bestimmen da- gen das Ideal nicht völlig. Denn es gibt Zahlen μ, wofür alle $\lambda(\mu) = 1$ id, nämlich alle μ, unter deren Potenzen (μ^k) rationale Ideale vor- mmen.

§ 2.

Die Zetafunktionen mit Charakteren.

Mit Hilfe eines Charakters $\lambda(\mathfrak{a})$ nach den Einheiten bilde man die analytische Funktion der komplexen Variabeln s, welche für $\Re(s) > 1$ durch

$$\zeta(s;\lambda) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}$$

(zu summieren über alle ganzen Ideale $\mathfrak{r}$ des Körpers) dargestellt wird. Entsprechend definieren wir, wenn $\mathfrak{f}$ ein beliebiges ganzes Ideal und $\chi(\mathfrak{a})$ ein Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist,

$$L(s;\lambda,\chi) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}.$$

Beide Funktionen gestatten überdies wegen der Multiplikationsregel für λ und χ eine *Produktdarstellung* für $\Re(s) > 1$:

$$(7) \qquad \begin{cases} \zeta(s;\lambda) = \prod_{\mathfrak{p}} [1 - \lambda(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1}, \\ L(s;\lambda,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} [1 - \lambda(\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1} \end{cases}$$

und stehen daher mit der Verteilung der Primideale in Zusammenhang ($\mathfrak{p}$ durchläuft in dem Produkte alle Primideale).

Ist λ identisch 1, so haben wir es mit den gewöhnlichen ζ- und L-Funktionen zu tun. Im andern Falle ist so zu jedem Körper, der unendlich viele Einheiten enthält, eine unendliche Serie neuer Funktionen definiert, welche von Bedeutung für das Studium verborgenerer Eigenschaften des Körpers sind. Ich werde hier meine von den ζ- und L-Funktionen bekannten Methoden auf diese Funktionen anwenden, ohne wesentliche Modifikation läßt sich die Rechnung wie bei jenen durchführen. Sie findet sich im vorletzten Paragraphen dieser Arbeit.

Für die Anwendung auf die Verteilung der Primideale ist, wie zu erwarten, das Verhalten der Funktionen im Punkte $s = 1$ ausschlaggebend sowie weiter auf der vertikalen Geraden durch 1. In dieser Hinsicht will ich in diesem Paragraphen unter Vorwegnahme der Tatsache, daß für $\lambda \neq 1$ die Funktionen auf der Geraden $\Re(s) = 1$ durchweg regulär sind, folgenden Satz beweisen:

Die Funktionen $\zeta(s;\lambda)$ und $L(s;\lambda,\chi)$ sind für $\lambda \neq 1$ auf der Geraden $\Re(s) = 1$ durchweg von Null verschieden.

Zunächst wird, um den Gedanken möglichst klar hervortreten zu lassen, der Punkt $s = 1$ für sich erledigt, und zwar auf Grund eines

ethode, wie sie Herr de la Vallée Poussin zum Beweise des Nicht-rschwindens der Riemannschen ζ-Funktion auf der Geraden $\Re(s) = 1$ sonnen hat, in Kombination mit bereits bekannten Sätzen über die ge-öhnlichen ζ- und L-Funktionen.

Sei $s = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, so ist

$$\log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda)| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\Re(\lambda(\mathfrak{p})^m)}{N(\mathfrak{p})^{(1+\varepsilon)m}}.$$

a nun λ eine Zahl vom absoluten Betrage 1 ist, so ist auf Grund der osinus-Ungleichung

$$\left\{\begin{array}{l} 3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1+\cos\varphi)^2 \geqq 0, \\ 3 + 4\Re(\lambda) + \Re(\lambda^2) \geqq 0, \end{array}\right.$$

so

$$3\log|\zeta(1+\varepsilon)| + 4\log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda)| + \log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 0,$$

$$|\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda)|^4 \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1,$$

ler

$$|\varepsilon\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot \left|\frac{\zeta(1+\varepsilon;\lambda)}{\varepsilon}\right|^4 \varepsilon \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1.$$

Wäre nun $\zeta(1;\lambda) = 0$, wo λ nicht identisch 1, so wäre, weil $\zeta(s;\lambda)$ gulär, der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\zeta(1+\varepsilon;\lambda)}{\varepsilon} = \zeta'(1;\lambda)$$

ndlich, während $\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon\,\zeta(1+\varepsilon)$ eine endliche von Null verschiedene Zahl t, da die ζ-Funktion in 1 einen einfachen Pol hat. Lassen wir daher in) ε gegen Null konvergieren, so müßte, da auch der letzte Faktor re-ulär ist, die linke Seite gegen Null konvergieren, im Widerspruch mit er Ungleichung.

Also ist

$$\zeta(1;\lambda) \neq 0.$$

Die entsprechende Tatsache für $L(1;\lambda,\chi)$ wird in ähnlicher Weise be-iesen, indem wir uns auf den früher von mir bewiesenen Satz stützen, aß $L(1,\chi) \neq 0$.

Bilden wir nämlich

$$F(s;\lambda) = \prod_{\chi} L(s;\lambda,\chi),$$

orin das Produkt über sämtliche Charaktere χ mod. $\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist,) wird bekanntlich

$$F(s;\lambda) = \prod_{\mathfrak{p}} [1 - \lambda^f(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-fs}]^{-e}, \qquad (\mathfrak{p},\mathfrak{f}) = 1$$

worin e, f ganze rationale von $\mathfrak{p}$ abhängige Zahlen sind, deren Produkt gleich der Anzahl $h(\mathfrak{f})$ der Klassen mod. $\mathfrak{f}$ ist.

Ist nun λ identisch 1, so hat, wie schon erwähnt, $F(s;1)$ bei $s=1$ einen einfachen Pol. Ist λ nicht identisch 1, so sind alle Faktoren in (10) also auch $F(s;\lambda)$ regulär bei $s=1$.

Auf Grund dieser beiden Tatsachen gestattet die wie oben zu beweisende Ungleichung

$$|F(1+\varepsilon;1)|^3 \cdot |F(1+\varepsilon;\lambda)|^4 \cdot |F(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1$$

offenbar den gleichen Schluß zu machen, daß für $\lambda \not\equiv 1$

$$F(1;\lambda) \neq 0.$$

ist. Derselbe Gedanke ergibt auch den Nachweis des Nichtverschwindens dieser Funktionen auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$. Denn offenbar gelten für beliebiges reelles t auf Grund der Produktdarstellung und der Ungleichung (8) wieder für $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$|\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot |\zeta(1+\varepsilon+ti;\lambda)|^4 \cdot |\zeta(1+\varepsilon+2ti;\lambda^2)| \geqq 1,$$
$$|F(1+\varepsilon)|^3 \cdot |F(1+\varepsilon+ti;\lambda)|^4 \cdot |F(1+\varepsilon+2ti;\lambda^2)| \geqq 1,$$

und wegen des regulären Verhaltens der zweiten und dritten Faktoren bei $\varepsilon = 0$ kann daher der zweite Faktor nicht Null werden.

§ 3.

Die Verteilung der Charaktere für Primideale.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie das Nichtverschwinden unserer ζ- und L-Funktionen wieder zu einem Satz über die Existenz unendlich vieler Primideale von bestimmten Eigenschaften führt.

Die Werte der r Grundcharaktere

$$\lambda_1(\mathfrak{a}),\ \lambda_2(\mathfrak{a}),\ \ldots\ \lambda_r(\mathfrak{a})$$

sind komplexe Zahlen vom Betrage 1. Natürlich gibt es nicht zu einem beliebigen System komplexer Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ vom Betrage 1 ein Ideal $\mathfrak{a}$, dessen Charaktere $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ diese Werte haben. Wohl aber gibt es Ideale $\mathfrak{a}$, deren Charaktere mit beliebiger Genauigkeit mit $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ übereinstimmen, und zwar kann man sogar für $\mathfrak{a}$ Primideale einer beliebig vorgeschriebenen Klasse mod. $\mathfrak{f}$ wählen. Das ist der in Aussicht genommene Satz, der also genauer so formuliert werden mag:

I. *Sind $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ beliebige Zahlen vom Betrage 1, δ eine beliebige positive Größe, so gibt es in jeder Idealklasse mod. $\mathfrak{f}$ unendlich viele Primideale 1. Grades $\mathfrak{p}$, wofür die r Ungleichungen*

$$|\lambda_q(\mathfrak{p}) - \varkappa_q| < \delta \qquad (q = 1, 2, \ldots, r)$$

bestehen.

Da

$$\lambda_q(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\varepsilon_1^{(p)a_1} \varepsilon_2^{(p)a_2} \dots} \right| \right\}.$$

können wir unsern Satz auch so aussprechen:

II. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein festes Ideal, prim zu* $\mathfrak{f}$, *und lassen wir* $\mathfrak{p}$ *alle Primeale, wofür*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \text{ also } \mathfrak{a}\mathfrak{p} = (\alpha) \text{ eine Zahl ist,}$$

urchlaufen, so liegen im r*-dimensionalen Raume die Punkte mit den oordinaten*

$$c_q(\mathfrak{p}\mathfrak{a}) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log |\alpha^{(p)}| \qquad (q = 1, \dots, r) \tag{11}$$

erall dicht mod. 1.

Reduktion von $c_q(\mathfrak{p}\mathfrak{a})$ mod. 1 bedeutet offenbar Übergang von α zu ner geeigneten assoziierten Zahl. Nimmt man zu (11) noch die Gleichung

$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p \log |\alpha^{(p)}| = \log \sqrt[n]{|N(\alpha)|}$$

nd löst das so entstehende Gleichungssystem nach $\log |\alpha^{(p)}|$ auf, so kommt

$$\log \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right| = \sum_{q=1}^{r} c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p}) \log |\varepsilon_q^{(p)}| \qquad (p = 1, \dots, r+1).$$

äßt man daher $\alpha = (\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ sämtliche Zahlen (auch die assoziierten) durchufen, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ ist, so liegen die r Zahlen

$$x_1 = \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right|, \dots, x_r = \left| \frac{\alpha^{(r)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right|$$

n Bereich der positiven x überall dicht.

Dafür endlich läßt sich auch sagen: Sind a_p, b_p $(p = 1, \dots, r)$ r Paare ositiver Zahlen und $a_p < b_p$, so gibt es zu jedem $\mathfrak{a}$ (prim zu $\mathfrak{f}$) unendlich ele Primideale $\mathfrak{p}$, derart, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{p} = (\alpha)$$

nd

$$a_p < \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right| < b_p \qquad (p = 1, \dots, r).$$

In der Formulierung II will ich den Satz jetzt beweisen.

Sei also $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{f}$ primes Ideal, λ ein Charakter nach en Einheiten, welcher nicht identisch 1 ist, dann erkennt man zunächst, aß die Funktion

$$P(s;\lambda,\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\\ \mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\mathfrak{f})}} \frac{\lambda(\mathfrak{p}\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{p})^s}$$

regulär im Punkte $s=1$ (sogar auf der Vertikalen $\Re(s)=1$) ist.

In der Tat ist nach (7)

$$\log L(s;\lambda,\chi) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\lambda(\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g(s),$$

wo $g(s)$ für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ regulär. Aus der bekannten Eigenschaft der Gruppencharaktere mod. $\mathfrak{f}$:

$$\sum_{\chi} \chi(\mathfrak{m}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{m} \not\sim 1 \pmod{\mathfrak{f}},\\ h(\mathfrak{f}), & \text{wenn } \mathfrak{m} \sim 1 \pmod{\mathfrak{f}} \end{cases}$$

folgt daher durch Summation über alle $h(\mathfrak{f})$ Charaktere χ mod. $\mathfrak{f}$

$$\lambda(\mathfrak{a}) \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{a}) \log L(s;\lambda,\chi) = h(\mathfrak{f}) \sum_{\substack{\mathfrak{p}\\ \mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\mathrm{mod}.\mathfrak{f})}} \frac{\lambda(\mathfrak{p}\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{p})^s} + g_1(s),$$

worin die Summe rechts über die Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ zu erstrecken ist, $g_1(s)$ wieder für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ regulär ist. Da nun nach dem vorigen Paragraphen die $L(s;\lambda,\chi)$ auf der Geraden $\Re(s)=1$ regulär und von Null verschieden sind, sobald $\lambda \not\equiv 1$, so folgt unsere Behauptung über $P(s;\lambda,\mathfrak{a})$.

Dagegen wird $P(s;1,\mathfrak{a})$ bei Annäherung an den Punkt 1 unendlich wie $-\frac{1}{h(\mathfrak{f})}\log(s-1)$.

Um nun zu zeigen, daß in dem Einheitswürfel

$$0 \leqq x_q \leqq 1 \qquad (q=1,\ldots,r) \tag{12}$$

die mod. 1 genommenen Punkte

$$c_q(\alpha) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\alpha^{(p)}| \qquad (q=1,\ldots,r)$$

für $\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ überall dicht liegen, konstruieren wir uns eine *endliche* Fouriersche Reihe nach $x_1,\ldots,x_r$

$$\varphi(x_1,\ldots,x_r) = a_0 + \sum_{m_1,\ldots,m_r} a(m_1,\ldots,m_r)\, e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_rx_r)},$$

welche folgende Eigenschaften haben soll:

1. Sei J ein beliebiges Gebiet im Innern des Würfels (12), etwa selbst ein kleiner Würfel, A sei der übrige Teil des Würfels (12), der nicht zu J gehört; φ soll nun durchweg reell sein und

$$\varphi(x_1,\ldots,x_r) < 0 \quad \text{in } A. \tag{13}$$

2. Das konstante Glied von φ sei

$$a_0 > 0.$$

e derartige Reihe kann man sich leicht verschaffen, wenn man die urierentwicklung einer Funktion, die in A negativ ist, während sie in große positive Werte haben soll, an einer geeigneten Stelle abbricht.

Wir bezeichnen weiter mit $\varphi(\mathfrak{p})$ den Wert der Reihe φ, den sie im kte $c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ hat, und ferner mit $\mathfrak{p}_J$ und $\mathfrak{p}_A$ die Primideale, deren len $c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ entsprechend mod. 1 in J und A liegen. Dann gilt offenbar Identität (für $\Re(s) > 1$)

$$a_0 P(s; 1, \mathfrak{a}) + \sum_{m_1, \ldots, m_r} a(m_1, \ldots, m_r) P(s; \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \ldots \lambda_r^{m_r}, \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 (\mathfrak{f})} \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}.$$

f der linken Seite steht eine endliche Summe, die wegen $a_0 > 0$ positiv ndlich groß wird, wenn wir s über reelle Werte abnehmend gegen 1 nvergieren lassen. Die rechte Seite dagegen ist wegen (13)

$$\sum \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s} + \sum \frac{\varphi(\mathfrak{p}_A)}{N(\mathfrak{p}_A)^s} < \sum \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s}.$$

o wächst

$$\sum_{\mathfrak{p}_J} \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s}$$

er alle Grenzen, wenn s an 1 heranrückt, die Reihe muß also unendlich le Elemente enthalten, und insbesondere muß auch

$$\sum_{\mathfrak{p}_J} \frac{1}{N(\mathfrak{p}_J)}$$

ergieren.

Zum Beweise der beiden naheliegenden Vermutungen

$$\sum \frac{1}{N(\mathfrak{p}_J)^s} = \frac{V_J}{h(\mathfrak{f})} \log \frac{1}{s-1} + g(s),$$

$$\pi_J(x) \text{ asymptotisch gleich } \frac{V_J}{h(\mathfrak{f})} \frac{x}{\log x},$$

bedeutet: V_J das Volumen von J, $g(s)$ eine bei $s = 1$ endlich blei- nde Funktion, $\pi_J(x)$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p}_J$, deren Norm $\leqq x$, reichen die Hilfsmittel allein nicht aus, welche man bei den bisher handelten Problemen über die Verteilung der Primideale benutzt. Denn m Beweise der genannten Behauptungen hätte man an Stelle von ψ jenige *unendliche* Fourierreihe zu nehmen, die in A gleich 0, in gleich 1 ist, und in der Identität (14) hätten wir auf der linken Seite nn eine Reihe, deren analytischer Charakter erst durch eine besondere ntersuchung festgestellt werden müßte.

§ 4.

Das analytische Verhalten der Zetafunktionen mit Charakteren und ihre Funktionalgleichung.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die oben eingeführten Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen sind und einer Funktionalgleichung genügen, was nun genau nach der Methode geschehen soll, die ich bei der Dedekindschen Zetafunktion angewandt habe.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in meiner früheren Arbeit, nur daß ich die Grundeinheiten jetzt mit ε statt mit η bezeichne. Ist μ eine Körperzahl, $\lambda(\mu)$ ein Charakter nach den Einheiten (der als nicht identisch 1 angenommen wird), so setzen wir unter Benutzung der Größen e_p aus § 1 ($e_p = 1$, wenn $k^{(p)}$ reell, sonst $= 2$) zunächst das einzelne Glied der Zetareihe in die Form

$$\frac{\lambda(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \prod_{p=1}^{r+1} |\mu^{(p)}|^{-s e_p + 2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}},$$

sodann führen wir mit Hilfe eines nachher zu definierenden positiven c für den einzelnen Faktor des Produktes das Γ-Integral ein, und zwar für reelle Körper $k^{(p)}$:

$$\left|c^{\frac{1}{2}}\mu^{(p)}\right|^{-s e_p + 2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}} \Gamma\left(\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-c|\mu^{(p)}|^2 t_p} t_p^{\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}} \frac{dt_p}{t_p},$$

für imaginäre Körper den entsprechenden Ausdruck, aber mit $2c$ an Stelle von c. In dem Produkt über die Indizes p treten dann die Größen auf:

$$(15) \qquad \Gamma'(s;\lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right),$$

$$\gamma(\lambda) = \exp\left\{\pi i \log 2 \sum_{p=r_1+1}^{r+1} \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right\}$$

Letztere Größe, von dem Faktor 2 bei imaginären $k^{(p)}$ herrührend, ist von s, μ unabhängig und hat den Betrag 1. Wenn $r_2 = 0$, ist natürlich $\gamma = 1$ zu setzen.

Sei nun $\mathfrak{f}$ irgendein ganzes Ideal des Körpers $\neq 1$, $\chi(\mathfrak{r})$ ein *eigentlicher* Charakter mod. $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{c}$ ein festes Hilfsideal, so daß

$$\mathfrak{c}\mathfrak{f} = (\omega)$$

e Zahl ist, so definieren wir für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ die Thetafunktion

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathfrak{a}\mathfrak{c})} \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right) \exp\left\{-c \sum_{p=1}^{n} \frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|} t_p\right\},$$

rin

$$c = c(\mathfrak{a}) = \frac{\pi}{\sqrt[n]{d\, N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{c})}}$$

d die Summe über sämtliche Zahlen μ des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ zu erstrecken ist.
e Definition (16) soll für $\mathfrak{f} = 1$ durch folgende ersetzt werden:

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \chi\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right) \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathfrak{a})} \exp\left\{-c \sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)}|^2 t_p\right\} \qquad (c = 1,\ \omega = 1),$$

der Summe tritt hier das Glied mit dem Exponenten 0 auf, und es
in meiner früheren Bezeichnung für $\mathfrak{f} = 1$

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \chi\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right) \vartheta(t;\mathfrak{a}).$$

jedem Falle gilt die dort bewiesene Transformationsformel

7) $$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \frac{W(\chi)}{\sqrt{t_1 \ldots t_n}} \vartheta\left(\frac{1}{t};\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}}\right)$$

t

$$W(\chi)\, W(\bar{\chi}) = 1,$$

eziell ist

$$W(\chi) = \chi(\mathfrak{b}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{f} = 1.$$

Nachdem so der Anschluß an die Formeln meiner früheren Arbeit rgestellt ist, nehme ich $c = \mathfrak{f}^{-1}$, also $\omega = 1$, eine Vereinfachung, die damals übersehen habe.

Wir betrachten nun die Teilsumme

$$\zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1} \sim 1} \frac{\lambda(\mathfrak{r})\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s},$$

elche über alle Ideale $\mathfrak{r}\,(\neq 0)$ der Klasse $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist, und halten auf dem alten Wege

8) $$\gamma(\lambda)\lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}}\right) A^s \Gamma(s;\lambda)\, \zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) =$$

$$\frac{2^{r_1-1} n R}{w} \int_{u=0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \ldots \int \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a})\, u^{\frac{ns}{2}} \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q x_q\right\} dx_1 \ldots dx_r \frac{du}{u}.$$

e neuen Veränderlichen $u, x_1, \ldots, x_r$ hängen dabei mit den alten
$\ldots, t_{r+1}$ durch

9) $$t_p = u \exp\left\{2 \sum_{q=1}^{r} x_q \log|\varepsilon_q^{(p)}|\right\} \qquad (p = 1, \ldots, r+1)$$

zusammen, und A ist die positive Zahl

$$A = (dN(\mathfrak{f})\pi^{-n}2^{-2r_2})^{\frac{1}{2}}.$$

Die Integration über $x_1, \ldots, x_r$ bringt, da nicht alle m Null sind, das Glied der Thetareihe mit dem Exponenten Null zum Wegfall, wenn ein solches in der Reihe auftritt.

Das Integral über u wird zerlegt in die beiden Integrale über u von 0 bis 1 und von 1 bis ∞, im ersten $\frac{1}{u}$ als neue Variable eingeführt, die Transformationsformel (17) angewandt und endlich berücksichtigt, daß der Integrationsbereich der x symmetrisch zum Nullpunkt liegt. So ergibt sich

$$(20)\quad \begin{cases} \gamma(\lambda) A^s \Gamma(s;\lambda) \zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}), \\ \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) + W(\chi) g\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right), \end{cases}$$

worin gesetzt ist

$$g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{2^{r_1-1}nR}{w} \int_{u=1}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \ldots \int \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) u^{\frac{ns}{2}} \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q x_q\right\} dx_1 \ldots dx_r \frac{du}{u}.$$

Daraus folgt

$$\bar{\lambda}\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)\xi\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = g\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right) + W(\bar{\chi}) g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}),$$

das heißt

$\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a})$ ist eine ganze transzendente Funktion von s, wenn λ nicht identisch 1 ist, und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = W(\bar{\chi})\bar{\lambda}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}).$$

Nach seiner Definition hängt ξ nicht von $\mathfrak{a}$ selbst, sondern nur von der Idealklasse $\mathfrak{a}$ ab. Durch Summation über die sämtlichen Idealklassen folgt daher:

Die Funktion

$$(21)\qquad \xi(s;\lambda,\chi) = \gamma(\lambda) A^s \Gamma(s;\lambda) L(s;\lambda,\chi)$$

ist eine ganze transzendente Funktion von s und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi}) = W(\bar{\chi})\bar{\lambda}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})\xi(s;\lambda,\chi).$$

Voraussetzung hierbei ist nur, daß λ nicht identisch 1 und daß χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist, sobald $\mathfrak{f} \neq 1$.

Die „trivialen" Nullstellen von $L(s;\lambda,\chi)$, den Polen von $\Gamma(s;\lambda)$ entsprechend, liegen auf $(r+1)$ Geraden, die parallel zur reellen Achse

s-Ebene verlaufen. Es wäre von Interesse, festzustellen, ob diese -1) Geraden alle voneinander verschieden sein müssen, wie es z. B. beim dratischen Körper der Fall ist.

Die *Bedeutung dieser Funktionen* liegt, abgesehen von den Anwen-gen auf die Theorie der Verteilung der Primideale, zunächst auf dem biet der *Funktionentheorie*. Bei festem $\mathfrak{f}$ bildet nämlich erst die Ge-ntheit aller $L(s; \lambda, \chi)$ für alle Charaktere ein *Äquivalent für die Theta-ie*, mit der sie durch (20) verknüpft sind. Denn ersichtlich sind die $; \lambda, \chi, \mathfrak{a})$ nichts anderes als die *Fourierkoeffizienten* von

$$G(s; x_1, \ldots, x_r) = \int_0^\infty \vartheta(t; \chi, \mathfrak{a})\, u^{\frac{ns}{2}} \frac{du}{u},$$

Funktion von $x_1, \ldots, x_r$ betrachtet. (Für die t sind unter dem egralzeichen die u, x nach (19) einzutragen.) Übrigens ist G, wie ch gliedweise Integration der Thetareihe folgt, ein spezieller Fall der etafunktionen n-ter Ordnung", die bereits aus Untersuchungen der rren Lerch, Epstein u. a. bekannt sind. Aus (21) folgt aber weiter ch dem Fourierschen Integraltheorem die Umkehrung

$$\vartheta(t; \chi, \mathfrak{a}) = \frac{n}{4\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(s; x_1, \ldots, x_r)\, u^{-\frac{ns}{2}}\, ds,$$

e Schlußweise, deren Durchführung im Gebiet der analytischen Funk-nen wir den schönen Untersuchungen von Herrn Mellin[1]) verdanken. zen wir hier für G die Fourierentwicklung mit den Koeffizienten $s; \lambda, \chi, \mathfrak{a})$ ein, so erhält man eine Darstellung der Funktion ϑ von $+1$) Variabeln durch die Gesamtheit der ξ, aus welchen dann hervor-ht, daß die Funktionalgleichung der ξ ihrerseits die Transformations-mel der Thetafunktion zur Folge hat — wie es bekanntlich bei der emannschen Zetafunktion der Fall ist.

Eine ähnliche Verwendung der Funktionen ξ hat mich nun dazu ge-rt, für jeden algebraischen Zahlkörper eine ihm zugehörige Gattung alytischer Funktionen von n (oder weniger) Variabeln zu konstruieren. eine Reihe sehr merkwürdiger Eigenschaften besitzen und als ein Ana-on zur Exponentialfunktion und den elliptischen Modulfunktionen im ionalen Körper bezeichnet werden können. Besonders evident ist die alogie, wenn es sich um einen total reellen Körper handelt, für diesen ben die in Rede stehenden Funktionen eine nahe Beziehung zu den

[1]) Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funk-nen, Math. Ann. 68 (1910), S. 305—337.

Modulfunktionen von n Veränderlichen, die bereits öfter untersucht worden sind. Meine Theorie liefert in dieser Hinsicht als wichtigstes Resultat die *Existenz und die Transformationsgleichung derjenigen Funktion von n Variabeln, welche der Funktion* $\log \eta(\omega)$ *entspricht*, was ich mit den bisher bekannten Hilfsmitteln vergeblich zu beweisen versucht habe.

Eine ganz besondere Bedeutung aber gewinnen die Funktionen mit λ-Charakteren für die Theorie der Reziprozitätsgesetze und der relativ Abelschen Zahlkörper, wenn man in Verallgemeinerung bekannter Gedankengänge den Zusammenhang studiert, der zwischen den Funktionen eines Grundkörpers und denen eines Oberkörpers besteht. Ich komme hierauf bei einer andern Gelegenheit ausführlich zurück.

Es ist nun noch eine — mit einem engeren Äquivalenzbegriff zusammenhängende — Ergänzung notwendig, die ich für reelle quadratische Körper im folgenden Paragraphen entwickle.

§ 5.

Reelle quadratische Zahlkörper.

Für solche Körper, unter deren Konjugierten auch reelle Körper vorkommen, lassen sich unter Umständen noch die Quadratwurzeln aus den Charakteren $\lambda(\mu)$ derart als Funktionen von μ definieren, daß die Produktregel in Gültigkeit bleibt. Im reellen quadratischen Körper mit der Grundeinheit ε $(\varepsilon > 1)$ z. B. lautet zunächst das Schema der Größen $\frac{e_p}{q}$, $e_p^{(q)}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\log|\varepsilon|}, & \frac{-1}{2\log|\varepsilon|} \end{pmatrix}.$$

Alle Charaktere sind Potenzen von

$$\lambda(\mu) = \exp\left\{\pi i \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{\log|\varepsilon|}\right\},$$

und die Funktion

$$\Gamma(s; \lambda^m) = \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{m\pi i}{2\log|\varepsilon|}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m\pi i}{2\log|\varepsilon|}\right).$$

Nunmehr nehmen wir an, daß die Norm der Grundeinheit gleich -1 sei. Setzen wir dann für jede Körperzahl $\mu\,(\neq 0)$

$$\lambda_0(\mu) = \exp\left\{\pi i m \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\} \operatorname{sgn}(\mu\mu')^m,$$

wo m ganz rational, so ändert sich $\lambda_0(\mu)$ nicht, wenn man μ durch eine assoziierte Zahl ersetzt, und es ist wieder

$$\lambda_0(\alpha\beta) = \lambda_0(\alpha)\cdot\lambda_0(\beta).$$

gerade m stimmt λ_0 mit den Charakteren $\lambda^{\frac{m}{2}}$ überein. Wir wollen Funktionalgleichung für die Funktion L ableiten, welche mit unadem m bei λ_0 gebildet sind.

Zu diesem Zwecke entnehmen wir aus den Beziehungen, welche ich Gl. (6) – (10) in meiner Arbeit über die L-Funktionen bewies, folde Formel:

$$\sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})} \exp\{-c[(\mu+v)^2 t + (\mu'+v')^2 t']\} \cdot \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{W(\chi)}{\sqrt{t\,t'}} \sum_{\nu \equiv 0 \left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)} \exp\left\{-c'\left(\frac{\nu^2}{t} + \frac{\nu'^2}{t'}\right) + 2\pi i\,(\nu v + \nu' v')\right\} \chi(\nu \mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

erbei bedeuten v, v' irgendwelche Größen, χ ist ein eigentlicher Charakter d. $\mathfrak{f}$ (falls $\mathfrak{f} \neq 1$), und

$$c = c(\mathfrak{a}) = \frac{\pi}{\sqrt{d\,N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{f}^{-1})}}, \qquad c' = c\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right).$$

fferentiiert man die Relation (23) nach v und dann nach v', setzt nachher $= v' = 0$, so ergibt sich eine Transformationsgleichung für die Funktion

$$\vartheta'(t; \chi, \mathfrak{a}) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})} \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})} \exp\{-c(\mu^2 t + \mu'^2 t')\}\, \mu\mu' \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right),$$

mlich

$$\vartheta'(t; \chi, \mathfrak{a}) = \frac{-W(\chi)}{(t\,t')^{\frac{3}{2}}}\, \vartheta'\left(\frac{1}{t}, \bar{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right).$$

n ist für *ungerades* m

$$\frac{\lambda_0(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \exp\left\{\pi i m \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\} \frac{\operatorname{sgn}(\mu\mu')}{|N(\mu)|^s} =$$

$$= \exp\left\{\pi i m \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\} \frac{\mu\mu'}{|N(\mu)|^{s+1}} =$$

$$= \mu\mu' |\mu|^{-(s+1)+\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}} |\mu'|^{-(s+1)\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}.$$

f den dritten und vierten Faktor dieses Produktes wenden wir die Umrmung mit dem Γ-Integral an, führen zur Abkürzung für λ_0 mit unraden m ein:

$$\Gamma(s; \lambda_0) = \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \frac{\pi i m}{4\log|\varepsilon|}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} + \frac{\pi i m}{4\log|\varepsilon|}\right).$$

Damit wird für ungerade m

$$\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\cdot\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{d}{N(\mathfrak{f})}}\cdot\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})A^s\sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}\sim 1}\frac{\lambda_0(\mathfrak{r})\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}\cdot\Gamma(s;\lambda_0),$$

$$= \pi^{-(s+1)}\left(dN(\mathfrak{a}^2\mathfrak{f}^{-1})\right)^{\frac{1}{2}(s+1)}\frac{1}{N(\mathfrak{a})}\sum_{(\mu)\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})}\frac{\lambda_0(\mu)\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right)}{|N(\mu)|^s}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \frac{c^{-(s+1)}}{N(\mathfrak{a})}\sum_{(\mu)\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})}\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right)\mu\mu'\cdot|\mu|^{-(s+1)+\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}|\mu'|^{-(s+1)-\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \frac{4R}{w}\int_{u=0}^{\infty}\int_{x=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})\,e^{\pi i m x}u^{s+1}\frac{du}{u}\,dx$$

und folglich wegen (25)

$$\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\cdot\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = g(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) - W(\chi)g\left(1-s;\bar{\lambda}_0,\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right),$$

worin

$$g(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{4R}{w}\int_{u=1}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})\,e^{\pi i m x}u^{s+1}\frac{du}{u}\,dx.$$

Für ξ resultiert daher bei ungeradem m die Funktionalgleichung

$$\xi\left(1-s;\bar{\lambda}_0,\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = -W(\bar{\chi})\bar{\lambda}_0(\mathfrak{f}\mathfrak{b})\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}).$$

Ganz dieselbe Funktionalgleichung finden wir für quadratische Körper deren Grundeinheit die Norm $+1$ hat, sofern wir den engeren Äquivalenz begriff zugrunde legen: Zwei Ideale heißen äquivalent mod. $\mathfrak{f}$, wenn ihr Quotient gleich einer Körperzahl gesetzt werden kann, die $\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$ ist und positive Norm besitzt. Wir haben in den vorangehenden Formeln nur m durch eine gerade Zahl zu ersetzen und $\chi(\mu)$ durch $\chi_0(\mu) = \chi(\mu)\,\mathrm{sgn}(\mu\mu'$ (χ_0 ist dann ein Charakter dieser engeren Klassengruppe).

Das Nichtverschwinden und das reguläre Verhalten auf der Gerade $\Re(s) = 1$ ergibt sich dann wörtlich wie früher nun auch für die mit λ_0 bzw. χ_0 gebildeten L-Funktionen, woraus dann ebenso der Existenzsatz für Primideale folgt:

Sind α_1, α_2 Basiszahlen von $\mathfrak{a}$, so liegen die Zahlen

$$\frac{\log\left|\frac{\omega}{\omega'}\right|}{4\log|\varepsilon|} \qquad \text{(wenn } N(\varepsilon) = -1\text{)},$$

bzw.

$$\frac{\log\left|\frac{\omega}{\omega'}\right|}{2\log|\varepsilon|} \qquad \text{(wenn } N(\varepsilon) = +1\text{)}$$

rall dicht mod. 1, wenn man

$$\omega = \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

diejenigen Zahlen positiver Norm in $\mathfrak{a}$ durchlaufen läßt, wofür

$$\frac{\omega}{\mathfrak{a}} \text{ Primideal}$$

$$\omega \equiv \text{Einheit (mod. } \mathfrak{f}\text{)};$$

nd $\mathfrak{a}$ sind hierbei teilerfremd vorausgesetzt.

Für $\mathfrak{f} = 1$ ergibt sich hieraus eine sehr elegante geometrische Formuung: Durch Multiplikation von ω mit einer geeigneten Potenz von ε^2 ersten Fall, von ε im zweiten Fall lassen sich die obigen Quotienten eine einzige Art in das Intervall $0 \ldots 1$ bringen, wenn überdies noch langt wird:

$$\omega > 0, \quad \omega' > 0$$

r beliebiges positives $\vartheta_1 < \vartheta_2$ gibt es daher unendlich viele ω mit

$$\vartheta_1 < \frac{\omega}{\omega'} < \vartheta_2, \quad \frac{\omega}{\mathfrak{a}} \text{ Primideal}.$$

Diese Ungleichung stellt aber in der x-y-Ebene einen beliebigen nkelraum W dar, der durch zwei Halbstrahlen vom Nullpunkt aus grenzt wird. Somit ergibt sich:

Ist $ax^2 + bxy + cy^2$ eine indefinite, ganzzahlige Form, wo $b^2 - 4ac$ skriminante eines quadratischen Körpers ist, so stellt sie unendlich le Primzahlen dar, auch wenn man die ganzzahligen Variabeln auf en Winkelraum W einschränkt.

Um den Satz in dieser Form auch für allgemeine Diskriminanten zu veisen, ist es nötig, den engeren Begriff der Äquivalenz mod. $\mathfrak{f}$ heranziehen:

Zwei zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heißen äquivalent mod. $\mathfrak{f}$, wenn n $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ gleich einer Zahl α setzen kann, wo α total positiv, $\alpha \equiv 1 \,(\text{mod. } \mathfrak{f})$. bei ist dann in den Charakteren λ an Stelle von ε die „Grundeinheit mod. $\mathfrak{f}$" zu setzen, wo ε^n die kleinste Potenz, welche $\equiv 1 \,(\text{mod. } \mathfrak{f})$ ist. e so entstehenden L-Funktionen lassen sich, wie man sofort sieht, prinziell nach den gleichen Methoden behandeln wie oben. Auf diese Weise ibt sich:

Sei $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ eine indefinite, ganzzahlige primitive adratische Form, $b^2 - 4ac$ kein Quadrat, d die Diskriminante des Körs $K(\sqrt{b^2 - 4ac})$, ferner k, m, n ganze Zahlen. Alsdann stellt der sdruck

$$f(kx + m, \; ky + n)$$

unendlich viele Primzahlen dar, wenn x, y die ganzen Zahlen eines vorgegebenen Winkelraumes W durchlaufen. Hierbei gilt für k, m, n noch die Bedingung:

$$f(m, n) \text{ prim zu } \frac{k}{d} \cdot (b^2 - 4ac).$$

In diesem Zusammenhange ist noch zu erwähnen, daß derartige Funktionen wie $\sum_{x,y} f(x, y)^{-s}$, wo x, y auf W eingeschränkt ist, bereits in der klassischen Untersuchungen von Herrn de la Vallée Poussin sowie in späteren von Herrn Landau auftreten[2]), wo sie indes mit ganz anderen Mitteln behandelt werden. Unter anderem ist bekannt, daß diese Funktionen bei $s = 1$ einen einfachen Pol besitzen, was ich mit meinen Methoden nicht unmittelbar schließen kann.

Basel, Februar 1918.

---

[2]) Ch. de la Vallée Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, t. 20/21, 1896/97, insbesondere 4. partie. – E. Landau, Neuer Beweis eines analytischen Satzes des Herrn de la Vallée Poussin, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), S. 250—278.

(Eingegangen am 14. Februar 1918.)

Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

I. Schur in Berlin.

In seiner Note, „Sur quelques théorèmes d'Algèbre" (Comptes Rendus, l. 100, 1885, S. 439—440) hat Stieltjes gezeigt, daß einige der in den nwendungen häufig vorkommenden Klassen von Polynomen, insbesondere e Kugelfunktionen und die Hermiteschen Polynome, sich durch ge-sse Maximaleigenschaften ihrer Diskriminanten kennzeichnen lassen. esen Sätzen lassen sich noch andere, ähnlich geartete an die Seite llen, unter anderem auch ein Satz, der zur Charakterisierung der sog. guerreschen Polynome dienen kann (§§ 1—3). Vor allem kommt es r aber darauf an, zu zeigen, daß man auf Grund dieser Resultate die kannte von Cauchy herrührende Bemerkung über die Möglichkeit, mit lfe der Diskriminante einer Gleichung eine untere Schranke für die urzeldifferenzen anzugeben, in bemerkenswerter Weise weiter verfolgen nn. Es ergibt sich, daß bei gewissen allgemeinen Klassen von Glei-ungen mit ganzzahligen Koeffizienten zwischen der Größe des höchsten effizienten und der Größe der Wurzeln ein enger Zusammenhang be-ht (§§ 5—8). Als besonders überraschend erscheint mir der Satz IX, r schon für den Fall der „total reellen" *ganzen* algebraischen Zahlen neues Resultat liefert und auch rein zahlentheoretische Anwendungen läßt.

§ 1.

Ein Satz von Stieltjes.

Im folgenden bezeichne ich den Ausdruck

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\varkappa<\lambda}^{n}(x_\varkappa - x_\lambda)^2 \qquad (n \geqq 2)$$

als die *Diskriminante der n Größen* x_ν. Erscheinen diese Zahlen insbesondere als die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

so verstehe ich unter der *Diskriminante der Gleichung* den Ausdruck

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen, so ist bekanntlich auch D eine ebensolche Zahl.

In seiner oben erwähnten Note hat nun Stieltjes einen Satz ausgesprochen, der folgendermaßen formuliert werden soll:

I. *Sind* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *reelle Zahlen, die den Bedingungen*

$$(1) \qquad -1 \leqq x_\nu \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

unterworfen werden, so ist der größte Wert, den $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *annehmen kann, gleich*

$$(2) \qquad M_n = \frac{2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-2)^{n-2}}{3^3 \cdot 5^5 \ldots (2n-3)^{2n-3}}. \qquad (M_2 = 4)$$

Dieses Maximum erreicht Δ *nur für die Nullstellen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *des Polynoms* $F_n(x)$, *das als der Koeffizient von* z^n *in der Entwicklung von* $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ *nach Potenzen von* z *auftritt und auch als das Integral*

$$F_n = \int_x^1 P_{n-1}\, dx = -\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}}$$

der $(n-1)$*-ten Kugelfunktion charakterisiert werden kann.*

Der Beweis, den Stieltjes nicht angibt, läßt sich mit Hilfe der Differentialrechnung leicht erbringen. Da Δ eine stetige Funktion ist und (1) ein abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{G}$ darstellt, so gibt es in $\mathfrak{G}$ gewiß Stellen, an denen Δ seinen größten Wert M_n erhält. An einer solchen Stelle sind jedenfalls die x_ν voneinander verschieden und, da Δ symmetrisch ist, so kann angenommen werden, daß $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ ist. Für $n = 2$ ist $\Delta \leqq 4$ und nur dann gleich 4, wenn $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ist. Ist aber $n > 2$, so ist für $1 < \nu < n$ jedenfalls $-1 < x_\nu < 1$ und daher

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x_\nu} = 2 \sum_{\lambda=1}^{n}{}' \frac{1}{x_\nu - x_\lambda} = 0. \qquad (\lambda \neq \nu)$$

Setzt man also

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \qquad f_\nu(x) = \frac{f(x)}{x - x_\nu},$$

so muß

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n}{}' \frac{1}{x - x_\lambda} = \frac{f_\nu'(x)}{f_\nu(x)}$$

$x = x_\nu$ verschwinden. Dies liefert

$$f''(x_\nu) = 2f'(x_\nu) = 0.$$

nun $f''(x)$ nur $n-2$ Nullstellen besitzt, so muß $x_1 = -1$, $x_n = 1$. Zugleich erkennen wir, daß $(x^2-1)f''(x)$ durch $f(x)$ teilbar und Polynom n-ten Grades, abgesehen von einem konstanten Faktor, gleich) sein muß. Da der Koeffizient von x^n in $(x^2-1)f''(x)$ gleich $-1)$ ist, so erhalten wir

$$(x^2-1)f''(x) = n(n-1)f(x).$$

rch diese Differentialgleichung wird aber das Polynom $f(x)$ bis auf en konstanten Faktor eindeutig bestimmt und, da aus

$$\varphi = \sqrt{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n, \qquad (x^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = z^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

t, daß auch das Polynom F_n der Differentialgleichung genügt, so ist $) = \text{const.}\, F_n(x)$.

Es handelt sich also nur noch darum, die Diskriminante M_n der lstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $F_n(x)$ zu berechnen. Setzt man nun

$$F_n(x) = c_n x^n + c_n' x^{n-1} + \ldots, \qquad c_n = -\frac{1\cdot 3\ldots 2n-3}{1.2\ldots n}$$

bezeichnet mit y_β und z_γ die Nullstellen von $F_n'(x)$ und $F_{n-1}'(x)$, wird

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} M_n = \frac{1}{c_n^n}\prod_{\alpha=1}^{n} F_n'(x_\alpha) = \frac{n^n}{c_n^{n-1}}\prod_{\beta=1}^{n-1} F_n(y_\beta).$$

Aus (4) folgt aber wegen $z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (x-z)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ die Gleichung

$$nF_n(x) = xF_n'(x) - F_{n-1}'(x).$$

ner ist $nF_n(y_\beta) = -F_{n-1}'(y_\beta)$ und

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} M_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{c_n^{n-1}}\prod_{\beta=1}^{n-1} F_{n-1}'(y_\beta)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}n\cdot(n-1)^{n-1}c_{n-1}^{n-1}}{n^{n-2}c_n^{n-1}c_n^{n-2}}\prod_{\gamma=1}^{n-2} F_n'(z_\gamma).$$

Nun besteht aber für die Polynome F_n' (die negativ genommenen gelfunktionen) die Rekursionsformel

$$(n-1)F_n' - (2n-3)xF_{n-1}' + (n-2)F_{n-2}' = 0.$$

Hieraus ergibt sich $(n-1)F_n'(z_\gamma) = -(n-2)F_{n-2}'(z_\gamma)$ und daher ist wegen (5)

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} M_n = -\frac{(n-1)(n-2)^{n-2} c_{n-1}^{n-1}}{n^{n-3} c_n^{2n-3}} \prod_{\gamma=1}^{n-2} F_{n-2}'(z_\gamma).$$

Andererseits liefert (5)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} M_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}(n-1)}{c_{n-1}^{n-2}} \prod_{\gamma=1}^{n-2} F_{n-2}'(z_\gamma).$$

Daher ist

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{(n-2)^{n-2}}{n^{n-3}} \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{2n-3} = \frac{(n-2)^{n-2}}{n^{n-3}} \cdot \left(\frac{n}{2n-3}\right)^{2n-3} = \frac{n^n (n-2)^{n-2}}{(2n-3)^{2n-3}}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit $M_2 = 4$ die zu beweisende Gl. (2).

§ 2.

Das Maximum der Diskriminante im Gebiete $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$.

Stieltjes hat a. a. O. noch hervorgehoben, daß der Ausdruck

$$e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

seinen größten Wert $e^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n$ nur dann erhält, wenn x_1, $x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen des n-ten Hermiteschen Polynoms

$$H_n(x) = x^n - 1 \cdot \binom{n}{2} x^{n-2} + 1 \cdot 3 \cdot \binom{n}{4} x^{n-4} - \ldots = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

sind. Ich brauche im folgenden einen anderen, ähnlichen Satz:

II. *Für reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die der Bedingung*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1 \tag{6}$$

genügen, ist das Maximum M_n' von $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gleich

$$M_n' = \frac{2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n}{(n^2 - n)^{\frac{1}{2}(n^2 - n)}} \tag{7}$$

und diesen Wert nimmt Δ nur dann an, wenn die Größen $x_\nu \sqrt{n^2 - n}$ der Gleichung $H_n(x) = 0$ genügen.

Zunächst erkennt man in bekannter Weise leicht, daß an jeder Stelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Gebietes (6), an der die Funktion Δ ihr Maximum M_n' erreicht,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

muß. Die Gesamtheit der Wertsysteme, die dieser Gleichung genügen, ält man, indem man

$$= \cos\vartheta_1, \quad x_2 = \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \ldots, \quad x_{n-1} = \sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1},$$

$$x_n = \sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}$$

zt und für die „Polarkoordinaten" $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$ alle reellen Werte ißt. Die Zahl M_n' erscheint daher als das Maximum der periodischen nktion

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1})$$

ϑ_ν. Soll nun $\Delta = \Phi = M_n'$ werden, so muß insbesondere, da

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \vartheta_{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \vartheta_{n-1}} = -x_n, \quad \frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_{n-1}} = x_{n-1} \qquad (\mu < n-1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_{n-1}} = -\frac{\partial \Delta}{\partial x_{n-1}} x_n + \frac{\partial \Delta}{\partial x_n} x_{n-1} = 0$$

rden Wegen der Symmetrie von Δ folgt ebenso für je zwei Indizes α l β

$$-\frac{\partial \Delta}{\partial x_\alpha} x_\beta + \frac{\partial \Delta}{\partial x_\beta} x_\alpha = 0.$$

Setzt man nun

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots, \qquad f_\nu(x) = \frac{f(x)}{x - x_\nu},$$

folgt aus (8) nach Division durch Δ wegen (3) und $f'(x_\nu) = f_\nu(x_\nu)$, $(x_\nu) = 2 f_\nu'(x_\nu)$

$$x_\beta \frac{f''(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} = x_\alpha \frac{f''(x_\beta)}{f'(x_\beta)}.$$

Ist nun etwa x_1 von Null verschieden und setzt man

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} = \gamma,$$

verschwindet das Polynom n-ten Grades $\gamma x f' - f''$ für alle n Null- llen von $f(x)$. Daher muß

$$\gamma x f' - f'' = \gamma n f$$

n. Durch Vergleichen der Koeffizienten von x^{n-1} und x^{n-2} erhält n hieraus

$$c_1 = 0, \qquad -2 c_2 \gamma = n(n-1),$$

l da

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = c_1^2 - 2 c_2 = 1$$

sein soll, so ergibt sich $2c_2 = -1$, also $\gamma = n(n-1)$. Folglich ist

$$n(n-1)xf' - f'' = n^2(n-1)f.$$

Setzt man nun $x\sqrt{n^2-n} = \xi_\nu$ und $\Pi(x-\xi_\nu) = g(x)$, so genügt

$$g(x) = (n^2-n)^{\frac{n}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{n^2-n}}\right)$$

der Differentialgleichung

$$xg' - g'' = ng,$$

die auch durch das Hermitesche Polynom H_n befriedigt wird. Durch diese Differentialgleichung ist aber das Polynom g bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Daher wird $g = H_n$ und folglich ist

$$(9) \qquad (n^2-n)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} M_n' = \Delta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = D_n$$

nichts anderes als die Diskriminante von $H_n = 0$.

Um nun D_n zu berechnen, hat man sich der bekannten, leicht zu beweisenden Formeln

$$(10) \qquad H_n' = nH_{n-1}, \qquad H_n - xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$$

zu bedienen. Bezeichnet man die Nullstellen von H_{n-1} mit η_β, so wird

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D_n = \prod_{\alpha=1}^{n} H_n(\xi_\alpha) = n^n \prod_{\alpha=1}^{n} H_{n-1}(\xi_\alpha) = n^n \prod_{\beta=1}^{n-1} H_n(\eta_\beta).$$

Aus der zweiten der Gleichungen (10) folgt daher

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D_n = (-1)^{n-1} n^n (n-1)^{n-1} \prod_{\beta=1}^{n-1} H_{n-2}(\eta_\beta).$$

Andererseits ist aber

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} D_{n-1} = (n-1)^{n-1} \prod_{\beta=1}^{n-1} H_{n-2}(\eta_\beta).$$

Dies ergibt wegen $D_2 = 4$

$$D_n = n^n D_{n-1} = 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n.$$

Aus (9) folgt nun die zu beweisende Formel (7).

Auf das Kugelgebiet (6) des n-dimensionalen Raumes läßt sich leicht auch ein beliebiges symmetrisches ellipsoidales Gebiet

$$E = a \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 + 2b \sum_{\varkappa<\lambda}^{n} x_\varkappa x_\lambda \leqq 1$$

zurückführen. Hierbei soll E eine positiv definite quadratische Form sein, was dann und nur dann der Fall ist, wenn $a > b > -\frac{a}{n-1}$ ist. Setzt man $\Sigma x_\nu = s_1$ und

$$\alpha = \frac{\sqrt{a+(n-1)b} - \sqrt{a-b}}{n}, \qquad \beta = \sqrt{a-b},$$

wird

$$E = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha s_1 + \beta x_\nu)^2.$$

eraus folgt unmittelbar:

II*. *Das Maximum von* $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *im Gebiete* $E \leq 1$ *ist gleich*

$$\frac{M_n'}{\beta^{n^2-n}} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n}{[(a-b)(n^2-n)]^{\frac{1}{2}(n^2-n)}}.$$

§ 3.

Das Maximum der Diskriminante in einigen anderen Gebieten.

III. *Für nicht negative reelle Größen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *die der Bedingung*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq 1$$

nügen, ist das Maximum M_n'' *von* $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *gleich*

1) $$M_n'' = \frac{2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1}}{(n^2-n)^{n^2-n}}.$$

Diesen Wert nimmt Δ *nur dann an, wenn die Größen* $(n^2-n)x_\nu$ *e Nullstellen des Polynoms*

$$G_n = \frac{x}{1!} - \binom{n-1}{1}\frac{x^2}{2!} + \binom{n-1}{2}\frac{x^3}{3!} - \ldots \pm \frac{x^n}{n!}$$

nd, das zu dem Laguerreschen Polynom

$$_{n-1} = \frac{e^x}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}(e^{-x}x^{n-1})}{dx^{n-1}} = 1 - \binom{n-1}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n-1}{2}\frac{x^2}{2!} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

der Beziehung $G_n = \int_0^x L_{n-1}\,dx$ *steht.*

Ähnlich wie im Falle des Satzes II müssen hier die Stellen x_1, $, \ldots, x_n$, für die $\Delta = M_n''$ wird, der Bedingung $\Sigma x_\nu = 1$ genügen. etzt man

$$x_1 = \cos^2\vartheta_1, \quad x_2 = \sin^2\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2, \ldots,$$

$$_{n-1} = \sin^2\vartheta_1 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\cos^2\vartheta_{n-1}, \quad x_n = \sin^2\vartheta_1 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\sin^2\vartheta_{n-1}$$

nd $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1})$, so wird wieder M_n'' das aximum der periodischen Funktion Ψ von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$. Da ins-esondere

$$\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \vartheta_{n-1}} = -\frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_n}, \quad \sin^2\vartheta_1 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\sin\vartheta_{n-1}\cos\vartheta_{n-1}\frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_{n-1}} = 2x_{n-1}x_n$$

wird, so muß an jeder Stelle, an der $\Delta = M_n''$ wird, wegen $\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta_{n-1}} = 0$

$$x_{n-1} x_n \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial \Delta}{\partial x_n} \right) = 0$$

und allgemein für je zwei Indizes α und β

$$x_\alpha x_\beta \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Delta}{\partial x_\beta} \right) = 0$$

sein. Setzt man wie in den früheren Fällen

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = x^n - c_1 x^{n-1} + \dots,$$

so ergibt sich hier

$$x_\alpha x_\beta \left(\frac{f''(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} - \frac{f''(x_\beta)}{f'(x_\beta)} \right) = 0.$$

Wären nun alle x_ν von Null verschieden, so müßten die n Ausdrücke $\frac{f''(x_\nu)}{f'(x_\nu)}$ einander gleich, etwa gleich γ sein. Das ist nicht möglich, da alsdann das Polynom $\gamma f' - f''$ des Grades $n-1$ die n Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ aufweisen würde. Es muß also eine der Zahlen x_ν, etwa x_n, verschwinden. Ist dann $\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} = \gamma$, so erhalten wir

$$\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{f''(x_2)}{f'(x_2)} = \dots = \frac{f''(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = \gamma.$$

Daher ist $x(\gamma f' - f')$ für alle n Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ gleich Null und also

$$x(\gamma f' - f'') = \gamma n f. \tag{12}$$

Das liefert insbesondere durch Vergleichen der Koeffizienten von x^{n-1} die Gleichung $n^2 - n = \gamma c_1$. Da nun $c_1 = \Sigma x_\nu = 1$ ist, so ergibt sich $\gamma = n^2 - n$. Setzt man demnach $(n^2 - n) x_\nu = \xi_\nu$ und

$$g(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - \xi_\nu) = (n^2 - n)^n f\left(\frac{x}{n^2 - n} \right),$$

so folgt aus (12)

$$x(g' - g'') = n g.$$

Durch diese Differentialgleichung ist das Polynom $g(x)$ wieder bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, und da auch das Polynom $G_n(x)$ ihr genügt, so ist $g(x) = \text{const.}\, G_n(x)$.

Es handelt sich also wieder nur darum, die Diskriminante

$$(n^2 - n)^{n^2 - n} M_n'' = \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = D_n$$

Wurzeln von $G_n(x) = 0$ zu berechnen. Auf Grund der leicht zu be-
senden Relationen

$$n G_n = (x - n + 1) G_n' + (n - 1) G_{n-1}',$$

$$(n - 1) G_n' - (2n - 3 - x) G_{n-1}' + (n - 2) G_{n-2}' = 0$$

ält man nun ganz ähnlich wie im Falle des § 1

$$D_n = n^n (n - 1)^{n-1} D_{n-1},$$

s wegen $D_2 = 4$ für D_n den Wert

$$D_n = 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n - 1)^{n-1}$$

l für M_n'' den in der Formel (11) angegebenen Wert liefert.

In ganz ähnlicher Weise wie bei den Hermiteschen Polynomen H_n
ibt sich für die Diskriminante der Nullstellen des Laguerreschen
lynoms L_n der Wert $2^3 \cdot 3^5 \cdot 4^7 \ldots n^{2n-1}$. Man hat sich hierbei der
eichungen

$$L_n' = -n L_{n-1}, \qquad n L_n - (2n - 1 - x) L_{n-1} + (n - 1) L_{n-2} = 0$$

bedienen.

Es sei noch erwähnt, daß man die Diskriminanten der hier vor-
mmenden Polynome F_n, H_n, G_n und L_n auch mit Hilfe eines von
eltjes[1]) und Herrn Hilbert[2]) angegebenen allgemeinen Satzes über
Diskriminante einer abbrechenden hypergeometrischen Reihe be-
hnen kann.

Auf einen weiteren Satz über $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat mich Herr G. Pólya
merksam gemacht:

IV. *Für komplexe Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren absolute Beträge
chstens gleich 1 sind, ist das Maximum von $|\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ gleich n^n,
d dieser Wert wird nur dann erreicht, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abgesehen
n einem gemeinsamen Faktor mit den n Wurzeln der Gleichung
$x^n - 1 = 0$ übereinstimmen.*

Der Beweis ergibt sich hier unmittelbar vermittelst der Gleichung

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left| x_\alpha^\beta \right|^2, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n,\ \beta = 0, 1, \ldots, n - 1)$$

dem man auf die rechts stehende Determinante den bekannten
damardschen Satz über den Maximalwert des absoluten Betrages
er Determinante, deren Elemente im Einheitskreise liegen, anwendet.

---

[1]) „Sur les polynômes de Jacobi", Comptes Rendus, Bd. 100 (1885), S. 620–622.
[2]) „Über die Diskriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen
he", Journal f. Math., Bd. 103 (1888), S. 337—345.

§ 4.

Einführung einiger abkürzender Bezeichnungen.

Bei den im folgenden zu behandelnden Gleichungen

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{13}$$

sollen die Koeffizienten a_ν stets als ganze rationale Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler 1 vorausgesetzt werden. Den ersten Koeffizienten a_0 nehme ich als positiv an. Die n Wurzeln von (13) bezeichne ich zumeist mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und die Potenzsumme Σx_ν^m mit s_m.

Definition. *Von einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante sage ich, sie gehöre*

1. *zur Klasse R, wenn ihre Wurzeln alle reell sind;*
2. *zur Klasse P, wenn sie nur positive reelle Wurzeln besitzt;*
3. *zur Klasse E, wenn ihre Wurzeln sämtlich vom absoluten Betrage 1 sind.*

Die noch zu betrachtende vierte Klasse K soll ferner alle ganzzahligen Gleichungen umfassen, deren Wurzeln sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen, wobei (im Gegensatz zu den drei anderen Fällen) auch mehrfache Wurzeln vorkommen dürfen.

Unter $R(a)$ verstehe ich die Gesamtheit der Gleichungen der Klasse R, bei denen der erste Koeffizient a_0 den vorgeschriebenen Wert a hat. Das Zeichen $R(|w| \leqq \lambda)$ soll ferner die Menge aller Gleichungen von R kennzeichnen, deren Wurzeln im Intervall $-\lambda \leqq x \leqq \lambda$ liegen. Soll außerdem noch a_0 den vorgeschriebenen Wert a haben, so spreche ich von der Teilklasse $R(a; |w| \leqq \lambda)$ von R. Ähnliche Bezeichnungen gelten auch für die Klassen P, E und K.

Diese vier Klassen von Gleichungen hängen in gewisser Weise zusammen. Gehört nämlich $f(x) = 0$ zur Klasse P, so ist $f(x^2) = 0$ eine Gleichung der Klasse R. Ist ferner (13) eine Gleichung der Klasse E und sind alle x_ν von ± 1 verschieden, so ist $n = 2m$ eine gerade Zahl und $a_\nu = a_{n-\nu}$. Unter den Größen

$$y_\nu = x_\nu + x_\nu^{-1} = 2\,\Re(x_\nu)$$

sind nur m voneinander verschieden und diese genügen der Gleichung

$$g(y) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + (a_2 - m a_0) y^{m-2} + \ldots = 0, \tag{14}$$

die zur Klasse $R(|w| < 2)$ gehört. Ist umgekehrt $g(y) = 0$ eine Gleichung dieser Klasse, deren Grad m ist, so ist die Gleichung $x^m g(x + x^{-1}) = 0$ in E enthalten. Die Gl. (14) nenne ich die zu (13) *assoziierte Gleichung*

zeichnet man die zu ihr gehörenden Potenzsummen mit $t_1, t_2, \ldots$, so rd insbesondere

$$t_1 = s_1, \qquad t_2 = s_2 + 2m.$$

Ist ferner (13) eine Gleichung der Klasse K, so gehören die beiden eichungen

$$f(x) \pm x^m f(x^{-1}) = 0$$

r Klasse E. Für je zwei ganze Zahlen α und β, die der Bedingung $|\alpha| > |\beta|$ genügen, ist außerdem zugleich mit $f(x) = 0$ auch die Gleichung

$$\alpha f(x) + \beta x^n f(x^{-1}) = 0$$

K enthalten. Insbesondere gehört $f(x) = 0$ dann und nur dann zur lasse K, wenn die Gleichung

$$\frac{1}{x}(a_0 f(x) - a_n x^n f(x^{-1})) = 0$$

s Grades $n - 1$ diese Eigenschaft hat[3]).

Es sei noch erwähnt, daß man unter Benutzung dieser Bezeichnungen nen bekannten wichtigen Satz von Kronecker[4]) kurz so aussprechen nn: *Jede Wurzel einer Gleichung der Klasse $E(1)$ ist eine Einheitswurzel.*

§ 5.

ber das kleinste Intervall, in dem die Wurzeln einer Gleichung der Klasse K liegen.

Setzt man zur Abkürzung

$$n' = 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n = e^{2\log 2 + 3\log 3 + \ldots + n\log n}$$

nd deutet, wenn α_n und β_n zwei Zahlenfolgen sind, im Anschluß an be- annte von P. Bachmann und E. Landau eingeführte Bezeichnungen durch

$$\alpha_n = \Omega(\beta_n)$$

n, daß $\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ existieren und von Null verschieden sein soll, so ergibt ch mit Hilfe der Eulerschen Summationsformel

15) $$n' = \Omega\left(n^{\frac{1}{2}(n^2+n)+\frac{1}{12}} e^{-\frac{n^2}{4}}\right).$$

---

[3]) Diese Sätze habe ich in meiner Arbeit, „Über Potenzreihen, die im Innern es Einheitskreises beschränkt sind", Journ.. f. Math., Bd. 147 (1917), S. 205—232 vgl. insbesondere S. 208 und 230) bewiesen.

[4]) „Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coeffizienten", Werke, Bd. 1, . 105—108. Vgl. auch Hilbert, „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahl- örper" Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4 (1897), S. 221.

Die in § 1 bestimmte Zahl M_n läßt sich nun in der Form

$$M_n = 2^{n^2+n} \frac{(2n-1)^{2n-1}}{(n-1)^{n-1} n^n} \frac{n'^4}{(2n)'}$$

schreiben. Hieraus folgt wegen (15) ohne Mühe

$$M_n = \Omega\left(\frac{n^{n+\frac{1}{4}}}{2^{n^2-2n}}\right) < c \frac{n^{n+\frac{1}{4}}}{2^{n^2-2n}}, \tag{16}$$

wo c eine gewisse Konstante bedeutet.

Es sei nun, wenn α, β und γ drei positive Konstanten sind, eine Gleichung (13) der Klasse R gegeben, die den Bedingungen

$$a_0 \leqq \alpha \beta^n, \qquad |x_\nu| \leqq \gamma \qquad (\nu = 1.\ 2.\ \ldots,\ n;\ n \geqq 2)$$

genügt. Für die Diskriminante

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

der Gleichung besteht dann die Ungleichung

$$D \leqq \alpha^{2n-2} \beta^{2n^2-2n} \gamma^{n^2-n} M_n,$$

also wegen (16), da D eine positive ganze Zahl ist[5]),

$$1 \leqq D < c \cdot 2^n \alpha^{2n-2} \left(\frac{\beta^2 \gamma}{2}\right)^{n^2-n} n^{n+\frac{1}{4}}. \tag{17}$$

Ist nun $\beta^2 \gamma < 2$, so konvergiert dieser Ausdruck mit wachsendem n gegen 0 und ist also, abgesehen von endlich vielen Werten $n = 2, 3, \ldots, N$, kleiner als 1. Für $n > N$ kann daher (17) nicht gelten. Ist aber $n \leqq N$, so ist

$$|a_\nu| = a_0 \left| \sum x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_\nu} \right| \leqq \alpha \beta^n \binom{n}{\nu} \gamma^n,$$

also unterhalb einer allein von α, β und γ abhängenden Schranke gelegen. Daher kommen für die ganzen Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ nur endlich viele Werte in Betracht. Wir erhalten also:

V. *Sind α, β, γ drei positive Konstanten und ist $\beta^2 \gamma < 2$, so gibt es unter den Gleichungen*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0) \tag{18}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln (für die Gesamtheit aller Gradzahlen n)[6]) *nur endlich*

---

[5]) Es ist sogar, wie Herr Hilbert, „Über diophantische Gleichungen", Gött. Nachrichten 1897, S. 48—54, bewiesen hat, abgesehen von gewissen nur bei $n \leqq 3$ vorkommenden Ausnahmefällen, $D > 1$.

[6]) Daß der vorhin ausgeschlossene Fall $n = 1$ keine Ausnahme bildet, ist ohne weiteres klar.

le, bei denen $a_0 \leqq \alpha\beta^n$ ist und die Wurzeln alle im Intervall $\gamma \leqq x \leqq \gamma$ liegen.

Hieraus ergibt sich insbesondere, daß bei vorgeschriebenem a_0 die asse $R(a_0; |w| \leqq \gamma)$ für $\gamma < 2$ nur endlich viele Gleichungen (eventuell ine) enthalten kann. Für $\gamma = 2$ ist das aber, wie auch a_0 gewählt rd, nicht mehr der Fall. Denn wählt man für a_1 irgendeine zu a_0 lerfremde Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, a_0 - 1$, so ist für jedes n

$$h(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} = 0$$

ne Gleichung der Klasse K und demnach (vgl. § 4)

$$h(x) + x^{2n} h(x^{-1}) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_1 x + a_0 = 0$$

der Klasse $E(a_0)$ enthalten[7]). Die hierzu assoziierte Gleichung gehört nn zur Klasse $R(a_0; |w| \leqq 2)$. Wir können also den Satz aussprechen:

VI. *Bei gegebenem a_0 gibt es für $0 < \gamma < 2$ nur endlich viele, dagen für $\gamma \geqq 2$ unendlich viele Gleichungen* (18) *mit ganzzahligen Kofizienten, deren Wurzeln sämtlich reell, voneinander verschieden und in m Intervall $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$ gelegen sind.*

Am kürzesten kann man diesen Satz so formulieren:

VI*. *Für jedes a_0 ist in der Klasse $R(a_0)$*

$$\lambda = \operatorname{Lim\,inf} \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = 2^{8}).$$

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß für $a_0 = 1$ der Satz VI ch aus dem am Schluß des § 4 erwähnten Satze von Kronecker ergibt. enn sind die Wurzeln x_ν der Gleichung (18) reell, voneinander verschieden id im Intervall $-2 \leqq x \leqq 2$ gelegen, so genügen, wenn $x_\nu = 2\cos\varphi_\nu$ $\leqq \varphi_\nu \leqq \pi$) gesetzt wird, die $2n$ Größen $e^{i\varphi_\nu}$ und $e^{-i\varphi_\nu}$ der Gleichung

$$F(x) = x^n f(x + x^{-1}) = x^{2n} + b_1 x^{2n-1} + \ldots = 0$$

id sind daher Einheitswurzeln. Ist aber $|x_\nu| \leqq \gamma < 2$, so lassen sich zwei lein von γ abhängende Zahlen λ und μ angeben, so daß $0 < \lambda \leqq \varphi_\nu \leqq \mu < \pi$ rd. Es gibt aber nur endlich viele Einheitswurzeln $e^{i\varphi_\nu}$, die mit allen njugiert algebraischen Zahlen dieser Bedingung genügen.

Eine weitere interessante Folgerung aus dem Satze V ergibt sich,

---

[7]) Für $a_0 = 1$ hat man hierbei $a_1 = 0$ zu setzen.

[8]) Diese Zahl λ kann entweder als die kleinste Häufungsstelle der Menge aller Betracht kommenden Zahlen $M = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ oder auch etwas nauer so gedeutet werden: Man denke sich die sämtlichen Gleichungen der Klasse (a_0) nach dem bekannten Cantorschen Verfahren als abzählbare Folge $G_1 = 0$, $= 0, \ldots$ angeordnet. Bestimmt man dann für $G_\nu = 0$ die zugehörige Zahl M_ν, ist $\lambda = \operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \operatorname{inf} M_\nu$.

indem man $\gamma = 1$ setzt. Es handelt sich dann also um Gleichungen der Klasse $R(|w| \leqq 1)$. Auf derartige Gleichungen führen insbesondere die Kugelfunktionen und andere in der Analysis häufig vorkommende Polynome. Die Bedingung $\beta^2\gamma < 2$ lautet hier $\beta < \sqrt{2}$ und aus V folgt insbesondere, daß für die Klasse $R(|w| \leqq 1)$

$$\lambda' = \operatorname{Lim\,inf} \sqrt[n]{a_0} \geqq \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$

ist. Daß $\lambda' \leqq 2$ ist, lehrt schon die Betrachtung der Gleichungen

$$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1}x^n + \ldots = 0.$$

Man kann aber noch eine etwas genauere Abschätzung erhalten. Es seien nämlich

$$Q_\nu(x) = a_0^{(\nu)}x^\nu + a_1^{(\nu)}x^{\nu-1} + \ldots$$

die durch die Rekursionsformel

$$Q_{\nu+1} = (2x-1)Q_\nu + (x^2-x)Q_{\nu-1}, \qquad Q_0 = 1, \qquad Q_1 = 2x-1$$

bestimmten Polynome. Man erkennt leicht, daß die Funktionen

$$Q_n,\ Q_{n-1},\ \ldots,\ Q_0 \tag{19}$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eine zu Q_n gehörende Sturmsche Kette im allgemeineren Sinne darstellen. Da ferner $F_\nu(0) = (-1)^\nu$, $F_\nu(1) = 1$ ist, so gehen in (19) beim Übergang von 0 zu 1 genau n Vorzeichenwechsel verloren. Daher sind die Wurzeln von $Q_n(x) = 0$ reell, voneinander verschieden und im Intervall $0 < x < 1$ enthalten. Die Gleichung $Q_\nu(x^2) = 0$ des Grades 2ν gehört daher zur Klasse $R(|w| < 1)$ und ihr erster Koeffizient $a_0^{(\nu)}$ bestimmt sich vermittelst der Rekursionsformel

$$a_0^{(\nu+1)} = 2a_0^{(\nu)} + a_0^{(\nu-1)}, \qquad a_0^{(0)} = 1, \qquad a_0^{(1)} = 2.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise

$$a_0^{(\nu)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{\nu+1} - (1-\sqrt{2})^{\nu+1}\right],$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[2\nu]{a_0^{(\nu)}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die zu untersuchende Größe λ' im Intervall

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots \leqq \lambda' \leqq \sqrt{1+\sqrt{2}} = 1{,}553\ldots$$

liegt. Dieses Ergebnis können wir ausführlicher folgendermaßen ausdrücken:

VII. *Hat man eine Folge von unendlich vielen Gleichungen*

$$c_0^{(\nu)}x^{n_\nu} + c_1^{(\nu)}x^{n_\nu-1} + \ldots = 0 \qquad (c_0^{(\nu)} > 0)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschie-

en Wurzeln, die im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ *liegen, so können für* $< \sqrt{2}$ *die Quotienten* $\frac{c_0^{(\nu)}}{\beta^{n_\nu}}$ *nicht unterhalb einer endlichen Schranke iben, dagegen kann dies für* $\beta \geqq \sqrt{1+\sqrt{2}}$ *eintreten.*

Auf eine Verallgemeinerung des Satzes VI hat mich Herr G. Pólya merksam gemacht:

VI**. *Ist* $p \leqq x \leqq q$ *ein gegebenes Intervall, dessen Länge* $q-p$ *iner als 4 ist, so kann es bei vorgeschriebenem* a_0 *nur endlich viele ichungen* (18) *mit ganzzahligen Koeffizienten geben, deren Wurzeln ntlich reell, voneinander verschieden und in diesem Intervall ge- en sind.*

Setzt man nämlich $\frac{1}{2}(p+q) = x_0$, $\frac{1}{2}(q-p) = \gamma$, so wird $|x_\nu - x_0|$ $\gamma < 2$ und daher

$$1 \leqq D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1 - x_0,\ x_2 - x_0,\ \ldots,\ x_n - x_0)$$
$$\leqq a_0^{2n-2} \gamma^{n^2-n} M_n < c a_0^{2n-2} \cdot 2^n \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n^2-n} n^{n+\frac{1}{4}}.$$

ser Ausdruck konvergiert wieder mit wachsendem n gegen 0 und daher n die Ungleichung nur für endlich viele Werte $n \leqq N$ erfüllt sein. Aus

$$|x_\nu| \leqq |x_0| + \gamma, \qquad |a_\nu| = a_0 \left| \sum x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_\nu} \right| \leqq a_0 \binom{n}{\nu} (|x_0| + \gamma)^\nu$$

gt dann wie früher, daß nur endlich viele Gleichungen in Betracht nmen.

§ 6.

er das arithmetische Mittel der Quadrate der Wurzeln einer Gleichung der Klasse R.

Aus der Formel (15) ergibt sich für das in § 2 bestimmte Maximum M_n $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ im Gebiete $\Sigma x_\nu^2 \leqq 1$

$$M_n' = \frac{n'}{(n^2-n)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}}$$
$$= \Omega\left(n^{\frac{1}{2}(3n-n^2)+\frac{1}{12}} e^{\frac{1}{2}(2n-n^2)}\right) < c' \cdot n^{\frac{1}{2}(3n-n^2)+\frac{1}{12}} e^{\frac{1}{2}(2n-n^2)},$$

c' wieder eine Konstante bedeutet. Sind nun wieder α, β, γ drei ge- ene positive Zahlen und betrachtet man eine Gleichung (18) der sse R, die den Bedingungen

$$a_0 \leqq \alpha \beta^n, \qquad s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq \gamma n$$

ügt, so wird

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq \alpha^{2n-2} \beta^{2n^2-2n} (\gamma n)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} M_n',$$

also

$$1 \leqq D < c' \alpha^{2n-2} e^{\frac{n}{4}} n^{n+\frac{1}{12}} \left(\frac{\beta^4 \gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

Für $\beta^4 \gamma < e^{\frac{1}{2}}$ konvergiert dies gegen Null und die Ungleichung kann daher, sobald n eine gewisse Zahl N übertrifft, nicht mehr bestehen. Für $n \leqq N$ ist ferner wegen $x_\nu^2 \leqq \gamma n$

$$|a_r| = a_0 \left| \sum x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \dots x_{\lambda_r} \right| \leqq \alpha \beta^n \cdot \binom{n}{r} (\gamma n)^{\frac{r}{2}}$$

unterhalb einer endlichen Schranke gelegen. Hieraus folgt:

VIII. *Sind α, β, γ drei positive Konstanten und $\beta^4 \gamma < e^{\frac{1}{2}}$, so kann es nur endlich viele Gleichungen*[9]) (18) *mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ geben, die den Bedingungen*

$$a_0 \leqq \alpha \beta^n, \qquad \frac{a_1^2 - 2 a_0 a_2}{n a_0^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \leqq \gamma$$

genügen.

Insbesondere enthält also bei gegebenem a_0 die Klasse $R(a_0)$ für $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ nur endlich viele Gleichungen, bei denen $s_2 \leqq \gamma n$ wird. Daß dies für $\gamma \geqq 2$, wie auch a_0 gewählt wird, nicht mehr richtig ist, erkennt man folgendermaßen. Setzt man b für $a_0 = 1$ gleich 0 und für $a_0 > 1$ gleich 1, so gehört die Gleichung

$$a_0 x^{2n} + b x^n + a_0 = 0$$

zur Klasse E und die assoziierte Gleichung, die hier die Form

$$a_0 x^n - n a_0 x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} a_0 x^{n-4} + \dots + b + \varepsilon_n a_0 = 0 \tag{20}$$

$(\varepsilon_n = 0, 2 \text{ oder } -2)$

hat, zur Klasse R (vgl. § 4). Für $n > 2$ wird nun bei dieser Gleichung $s_2 = 2n$. Wir können also den Satz aussprechen:

IX. *Bei vorgeschriebenem a_0 gibt es für*

$$\gamma < e^{\frac{1}{2}} = 1{,}6487 \dots$$

nur endlich viele, dagegen für $\gamma \geqq 2$ unendlich viele Gleichungen (18) *mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$, die der Bedingung*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \leqq \gamma$$

genügen.

Ähnlich wie im vorigen Paragraphen können wir auch sagen:

[9]) Wenn hier und im folgenden von endlich oder unendlich vielen Gleichungen gesprochen wird, so ist das stets so gemeint, daß ihr Grad nicht festgehalten werden soll.

IX*. *Für jedes a_n ist in der Klasse $R(a_0)$*

$$e^{\frac{1}{2}} \leqq \operatorname{Lim\,inf} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \leqq 2.$$

Daß dieser Limes inferior, den ich mit $\lambda_2(a_0)$ bezeichnen will, ıdestens gleich 1 sein muß, ist leicht einzusehen. Denn nehmen wir, s offenbar zulässig ist, alle x_ν als von 0 verschieden an, so wird

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > (x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a_n^2}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{1}{a_0^{2/n}},$$

l da $a_0^{2/n}$ mit wachsendem n gegen 1 konvergiert, so ist gewiß $\lambda_2(a_0) \geqq 1$ wirkt aber überraschend, daß man hier 1 durch die wesentlich größere hl $e^{\frac{1}{2}}$ ersetzen kann.

Der Satz IX läßt sich in ähnlicher Weise, wie das beim Satze VI Anregung des Herrn Pólya geschehen war, noch etwas verallgemeinern:

IX**. *Bei vorgeschriebenem a_0 läßt sich zu jedem positiven $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ e Zahl $N = N(a_0, \gamma)$ bestimmen, so daß für $n \geqq N$ in jeder ganz-ligen Gleichung mit dem höchsten Gliede $a_0 x^n$ und lauter reellen, einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bei beliebig gewähltem x_0*

$$\frac{S_2(x_0)}{n} = \frac{(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + \ldots + (x_n - x_0)^2}{n} > \gamma$$

rd. *Hält man außerdem noch x_0 fest, so kann es nur endlich viele ichungen dieser Art geben, für die $S_2(x_0) \leqq n\gamma$ wird.*

Der Beweis ergibt sich wieder, indem man die Diskriminante D der ichung in der Form

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1 - x_0,\ x_2 - x_0,\ \ldots,\ x_n - x_0)$$

reibt. Soll $S_2(x_0) \leqq n\gamma$ sein, so muß

$$1 \leqq D \leqq a_0^{2n-2} (n\gamma)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} M_n' < c' a_0^{2n-2} e^{\frac{n}{4}} n^{n+\frac{1}{12}} \left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

n. Für $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ kann diese Ungleichung, sobald n eine gewisse Schranke (a_0, γ) übertrifft, nicht mehr bestehen. Hierbei ist $N(a_0, \gamma)$ von x_0 ıbhängig. Bei festgehaltenem x_0 führt auch die Annahme $n \leqq N(a_0, \gamma)$ gen $|x_\nu| \leqq |x_0| + \sqrt{n\gamma}$ nur auf endlich viele Gleichungen, für die $x_0) \leqq n\gamma$ sein kann.

Der erste Teil dieses Satzes besagt nur, daß für $n > N$ das Mini-ım von

$$S_2(x_0) = s_2 - 2 s_1 x_0 + n x_0^2$$

größer als $n\gamma$ ist. Dieses Minimum wird für $x_0 = \frac{s_1}{n}$ erreicht und hat den Wert $s_2 - \frac{s_1^2}{n}$. *Für $n > N(a_0, \gamma)$ ist daher*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \gamma + \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2. \tag{21}$$

Will man für ein gegebenes $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$, z. B. für $\gamma = 1{,}5$, eine einigermaßen brauchbare Abschätzung für $N(a_0, \gamma)$ erhalten, so empfiehlt es sich, nicht von der Formel (15) Gebrauch zu machen, sondern folgendermaßen zu schließen. Setzt man

$$\mu_n = a_0^{2n-2}(n\gamma)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}\, M_n' = a_0^{2n-2}\gamma^{\frac{1}{2}(n^2-n)}\frac{n'}{(n-1)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}},$$

so wird

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = a_0^2\gamma^n(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} < a_0^2\gamma^n(n+1)\cdot e\cdot e^{-\frac{1}{2}(n^2-n)\cdot\frac{1}{n}},$$

also

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} < (n+1)\, e^{\frac{3}{2}} a_0^2 \left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^n.$$

Hieraus folgt

$$\mu_n < n!\, e^{\frac{3n-3}{2}} a_0^{2n-2}\left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} < \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+1}\cdot e^{\frac{3n-3}{2}} a_0^{2n-2}\left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}.$$

Es ist also gewiß $\mu_n < 1$, sobald

$$2(n-1)\log a_0 + \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n < \frac{n^2-n}{2}\log\left(\gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}}\right)$$

wird. Beachtet man nun, daß für $n > e^3 = 20{,}08\ldots$

$$\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\log n < \frac{n-1}{2},$$

so erkennt man (nach Division durch $n-1$), daß es nur darauf ankommt, eine Zahl $N(a_0, \gamma) > e^3$ zu bestimmen, so daß

$$1 + 2\log a_0 + \log N < \frac{N}{2}\log\left(\gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}}\right)$$

wird. Für $\gamma = 1{,}5$ und $\gamma = 1{,}53$ habe ich auf diese Weise gefunden, daß es jedenfalls genügt,

$$N(a_0, 1{,}5) \geqq 130\,(1 + 2\log a_0), \qquad N(a_0, 1{,}53) \geqq 170\,(1 + 2\log a_0)$$

zu setzen. *Im Falle $a_0 = 1$ ist also insbesondere für $n \geqq 130$*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \frac{3}{2} + \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

§ 7.

Über Gleichungen mit positiven reellen Wurzeln.

Gehört die Gleichung

$$2) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = 0 \quad (a_0 > 0)$$

r Klasse P, so ist

$$f(x^2) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + \ldots + a_n = a_0 \prod_{\mu=1}^{2n} (x - y_\mu) = 0$$

ie Gleichung der Klasse R, und hierbei wird das arithmetische Mittel r Quadrate der y_μ gleich dem arithmetischen Mittel der x_ν. Wendet man f $f(x^2) = 0$ die Sätze der §§ 5 und 6, so ergeben sich analoge Aus-gen über $f(x) = 0$. Der Satz VI liefert unter Berücksichtigung des satzes VI** nichts Neues. Dagegen ergeben sich aus VII und IX Folge-ngen, die hervorgehoben zu werden verdienen.

X *Hat man eine Folge von unendlich vielen Gleichungen*

$$c_0^{(\nu)} x^{n_\nu} + c_1^{(\nu)} x^{n_\nu - 1} + \ldots = 0 \qquad (c_0^{(\nu)} > 0)$$

t ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, positiven Wurzeln, die neinander verschieden und höchstens gleich 1 sind, so können für $\beta < 2$ e Quotienten $\frac{c_0^{(\nu)}}{\beta^{n_\nu}}$ nicht unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, gegen kann dies für $\beta \geqq 1 + \sqrt{2} = 2{,}414\ldots$ eintreten.

XI. *Bei vorgeschriebenem a_0 gibt es für $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ nur endlich viele, gegen für $\gamma \geqq 2$ unendlich viele Gleichungen (22) mit ganzzahligen oeffizienten und lauter reellen positiven, voneinander verschiedenen urzeln, für die*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqq \gamma$$

rd

Um ein System von unendlich vielen Gleichungen der Klasse $P(a_0)$ erhalten, die der Bedingung $\Sigma x_\nu = 2n$ genügen, hat man nur in dem eispiel (20) des vorigen Paragraphen n durch $2n$ und x^2 durch x zu setzen. Das liefert für jedes n eine Gleichung

$$3) \quad a_0 x^n - 2n a_0 x^{n-1} + n(2n-3) a_0 x^{n-2} - \ldots + (b \pm 2a_0) = 0$$

r gewünschten Art.

Man kann die Sätze X und XI wieder kurz zusammenfassen:

Für die Klasse $P(w \leqq 1)$ ist

$$2 \leqq \operatorname{Lim\,inf} \sqrt[n]{a_0} \leqq 1 + \sqrt{2},$$

ferner ist bei gegebenem a_0 für die Klasse $P(a_0)$

$$e^{\frac{1}{2}} \leqq \text{Lim inf} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqq 2.$$

Die Untersuchung des arithmetischen Mittels der x_ν läßt sich auch ohne Benutzung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen mit Hilfe des Satzes III durchführen, doch erhält man hierbei, wie aus

$$(n\gamma)^{n^2-n} M_n'' = \gamma^{n^2-n} \frac{n'^2}{n^n (n-1)^{n^2-n}} = \Omega\left(e^{\frac{n}{2}} n^{n+\frac{1}{6}} \left(\gamma e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n^2-n}\right)$$

hervorgeht (vgl. die Formeln (11) und (15)), kein besseres Resultat.

Von Interesse ist noch folgender Satz:

XII. *Bei vorgeschriebenem a_0 gibt es für*

$$\delta < e^{\frac{1}{2}} + e = 4{,}367\ldots$$

nur endlich viele, dagegen für $\delta \geqq 6$ unendlich viele Gleichungen (22) mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, positiven Wurzeln, die voneinander verschieden sind und der Bedingung

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \leqq \delta$$

genügen. Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Für die Klasse $P(a_0)$ ist

$$e^{\frac{1}{2}} + e \leqq \text{Lim inf} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \leqq 6. \tag{24}$$

Auf die untere Schranke $e^{\frac{1}{2}} + e$ wird man geführt, indem man auf die Gleichung (22) die Formel (21) in Verbindung mit dem Satze XI anwendet. Betrachtet man andererseits die Gleichungen (23) der Klasse $P(a_0)$, so wird hier für jedes $n > 2$

$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 4n^2 - 2n(2n-3) = 6n.$$

Ebenso wie im Falle des vorigen Paragraphen ist es mir bis jetzt nicht gelungen, die Abschätzung des Limes inferior (24) genauer durchzuführen.

§ 8.

Die Gleichungen der Klassen E und K.

Es sei

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu) = 0 \quad (a_0 > 0 \tag{25}$$

eine Gleichung der Klasse E, d. h. eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Wurzeln z_ν voneinander verschieden und vom absoluten Betrage 1 sind. Ich nehme noch an, daß unter den z_ν die Zahlen $\pm$

ht vorkommen und $a_1 \geqq 0$ ist. Das letztere kann durch die Sub-
ution $z \mid -z$ stets erreicht werden. Die der ebenfalls zu E gehörenden
ichung $f(z^2) = 0$ entsprechende assoziierte Gleichung der Klasse R
l. § 4) hat die Form

$$) \qquad a_0 x^n + (a_1 - n a_0) x^{n-2} + \ldots = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = 0,$$

l es ist insbesondere

$$s_2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 = 2n - \frac{2a_1}{a_0} = 2n - 2 \left| \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \right|.$$

Ist nun $0 < \gamma < e^{\frac{1}{2}}$, so gibt es bei vorgeschriebenem a_0 nach Satz IX
endlich viele Gleichungen (26), für die $s_2 \leqq n\gamma$ wird. Daher gibt es
h nur endlich viele Gleichungen (25) der Klasse E, für die

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} \right| \geqq 1 - \frac{\gamma}{2}$$

d, und das gilt offenbar auch, wenn ich die Annahme $z_\nu \neq \pm 1$, $a_1 \geqq 0$
e lasse.

Gehört ferner die Gleichung (25) zur Klasse K, so ist

$$') \quad z^2 f(z) + z^n f(z^{-1}) = a_0 z^{n+2} + a_1 z^{n+1} + (a_2 + a_n) z^n + \ldots = 0$$

e Gleichung der Klasse E, bei der die Summe der Wurzeln gleich
$_\nu$ ist. Wird nun a_0 festgehalten und ist $0 < \gamma < e^{\frac{1}{2}}$, so läßt sich, wie
dem vorhin Bewiesenen folgt, zu jedem γ' zwischen γ und $e^{\frac{1}{2}}$ eine
l N' angeben, so daß für $n > N'$ das arithmetische Mittel der Wurzeln
(27) absolut kleiner als $1 - \frac{\gamma'}{2}$ wird. Ist nun

$$N \geqq N', \qquad N \geqq \frac{4 - 2\gamma'}{\gamma' - \gamma},$$

wird für $n > N$

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} \right| < \frac{n+2}{n} \left(1 - \frac{\gamma'}{2}\right) < 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

endlich vielen n, die eine Ausnahme bilden können, führen, da die
asse $K(a_0)$ überhaupt nur endlich viele Gleichungen eines vorgegebenen
ades enthält, nur auf endlich viele Gleichungen $f(z) = 0$.

Wir können also den Satz aussprechen:

XIII. *Ist a_0 eine gegebene ganze Zahl und* (25) *eine Gleichung mit*
zzahligen Koeffizienten, deren Wurzeln entweder alle vom absoluten
rage 1 und voneinander verschieden sind oder sämtlich im Innern des
nheitskreises liegen (wobei auch mehrfache Wurzeln vorkommen können),

so liegt für jede Zahl $\varrho > 1 - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$ *der Schwerpunkt* $\frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$ *der Wurzelpunkte, abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen, im Innern des Kreises* $|z| \leqq \varrho$. *Für jede der beiden Klassen* $E(a_0)$ *und* $K(a_0)$ *ist also bei vorgeschriebenem* a_0

$$\text{(28)} \qquad \text{Lim sup} \left| \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} \right| \leqq 1 - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = 0{,}1756\ldots$$

Hieraus folgt z. B. leicht, daß bei gegebenem a_0 in beiden Fällen nur endlich viele Gleichungen existieren können, für die mehr als vier Fünftel der Wurzeln in der Halbebene $\Re(z) \geqq \frac{1}{2}$ liegen.

Für $a_0 = 1$ kommt nur die Klasse $E(1)$ in Betracht und aus dem in § 4 erwähnten Satze von Kronecker folgt auf Grund bekannter Eigenschaften der Einheitswurzeln, daß in diesem Falle der Limes superior (28) gleich 0 ist. Ob dies auch für $a_0 > 1$ richtig ist, habe ich bis jetzt nicht entscheiden können.

Einen weiteren hierher gehörigen Satz verdanke ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn G. Pólya:

XIV. *Sind* α *und* β *gegebene positive Konstanten, und betrachtet man die Gesamtheit aller Gleichungen* (25) *mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante, für die* $a_0 < \alpha\beta^n$ *ist, so können, sobald* n *eine gewisse Schranke übertrifft, nicht alle Wurzeln in einem Kreise liegen, dessen Radius kleiner als* $\frac{1}{\beta^2}$ *ist. Ist ferner* C *ein gegebener Kreis mit dem Radius* $r < 1$, *so kann es bei vorgeschriebenem* a_0 *nur endlich viele Gleichungen* (25) *mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante geben, deren Wurzeln sämtlich in* C *liegen.*

Der Beweis ergibt sich auf Grund des Satzes IV ganz ebenso wie in den früheren Fällen. Man hat hierbei nur zu beachten, daß $r^{n^2-n} n^n$ für $0 < r < 1$ mit wachsendem n dem Grenzwert 0 zustrebt.

§ 9.

Anwendungen auf total reelle algebraische Zahlkörper.

Ein algebraischer Zahlkörper $\mathsf{K} = \mathsf{P}(\vartheta)$ des Grades n heißt bekanntlich *total reell*, wenn K und die zu K konjugierten Körper nur reelle Zahlen enthalten. Ist ξ eine Zahl von K, so mögen die zu ξ konjugierten Zahlen mit $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n-1)}$ und die rationalen Zahlen

$$S(\xi) = \xi + \xi' + \ldots + \xi^{(n-1)}, \qquad N(\xi) = \xi\xi' \ldots \xi^{(n-1)}$$

wie üblich als die Spur und die Norm von ξ bezeichnet werden. Ebenso soll, wenn $\mathfrak{a}$ ein (ganzes) Ideal des Körpers ist, unter $N(\mathfrak{a})$ die Norm von $\mathfrak{a}$ verstanden werden.

Aus dem Satze VII ergibt sich zunächst:

XV. *Es sei $r < \sqrt{2}$ eine positive Konstante und $\mathfrak{a}$ ein Ideal des al reellen) Körpers* K. *Sind dann α und β zwei von Null verschiedene, ch $\mathfrak{a}$ teilbare ganze Zahlen von* K, *die den Bedingungen*

$$|\beta^{(\nu)}| < |\alpha^{(\nu)}|, \quad |N(\alpha)| \leqq r^n N(\mathfrak{a}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ügen, so können die n Zahlen $\frac{\beta^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}$ nicht voneinander verschieden sein. e Ausnahme kann nur für endlich viele Körper K *und bei jedem ihnen nur für endlich viele Zahlen $\frac{\beta}{\alpha}$ eintreten.*

Betrachtet man nämlich die Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} (x\alpha^{(\nu)} - \beta^{(\nu)}) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

sind $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ganze rationale Zahlen, deren größter gemeinsamer ler gleich der Norm $N(\mathfrak{d})$ des größten gemeinsamen Idealteilers $\mathfrak{d} = (\alpha, \beta)$ Zahlen α und β ist[10]). Nach Division durch $N(\mathfrak{d})$ entsteht eine Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ganzen rationalen Koeffizienten, in der

$$|a_0| = \frac{|N(\alpha)|}{N(\mathfrak{d})} \leqq \frac{|N(\alpha)|}{N(\mathfrak{a})} \leqq r^n$$

Die Wurzeln $\frac{\beta^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}$ dieser Gleichung sind reell und absolut kleiner als 1. langt man nun noch, daß sie voneinander verschieden sein sollen, so mmen nach Satz VII nur endlich viele Gleichungen (29) und also auch endlich viele Zahlen $\frac{\beta}{\alpha}$ in Betracht. Außerdem ist jede dieser Aus-mezahlen eine erzeugende Größe des zu betrachtenden Körpers K. raus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Wählt man z. B. für $\mathfrak{a}$ das Hauptideal $\mathfrak{o} = (1)$ und versteht unter ω e von Null verschiedene ganze Zahl des Körpers, so sind für $\alpha = 1 + \omega + \omega^2$, $= \omega$ die Bedingungen $|\beta^{(\nu)}| < |\alpha^{(\nu)}|$ von selbst erfüllt. Für $r < \sqrt{2}$ folgt ier, wenn von endlich vielen Körpern K abgesehen wird, aus der An-me $N(1 + \omega + \omega^2) \leqq r^n$, daß unter den Zahlen $\frac{\beta^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}} = 1 + \omega^{(\nu)} + \omega^{(\nu)-1}$ ander gleiche vorkommen müssen. Dies tritt nur dann ein, wenn eine Zahlen $\omega', \omega'', \ldots, \omega^{(n-1)}$ entweder gleich ω oder gleich ω^{-1} wird.

Bedeutet ferner α eine rationale Primzahl p und $\mathfrak{a}$ einen Idealteiler p, dessen Norm gleich p^a sei, so lautet die Bedingung $|N(\alpha)| < r^n N(\mathfrak{a})$ fach $p^{n-a} < r^n$. Ist also dies der Fall, so kann im allgemeinen eine

[10]) Vgl. die in Fußnote [5]) zitierte Arbeit von Herrn Hilbert.

durch α teilbare Zahl β, die mit allen zu ihr konjugierten Zahlen absolut kleiner als p ist, nicht eine den Körper erzeugende Zahl sein. Eine Ausnahme kann nur bei endlich vielen total reellen Körpern eintreten.

Von größerem Interesse sind die Folgerungen, die sich aus den Ergebnissen des § 6 ziehen lassen. Es mögen nämlich $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis im Gebiete $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen von K bilden. Ist

$$\xi = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_n\omega_n$$

die zugehörige Fundamentalform, so setze man für $m = 1, 2, \ldots$

$$F_{2m}(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(\nu)^{2m}} = \sum S(\omega_{\lambda_1}\omega_{\lambda_2}\ldots\omega_{\lambda_{2m}})x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}\ldots x_{\lambda_{2m}}.$$

Diese homogene Funktion der Variabeln x_ν hat ganze rationale Koeffizienten und ist positiv definit. Läßt man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, für die ξ von den konjugierten Zahlen $\xi^{(\nu)}$ verschieden ausfällt, so sei μ_{2m} der kleinste Wert, den $F_{2m}(\xi)$ annimmt. Aus dem Satze IX folgt nun: *Zu jeder positiven Größe $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ gehört eine Zahl $N(\gamma)$ derart, daß für $n \geqq N(\gamma)$ stets $\mu_2 > \gamma n$ wird.* Für positive Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gelten aber bekanntlich, wenn $s_k = \Sigma u_\nu^k$ gesetzt wird, die Ungleichungen

$$\frac{s_1}{n} \leqq \sqrt{\frac{s_2}{n}} \leqq \sqrt[3]{\frac{s_3}{n}} \leqq \ldots$$

Ist daher $\mu_{2m} = F_{2m}(\xi)$, so wird für $n \geqq N(\gamma)$

$$\mu_{2m} \geqq n\left(\frac{F_2(\xi)}{n}\right)^m \geqq n\left(\frac{\mu_2}{n}\right)^m > \gamma^m n.$$

Man kann noch ein etwas genaueres Resultat ableiten. Ist $F_{4m}(\xi) = \mu_{4m}$, so können die Zahlen

$$\xi^{2m},\ \xi'^{2m},\ \ldots,\ (\xi^{(n-1)})^{2m} \tag{30}$$

nur dann nicht voneinander verschieden sein, wenn n gerade ist und die n Zahlen $\xi^{(\nu)}$ in $\frac{n}{2}$ Paare von entgegengesetzt gleichen Zahlen zerfallen. In diesem Fall sind unter den Zahlen (30) genau $\frac{n}{2}$ voneinander verschieden und diese genügen einer irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, wobei der höchste Koeffizient gleich 1 wird. Wendet man nun auf diese Gleichung die Formel (21) des § 6 an und beachtet noch, daß das arithmetische Mittel der Zahlen (30) gleich dem der unter ihnen verschiedenen ist, und daß das Analoge auch für die Potenzen $(\xi^{(\nu)})^{4m}$ gilt, so ergibt sich, daß für $\frac{n}{2} \geqq N(\gamma)$

$$\frac{\mu_{4m}}{n} > \gamma + \left(\frac{F_{2m}(\xi)}{n}\right)^2 \geqq \gamma + \left(\frac{\mu_{2m}}{n}\right)^2$$

d. Setzt man daher

$$\gamma_2 = \gamma, \quad \gamma_4 = \gamma + \gamma_2^2, \quad \gamma_8 = \gamma + \gamma_4^2, \ \ldots,$$

wird insbesondere für $n \geqq 2N(\gamma)$

$$\mu_{2\lambda} > \gamma_{2\lambda} n.$$

r $\gamma = 1{,}53$ wird z. B. $\gamma_8 > 16$, außerdem genügt es $N(1{,}5) = 130$, $(1{,}53) = 170$ zu setzen (vgl. den Schluß des § 6). Daher ist speziell

1) $\quad \mu_2 > \frac{3n}{2}$ (für $n \geqq 130$), $\quad \mu_8 > 16n$ (für $n \geqq 340$)[11].

Um hiervon eine Anwendung zu machen, betrachte ich die (in unserem lle positive) *Grundzahl d* des Körpers K. Aus einem bekannten Satze n Minkowski[12]) ergibt sich für total reelle Körper

2) $$d > \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 > \frac{e^{2n - \frac{1}{6n}}}{2\pi n},$$

d hieraus folgt die wichtige Tatsache, daß unter den Körpern aller öglichen Grade nur endlich viele die vorgeschriebene Grundzahl d be- zen können. Um dies zu beweisen, genügt es jedoch für d irgendeine tere Schranke anzugeben, die mit n über alle Grenzen wächst. Die ıgleichung (32) beweist Minkowski mit Hilfe seines allgemeinen Satzes er die in gewissen konvexen Bereichen liegenden Gitterpunkte. Für tal reelle Körper gestatten nun unsere Ergebnisse eine untere Schranke n der gewünschten Art allein unter Benutzung des in arithmetischer nsicht wesentlich elementareren Minkowskischen Satzes über Linear- rmen abzuleiten. Auf Grund dieses Satzes lassen sich nämlich die ganzen tionalen Zahlen x_ν so wählen, daß

$$0 < |\xi| \leqq \sqrt{d}, \quad |\xi'| < 1, \quad \ldots, \quad |\xi^{(n-1)}| < 1$$

rd[13]). Hierbei sind die n Zahlen $\xi^{(\nu)}$ gewiß voneinander verschieden. Für $\geqq 130$ wird daher wegen (31)

$$d + n - 1 > F_2(\xi) > \frac{3n}{2}, \quad \text{d. h.} \quad d > \frac{n}{2} + 1.$$

ne bessere Abschätzung erhält man mit Hilfe des Satzes I. Es wird mlich

$$d \leqq \Delta(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-1)})$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n-1} (\xi - \xi^{(\nu)})^2 \, \Delta(\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n-1)}) < (\sqrt{d} + 1)^{2n-2} \cdot M_{n-1},$$

[11]) Für $\gamma = e^{\frac{1}{2}}$ wird $\gamma_8 = 20{,}7\ldots$, für genügend große Werte von n ist daher gar $\mu_8 > 20n$.

[12]) „Geometrie der Zahlen", S. 134.

[13]) Vgl. den in Fußnote [4]) zitierten Hilbertschen „Bericht", S. 212.

woraus sich auf Grund der Formel (16) eine Ungleichung der Formel $d > \text{const.} \frac{2^n}{n}$ ergibt. Wählt man ferner, was ebenfalls möglich ist, die x_ν so, daß

$$0 < |\xi| \leqq d^{\frac{1}{2n-2}}, \quad |\xi'| < d^{\frac{1}{2n-2}}, \quad \ldots, \quad |\xi^{(n-2)}| < d^{\frac{1}{2n-2}}, \quad |\xi^{(n-1)}| < 1$$

wird, und nimmt man an, die $\xi^{(\nu)}$ seien auch hier voneinander verschieden, so liefert die zweite der Ungleichungen (31) für $n \geqq 340$

$$(n-1)d^{\frac{1}{n-1}} + 1 > F_8(\xi) > 16n,$$

also $d > 2^{n-1}$. Die hier über die $\xi^{(\nu)}$ gemachte Voraussetzung ist für *primitive* Körper K gewiß erfüllt.

Es dürfte von Interesse sein, diese noch sehr in den Anfängen steckende Betrachtung weiter zu verfolgen.

Berlin, den 27. Februar 1918.

(Eingegangen am 27. Februar 1918.)

Über streckentreue und konforme Abbildung.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

In einer Ebene mit gegebenem Umlaufssinn, deren Punkte wir durch e komplexe Variable $z = x + iy$ charakterisieren, sei ein einfach zu- mmenhängendes Gebiet G gegeben, das wir der Einfachheit halber als Innere einer Jordanschen Kurve annehmen werden. In einer anderen ene mit gegebenem Umlaufssinn, deren Punkte wir durch die komplexe riable $\zeta = \xi + i\eta$ charakterisieren, sei ebenfalls ein im Endlichen ge- enes, durch eine Jordansche Kurve begrenztes Gebiet Γ gegeben, und sei das Gebiet G *eineindeutig* und *stetig* auf das Gebiet Γ abgebildet. (im Gebiete G definierte) Funktion, welche G auf Γ abbildet, werden mit $\zeta = f(z)$ bezeichnen, während wir die inverse (im Gebiete Γ de- erte) Funktion, welche Γ auf G abbildet, mit $z = \varphi(\zeta)$ bezeichnen.

Unter den eineindeutigen und stetigen Abbildungen des Gebietes G das Gebiet Γ sind die *konformen Abbildungen* von ganz besonderer chtigkeit. Das sind Abbildungen, bei denen die im Gebiete G definierte bildungsfunktion $f(z)$ eine *analytische Funktion* ist, mit anderen Worten bildungen, die so beschaffen sind, daß bei jedem festen z_0 in G der ferenzenquotient

$$\frac{\zeta - \zeta_0}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

em bestimmten (wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von selbst n Null verschiedenen) Grenzwerte $f'(z_0)$ zustrebt, wenn der Punkt z in iebiger Weise gegen z_0 konvergiert, was wir durch $z \to z_0$ bezeichnen rden.

Wir wollen im folgenden eine eineindeutige und stetige Abbildung n G auf Γ eine *streckentreue Abbildung* nennen, wenn bei jedem festen in G der positive Bruch

$$\frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-z_0|}=\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

für $z \to z_0$ einem bestimmten positiven Grenzwerte $g(z_0)$ zustrebt.

Ferner soll eine eineindeutige und stetige Abbildung von G auf Γ eine *winkeltreue Abbildung* heißen, wenn bei jedem festen z_0 in G die auf dem Einheitskreise gelegene Zahl

$$\frac{\operatorname{sign}(\zeta-\zeta_0)}{\operatorname{sign}(z-z_0)}=\frac{\operatorname{sign}(f(z)-f(z_0))}{\operatorname{sign}(z-z_0)},$$

unter $\operatorname{sign} u$ für $u \neq 0$ die Zahl $\frac{u}{|u|}$ verstanden, sich für $z \to z_0$ einem bestimmten Grenzwerte $h(z_0)$ nähert. Offenbar ist $|h(z_0)|=1$.

Weil die *eine* Gleichung

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}=u_0 (\neq 0)$$

mit den *zwei* Gleichungen

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-z_0|}=|u_0|, \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{\operatorname{sign}(\zeta-\zeta_0)}{\operatorname{sign}(z-z_0)}=\operatorname{sign} u_0$$

dem Inhalte nach übereinstimmt, sind die beiden Aussagen: 1. die Abbildung von G auf Γ ist *konform*, und 2. die Abbildung von G auf Γ ist *sowohl streckentreu als winkeltreu*, offenbar als gleichbedeutend anzusehen.

Ich werde nunmehr in der vorliegenden Abhandlung den Satz beweisen:

Hauptsatz: *Jede eineindeutige und stetige Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet Γ, die streckentreu ist und den Umlaufssinn ungeändert läßt, ist eine konforme Abbildung. Sie ist also von selbst winkeltreu.*

Dieser Satz läßt sich offenbar (aus Symmetriegründen) auch folgendermaßen aussprechen:

Es sei $f(z)$ eine im Gebiete G stetige Funktion, die das Gebiet G schlicht auf das Gebiet Γ abbildet, und zwar derart, daß die Abbildung streckentreu ist. Dann ist $f(z)$ entweder eine analytische Funktion oder die konjugierte einer analytischen Funktion in G. Der eine oder andere Fall tritt ein, je nachdem der Umlaufssinn bei der eineindeutigen und stetigen Abbildung erhalten bleibt oder nicht.

Ich hebe noch zur Orientierung hervor, daß in diesem Satze die Voraussetzung, daß die im Gebiete G definierte stetige Funktion $\zeta=f(z)$ dieses *schlicht* auf ein Gebiet Γ in der ζ-Ebene abbildet, *wesentlich* ist. Der Satz gilt *nicht* mehr, wenn diese Voraussetzung weggelassen wird. Mit anderen Worten: *Eine in einem Gebiete G stetige Funktion $f(z)$,*

der nur vorausgesetzt wird, daß sie überall in G einen „absoluten differentialquotienten" besitzt, d. h. die so beschaffen ist, daß bei jedem en z_0 in G der Quotient

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

$z \to z_0$ *einem bestimmten positiven Grenzwerte zustrebt, braucht weder alytisch in G noch konjugiert zu einer analytischen Funktion in G sein.* Um dies einzusehen, genügt schon ein so einfaches Beispiel, wie durch die etwa im Einheitskreise G durch die Festsetzungen

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases} x+iy & \text{für } y \geqq 0, \\ x-iy & \text{für } y \leqq 0 \end{cases}$$

inierte, stetige Funktion $f(z)$ geliefert wird. Denn es hat offenbar se Funktion in jedem Punkte z in G einen absoluten Differentialotienten (gleich $+1$), und sie ist dennoch weder analytisch in G noch einer analytischen Funktion in G konjugiert. — Durch diese letzte Berkung ist eine Frage aus den Grundlagen der Theorie der analytischen nktionen, welche neben anderen ähnlichen Problemen in einer Abndlung von Herrn Remak[1]) aufgestellt ist, erledigt.

Bei dem folgenden Beweis des Hauptsatzes wird der von Lebesgue geführte Maßbegriff sowie der Lebesguesche Integralbegriff eine sehr sentliche Rolle spielen[2]). Wir teilen den Beweis in drei Abschnitte ein.

In § 1 werden wir, ausgehend von einem bekannten Satze aus der eorie der analytischen Funktionen, den Beweis des Hauptsatzes auf den weis des folgenden Satzes zurückführen:

Satz A: *Es bilde die stetige Funktion $\zeta = f(z)$ das Gebiet G eindeutig, streckentreu und unter Beibehaltung des Umlaufssinnes auf s Gebiet Γ ab. Dann gehört zu jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes System im Gebiete G gelegener und nicht übereinandergreifender adrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, deren Gesamtflächeninhalt kleiner als ε ist, die mme*

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right|$$

[1]) R. Remak, „Über winkeltreue und streckentreue Abbildung an einem Punkte d in der Ebene", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 38 (1914), S. 193 246.

[2]) Betreffs der im folgenden zu verwendenden Sätze aus der Lebesgueschen eorie werde ich an den einzelnen Stellen auf das soeben erschienene Buch von Carathéodory, „Vorlesungen über reelle Funktionen", Leipzig 1918, verweisen, welchem ein systematischer Aufbau der Lebesgueschen Theorie gegeben wird.

kleiner als δ ist. Unter $\int_{q_n} f(z)dz$ wird das komplexe Integral von $f(z)$ längs des Umfanges des Quadrates q_n verstanden.

Der § 2 enthält eine für den Beweis des Satzes A benötigte mengentheoretische Betrachtung über streckentreue Abbildungen. Von den in § 2 bewiesenen Hilfssätzen sei an dieser Stelle der folgende erwähnt. *Bei einer streckentreuen Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet Γ hat jede Menge M in Γ, die einer im Gebiete G gelegenen Menge M vom Maße Null entspricht, selbst das Maß Null.*

Schließlich werden wir in § 3 unter Benutzung der Resultate von § 2 den Beweis des Satzes A und damit denjenigen des Hauptsatzes in wenigen Worten führen können.

§ 1.

Es bedeute überall im folgenden $\zeta = f(z)$ eine Funktion, die das Gebiet G in der z-Ebene *eineindeutig* und *stetig* auf das Gebiet Γ in der ζ-Ebene abbildet, und zwar derart, daß die Abbildung *streckentreu* ist und *den Umlaufssinn nicht ändert.* Es handelt sich darum zu beweisen, daß die Abbildung *konform* ist, d. h. *daß $f(z)$ eine im Gebiete G analytische Funktion ist.*

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die nach Voraussetzung in G stetige Funktion $f(z)$ daselbst analytisch ist, besteht nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze darin, *daß das komplexe Integral $\int f(z)dz$, erstreckt über den Rand eines beliebigen in G gelegenen Quadrates, verschwindet.* Wir werden den Beweis des Hauptsatzes dadurch erbringen, daß wir das Erfülltsein der zuletzt genannten Bedingung nachweisen.

Es sei in der z-Ebene ein beliebiges Quadrat mit der Seitenlänge S (also dem Flächeninhalt S^2) gegeben, dessen Rand ganz im Innern des Gebietes G verläuft, und es bezeichne Q die Menge aller Punkte z, die im Innern oder auf dem Rande des Quadrates liegen. Der Abstand der Menge Q von der Jordanschen Kurve, die G begrenzt, möge H ($H > 0$) heißen. Wir betrachten alsdann für alle z in Q und für $0 < |h| < H$ die positive, stetige Funktion der beiden komplexen Variablen z und h

$$F(z,h) = \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|}.$$

Nach Voraussetzung existiert für jedes feste z in Q der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} F(z,h) = \lim_{h\to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|}.$$

Wir bezeichnen diesen mit $g(z)$. Wäre hierbei noch außerdem voraus-

etzt, daß der Grenzübergang *für alle z in Q gleichmäßig* ist, so wäre Beweis, daß das Integral $\int f(z)dz$, über den Umfang von Q erstreckt, ch Null ist, unschwer zu führen. Eine solche Voraussetzung findet n aber im Hauptsatze nicht. Nun hat sich aber bekanntlich, nachdem n dazu übergegangen ist, Punktmengen mittels des von Lebesgue geführten verfeinerten Maßbegriffes zu messen, das sehr bemerkenswerte sultat ergeben, daß *jeder* Grenzübergang, bei welchem ein Parameter tritt, in bezug auf diesen Parameter „im wesentlichen" gleichmäßig ist[3]). lem wir speziell die vorhin eingeführte Funktion $F(z, h)$ betrachten. echen wir den soeben erwähnten Satz der Lebesgueschen Theorie wie gt aus.

Hilfssatz 1: *Jedem (beliebig kleinen) $\lambda > 0$ läßt sich in Q eine ßbare Teilmenge T mit einem Maß größer als $S^2 - \lambda$ zuordnen, so 3 für alle z in T die Funktion*

$$F(z, h) = \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|}$$

$h \to 0$ gegen $g(z)$ gleichmäßig strebt. Es gibt also zu jedem $\delta_1 > 0$ (von z unabhängiges) $\delta_2 > 0$ derart, daß für alle z in T und für $< |h| < \delta_2$ die Ungleichheit

$$\left| \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|} - g(z) \right| < \delta_1$$

teht.

Ehe wir dazu übergehen, diesen Hilfssatz auf unser Problem anzu- nden, schicken wir zwei äußerst einfache geometrische Hilfssätze voraus, n denen der erste evident ist, während der Beweis des zweiten so nahe gt, daß wir diesen dem Leser überlassen können.

Hilfssatz 2: *Es sei q ein Quadrat (mit Einschluß des Randes) in der Ebene, das durch Vermittelung einer Funktion $\zeta = F(z)$ eineindeutig d stetig auf ein Gebiet (mit Einschluß des Randes) in der ζ-Ebene ebildet wird. Es mögen im Quadrate q zwei Punkte z_1 und $z_2 \neq z_1$ stieren, so daß für jedes $z \neq z_1$ in q*

$$\frac{|F(z) - F(z_1)|}{|z - z_1|} = k_1,$$

jedes $z \neq z_2$ in q

$$\frac{|F(z) - F(z_2)|}{|z - z_2|} = k_2$$

, unter k_1 und k_2 zwei positive Konstanten verstanden. Dann ist $= k_2$. Die Abbildung von q auf das entsprechende Gebiet in der ζ-Ebene entweder eine Ähnlichkeitstransformation oder zu einer Ähnlichkeits-

[3]) Vgl. Carathéodory, l. c. [2]) S. 382, Satz 12.

transformation symmetrisch, d. h. die in q definierte Funktion $F(z)$ ist entweder eine lineare Funktion $F(z) = c_1 + c_2 z$, oder es ist $F(z) = c_1 + c_2 \bar{z}$, wo $\bar{z}$ die zu z konjugierte Zahl bezeichnet. Der eine oder der andere Fall tritt ein, je nachdem bei der Abbildung der Umlaufssinn erhalten bleibt oder nicht.

Aus diesem Hilfssatze ergibt sich sehr leicht die Richtigkeit des folgenden ähnlichen Hilfssatzes, in dem wir der Gleichmäßigkeit halber drei Punkte z_1, z_2, z_3 betrachten.

Hilfssatz 3: *Es sei q ein Quadrat (mit Einschluß des Randes) in der z-Ebene von der Seitenlänge s, und es sei q mittels einer Funktion $\zeta = F(z)$ eineindeutig und stetig auf ein Gebiet (mit Einschluß des Randes) in der ζ-Ebene abgebildet, und zwar so, daß bei der Abbildung der Umlaufssinn erhalten bleibt. Es mögen ferner ein Wert $\delta > 0$, drei positive Konstanten k_1, k_2, k_3 und drei feste in q gelegene Punkte z_1, z_2, z_3, welche von drei verschiedenen Eckpunkten Z_1, Z_2, Z_3 von q Abstände*

$$\left|Z_1 - z_1\right| < \frac{s}{4}, \quad \left|Z_2 - z_2\right| < \frac{s}{4}, \quad \left|Z_3 - z_3\right| < \frac{s}{4}$$

haben, existieren, so daß für jedes $i = 1, 2, 3$ die Ungleichung

$$k_i - \delta < \frac{|F(z) - F(z_i)|}{|z - z_i|} < k_i + \delta$$

für alle $z \neq z_i$ im Quadrate q besteht. Dann ist für ein sehr kleines δ die Abbildung „beinahe" eine Ähnlichkeitstransformation, d. h. genau gesprochen: zu jedem $\varepsilon_0 > 0$ gehört ein nur von ε_0 (und nicht etwa von k_1, k_2, k_3 und s) abhängiges $\delta_0 > 0$ derart, daß, wenn in den obigen Voraussetzungen $\delta \leqq \delta_0$ ist, die im Quadrate q definierte Abbildungsfunktion $F(z)$ sich auf die Form bringen läßt:

$$F(z) = c_1 + c_2 z + \psi(z),$$

wo c_1 und c_2 Konstanten bezeichnen, während $\psi(z)$ für alle z in q die Ungleichung $\left|\psi(z)\right| < \varepsilon_0 s$ befriedigt.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich nunmehr leicht der folgende Satz beweisen:

Hilfssatz 4: *Es sei Q ein beliebiges Quadrat (inkl. Rand), welches im Gebiete G gelegen ist, und es seien $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ beliebig gegeben. Dann läßt sich eine Zerlegung des Quadrates Q in eine endliche Anzahl von kleineren Quadraten $q_1, q_2, \ldots, q_N$ derart vornehmen, daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Die Teilquadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$ können in zwei Klassen I und II eingeteilt werden, so daß*

1. *die Summe* $\sum_{(I)} \left| \int f(z)dz \right|$ *der absoluten Beträge der Integrale* $(z)dz$, *erstreckt längs der Quadrate der ersten Klasse, kleiner als* ε_1 *und daß*

2. *die Summe der Flächeninhalte der zur zweiten Klasse gehörigen adrate kleiner als* ε_2 *ist.*

Beweis: Es sei S die Seitenlänge von Q, und es sei $\frac{\varepsilon_1}{4S^2} = \varepsilon_0$ ge-zt. Zu diesem $\varepsilon_0 > 0$ bestimmen wir ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) = \delta_0(\varepsilon_1)$ im Sinne des fssatzes 3. Ferner bestimmen wir, was nach dem Hilfssatze 1 $\left(\text{für } \lambda = \frac{\varepsilon_2}{11}\right)$ glich ist, eine meßbare Teilmenge T von Q mit einem Maß größer als $- \frac{\varepsilon_2}{11}$ derart, daß für alle z in T die Funktion

$$F(z, h) = \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|}$$

$h \to 0$ *gleichmäßig* gegen $g(z)$ strebt; dann können wir (wegen der eichmäßigkeit des Grenzüberganges) zu der obigen Zahl $\delta_0 > 0$ eine sitive Zahl $\alpha = \alpha(\delta_0) = \alpha(\varepsilon_1)$ derart wählen, daß für jedes z in T und $< |h| < \alpha$ die Ungleichung

$$g(z) - \delta_0 < \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|} < g(z) + \delta_0$$

steht. Wir teilen nunmehr das Quadrat Q in $N = n^2$ kongruente Teil-adrate ein; die ganze Zahl n wird dabei so groß gewählt, daß die tenlänge $s = \frac{1}{n} S$ der Teilquadrate kleiner als $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ ausfällt. Wir werden weisen, daß bei dieser Zerlegung von Q in Teilquadrate die Bedingung Hilfssatzes erfüllt ist. Dies ergibt sich folgendermaßen. Es sei q l. die Fig.) ein beliebiges der n^2 Teilquadrate, und es sei um jeden der r Eckpunkte ein Kreisbogen mit dem Radius $\frac{s}{4}$ gezogen, wodurch aus ier kleine Kreisquadranten (die vier schraffierten Gebiete) herausgeschnitten rden. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: 1. Unter n vier kleinen Kreisquadranten gibt es *mindestens ei*, welche im Innern einen Punkt der Menge T ent-ten; in diesem Falle wird das Teilquadrat q in die asse I geschlagen. 2. Unter den vier kleinen Kreis-adranten gibt es *höchstens zwei*, welche im Innern en Punkt der Menge T enthalten; in diesem Falle rd das Teilquadrat q zu der Klasse II gerechnet.

Fig. 1

Es sei zunächst q ein beliebiges Quadrat der *ersten* Klasse. Dann t es nach Voraussetzung drei Punkte z_1, z_2, z_3 in q, welche der Menge T

angehören und so beschaffen sind, daß ihre Abstände von drei verschiedenen Eckpunkten Z_1, Z_2, Z_3 von q kleiner als $\frac{s}{4}$ sind. Da der Punkt $z_i (i = 1, 2, 3)$ T angehört, und sein Abstand von jedem Punkte $z \neq z_i$ in q kleiner als die Diagonale $s\sqrt{2}$ von q, d. h. kleiner als α ist, so gelten für alle $z \neq z_i$ in q die Ungleichungen

$$k_i - \delta_0 < \frac{|f(z) - f(z_i)|}{|z - z_i|} < k_i + \delta_0,$$

unter k_i die positive Zahl $g(z_i)$ verstanden. Nach dem Hilfssatze 3 ist daher für alle z in dem betrachteten (zur ersten Klasse gehörigen) Quadrate q

$$f(z) = c_1 + c_2 z + \psi(z),$$

wo c_1 und c_2 von z unabhängig sind, während $|\psi(z)| < \varepsilon_0 s$ ist. Durch Integration längs des Umfanges von q erhalten wir somit

$$\int f(z)dz = \int (c_1 + c_2 z)dz + \int \psi(z)dz,$$

also, wegen

$$\int (c_1 + c_2 z)dz = 0,$$

$$\int f(z)dz = \int \psi(z)dz,$$

und hieraus weiter

$$\left|\int f(z)dz\right| \leqq \int |\psi(z)|\,|dz| < \varepsilon_0 s \cdot 4s = \frac{\varepsilon_1}{4S^2} \cdot 4s^2 = \frac{\varepsilon_1}{n^2} = \frac{\varepsilon_1}{N}.$$

Da die Anzahl der Quadrate der ersten Klasse höchstens gleich N ist, so haben wir hiermit die eine Hälfte unserer Behauptung, nämlich die Ungleichung

$$\sum_{(I)} \left|\int f(z)dz\right| < \frac{\varepsilon_1}{N} \cdot N = \varepsilon_1$$

bereits bewiesen.

Es erübrigt zu beweisen, daß die Summe der Flächeninhalte der Teilquadrate der *zweiten* Klasse kleiner als ε_2 ist. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, daß, wenn T' die Komplementärmenge zu T in bezug auf die Menge Q (d. h. die Menge, die aus allen Punkten in Q besteht, die nicht zu T gehören) bezeichnet, T' meßbar und von einem Maß kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{11}$ ist. Nach Voraussetzung enthält jedes Teilquadrat q der zweiten Klasse mindestens zwei kleine Kreisquadranten vom Flächeninhalt $\frac{\pi}{4}\left(\frac{s}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{64}s^2$, deren innere Punkte *sämtlich* der Menge T' angehören. Die Anzahl der Teilquadrate der zweiten Klasse ist folglich kleiner als

$$\frac{\varepsilon_2}{11} : \left(2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot s^2\right) = \frac{\varepsilon_2}{s^2} \cdot \frac{32}{11\pi} < \frac{\varepsilon_2}{s^2},$$

d. h. die Summe der Flächeninhalte aller zu der zweiten Klasse gehörigen Teilquadrate ist kleiner als ε_2. Hiermit ist der Hilfsatz 4 bewiesen.

Es sei Q ein im Gebiete G gelegenes Quadrat, das bei vorgegebenen > 0 und $\varepsilon_2 > 0$ in Teilquadrate q im Sinne des Hilfssatzes 4 zerlegt . Da das Integral $\int_Q f(z)dz$ längs des Umfanges von Q gleich der mme der Integrale erstreckt über den Umfang aller Teilquadrate $\int_q f(z)dz$ ist, so gilt

$$\left|\int_Q f(z)dz\right| \leqq \sum \left|\int_q f(z)dz\right| = \sum_{(I)} \left|\int f(z)dz\right| + \sum_{(II)} \left|\int f(z)dz\right|,$$

in $\sum_{(I)}$ bzw. $\sum_{(II)}$ die Summation über die Teilquadrate der ersten bzw. r zweiten Klasse zu erstrecken ist. Es ist also

$$\left|\int_Q f(z)dz\right| < \varepsilon_1 + \sum_{(II)} \left|\int f(z)dz\right|.$$

s dieser Ungleichung folgt sofort, daß der Beweis des Hauptsatzes, d. h. der weis der Gleichung $\int_Q f(z)dz = 0$, geführt ist, wenn es gelingt zu zeigen, ß bei hinreichend kleinem ε_2 die Summe $\sum_{(II)} \left|\int f(z)dz\right|$ beliebig klein rd. Der Beweis des Hauptsatzes ist also auf den Beweis des folgenden tzes zurückgeführt.

Satz A: *Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für eine liebige endliche Anzahl in G gelegener und nicht übereinander greifen- r Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, deren Gesamtflächeninhalt kleiner als ε ist, e Summe $\sum \left|\int_q f(z)dz\right|$, erstreckt über die N Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, einer als δ ist.*

Bevor wir dazu übergehen, diesen Satz A (und damit den Haupt- tz) zu beweisen, werden wir in § 2 die gegebene streckentreue Abbil- ng von G auf Γ etwas näher studieren.

§ 2.

Wir beweisen zunächst den folgenden wichtigen Hilfssatz:

Hilfssatz 5: *Es sei M eine beliebige im Gebiete G gelegene Punkt- enge vom Maße Null. Dann hat die M bei der gegebenen strecken- uen Abbildung im Gebiete Γ entsprechende Punktmenge M ebenfalls s Maß Null.*

Beweis: Es habe $g(z)$ die frühere Bedeutung, d. h. es bezeichne ie überall im folgenden) $g(z)$ für jedes z in G den, nach Voraus- zung vorhandenen, Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|}.$$

Es bezeichne ferner $M(K)$ für alle festen $K > 0$ die Menge der Punkte z in M, für die $g(z) < K$ ist. Es sei $\mathsf{M}(K)$ die $M(K)$ entsprechende Teilmenge von M. Da die Vereinigungsmenge einer abzählbaren Anzahl von Mengen (mit oder ohne gemeinsame Punkte), deren jede vom Maße Null ist, bekanntlich selbst vom Maße Null ist, so genügt es offenbar den Satz für $M(K)$ (bei beliebigem festem $K > 0$) statt für die gegebene Menge M selbst zu beweisen, d. h. es genügt zu beweisen, daß $\mathsf{M}(K)$ vom Maße Null ist; denn es ist ja M die Vereinigungsmenge der abzählbar unendlich vielen Mengen $\mathsf{M}(1)$, $\mathsf{M}(2)$, $\mathsf{M}(3)$, ... Für jeden Punkt z_0 der Menge $M(K)$ ist die Zahl $g(z_0) < K$. Es läßt sich daher um jeden Punkt z_0 in $M(K)$ eine kleine Kreisfläche $|z - z_0| < r\,(= r(z_0))$ im Gebiete G beschreiben, so daß für alle $z \neq z_0$ in dieser Kreisfläche die Ungleichung

$$|\zeta - \zeta_0| = |f(z) - f(z_0)| < K\,|z - z_0|$$

gilt. Man überzeugt sich leicht durch nochmaligen Gebrauch des Satzes, daß die Vereinigungsmenge von abzählbar unendlich vielen Mengen, deren jede vom Maße Null ist, selbst vom Maße Null ist wie vorhin, daß es beim Beweise unseres Satzes genügt, statt $M(K)$ eine Teilmenge L von $M(K)$ zu betrachten, deren Punkten z_0 eine *feste* (d. h. von z_0 unabhängige) positive Zahl R als Radius der vorerwähnten kleinen Kreisfläche um z_0 zugeordnet werden kann. Wir betrachten also (statt der ursprünglichen Menge M) eine in G gelegene Menge L *vom Maße Null* mit folgender Eigenschaft: *Es existieren zwei positive Zahlen K und R derart, daß für jedes z_0 in L die Ungleichung*

$$|f(z) - f(z_0)| < K\,|z - z_0|$$

für alle $z \neq z_0$ im Kreise $|z - z_0| < R$ besteht; zu beweisen ist, *daß die im Gebiete Γ gelegene Menge Λ, die L entspricht, ebenfalls vom Maße Null ist.* Der Beweis hierfür ist erbracht, wenn es gelingt zu zeigen, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Punktmenge ϱ vom Maße kleiner als ε existiert, welche Λ als Teilmenge enthält. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst zu der gegebenen Menge L vom Maße Null eine abzählbare Folge im Gebiete G gelegener Quadraten $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, deren Seitenlängen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ sämtlich kleiner als $\frac{R}{\sqrt{2}}$ sind, und die folgende Eigenschaften haben: 1. Jeder Punkt von L ist ein innerer Punkt eines dieser Quadrate. Jedes Quadrat enthält mindestens einen Punkt von L. 2. Die Summe Σs_n^2 der Flächeninhalte der Quadrate ist kleiner als $\frac{\varepsilon}{2\pi K^2}$. Wir bezeichnen diejenige Punktmenge im Gebiete Γ, welche bei der Ab-

lung dem Innern des Quadrates q_n entspricht, mit ϱ_n; die Menge ϱ_n meßbar, weil sie aus lauter inneren Punkten besteht. Es sei nunmehr z_0 Punkt von L im Innern des Quadrates q_n und ζ_0 der entsprechende ıkt von Λ im Gebiete ϱ_n. Dann ist das Quadrat q_n ganz im Kreise $- z_0 | < \sqrt{2}\, s_n < R$ gelegen, woraus folgt, daß die entsprechende Punktıge ϱ_n ganz im Kreise $| \zeta - \zeta_0 | < K\sqrt{2}\, s_n$ liegt. Ist μ_n das Maß der ıge ϱ_n, so ist also $\mu_n \leqq \pi (K\sqrt{2}\, s_n)^2 = 2\pi K^2 s_n^2$. Wir bilden schließ- die Vereinigungsmenge ϱ der abzählbar vielen Mengen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$. Menge ϱ enthält offenbar die Menge Λ als Teilmenge. Da ϱ_n meßbar und ihr Maß $\mu_n \leqq 2\pi K^2 s_n^2$ ist, so ist die Vereinigungsmenge ϱ ebens meßbar und ihr Maß

$$\mu \leqq \sum 2\pi K^2 s_n^2 = 2\pi K^2 \sum s_n^2 < 2\pi K^2 \frac{\varepsilon}{2\pi K^2} = \varepsilon.$$

rmit ist der Beweis, daß Λ vom Maße Null ist, und damit der Bes des Hilfssatzes vollendet.

Aus dem Hilfssatze 5 schließen wir zunächst, *daß, wenn M eine iebige meßbare Menge im Gebiete G ist, die entsprechende Menge* M *im iete* Γ *ebenfalls meßbar ist*[4]). Dies ergibt sich folgendermaßen: Weil M ßbar ist, können wir eine Folge von Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ in G, en jede aus lauter inneren Punkten besteht und M als Teilmenge entt, derart wählen, daß für $n \to \infty$ das Maß von M_n gegen das Maß M konvergiert. Es sei M' der Durchschnitt der Mengen $M_1, M_2, \ldots$, n. es bestehe M' aus denjenigen Punkten, welche sämtlichen Mengen $M_2, \ldots$ angehören; dann ist M' meßbar, und es ist das Maß M' mindestens gleich dem Maß von M (weil M Teilmenge von ist) und zugleich höchstens gleich dem Maß von M_n (weil M' lmenge in M_n ist). Es ist also (weil das Maß von M_n für $n \to \infty$ en das Maß von M konvergiert) das Maß von M' gleich dem Maße M. Hieraus folgt, daß die Differenzmenge $M_0 = M' - M$ vom ße Null ist. Wir betrachten nunmehr die im Gebiete Γ gelegenen ngen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots, \mathsf{M}_n, \ldots$, welche den Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ G entsprechen; alle diese Mengen sind meßbar, weil sie aus lauter eren Punkten bestehen. Folglich ist die Menge M', welche M' enticht, gleichfalls meßbar, weil sie der Durchschnitt der meßbaren ngen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ ist. Ferner ist die Menge M_0, welche M_0 entspricht, ßbar, nämlich (nach dem Hilfssatze 5) vom Maße Null. Nachdem rmit die Meßbarkeit von M' und M_0 bewiesen ist, folgt sofort aus der eichung $\mathsf{M} = \mathsf{M}' - \mathsf{M}_0$, daß M ebenfalls meßbar ist, womit die obige hauptung bewiesen ist.

[4]) Vergleiche Carathéodory, l. c.[2]) S. 355, Satz 2.

Hilfssatz 6: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß, wenn M eine im Gebiet G gelegene meßbare Menge vom Maße kleiner als δ ist, die entsprechende (nach dem vorhergehenden ebenfalls meßbare) Menge M im Gebiete Γ vom Maße kleiner als ε ist.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt, d. h. wir nehmen an, daß der Satz unrichtig sei, daß es also ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so daß jedem $\delta > 0$ eine in G gelegene Menge M vom Maße kleiner als δ zugeordnet werden kann, deren entsprechende Menge M in Γ vom Maße $\geqq \varepsilon_0$ ist. Wir werden zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Zu diesem Zwecke bestimmen wir (unter Benutzung der zu widerlegenden Annahme) eine Folge von meßbaren, im Gebiete G gelegenen Mengen $M_1, M_2, \ldots$ derart, daß bei jedem $n \geqq 1$ das Maß von M_n kleiner als $\frac{1}{n^2}$ ist, während die entsprechenden, in Γ gelegenen, meßbaren Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ sämtlich vom Maße $\geqq \varepsilon_0$ sind. Es sei M' der „Limes superior" der Folge $M_1, M_2, \ldots$, d. h. diejenige Menge, deren Punkte unendlich vielen der Mengen $M_1, M_2, \ldots$ angehören, und es sei M' der Limes superior der Folge $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$. Dann sind sowohl M' als M' meßbare Mengen, und es ist offenbar M' diejenige Menge in Γ, welche der Menge M' in G entspricht. Da jede der Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ vom Maße $\geqq \varepsilon_0$ ist, und außerdem die sämtlichen Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ in einem beschränkten Teil der Ebene (nämlich im Gebiete Γ) liegen, so ist bekanntlich auch der Limes superior M' vom Maße $\geqq \varepsilon_0$[5]). Dagegen ist M' vom Maße Null; denn die Menge M' ist für alle $n \geqq 1$ eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $M^{(n)}$ der abzählbar vielen Mengen $M_{n+1}, M_{n+2}, \ldots$, welche Vereinigungsmenge $M^{(n)}$ meßbar ist mit einem Maß kleiner als $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots < \frac{1}{n}$, so daß auch das Maß von M' für alle n kleiner als $\frac{1}{n}$ ist. Die beiden soeben erhaltenen Resultate: 1. M' ist vom Maße Null, 2. die entsprechende Menge M' ist von einem Maße größer als Null, widersprechen aber nach dem Hilfssatze 5 einander, womit der Hilfssatz 6 bewiesen ist.

Es sei M eine beliebige meßbare Menge im Gebiete G und M die entsprechende meßbare Menge im Gebiete Γ. Ihr Maß bezeichnen wir mit μ. Diese Zahl μ können wir alsdann als *eine Funktion der Menge M* auffassen; diese „Mengenfunktion", welche für alle meßbaren Mengen M im Gebiete G definiert ist, und die wir mit $\mu = \omega(M)$ bezeichnen werden, besitzt offenbar die beiden folgenden Eigenschaften:

I. Sie ist *additiv*, d. h., wenn M_1 und M_2 zwei in G gelegene meß-

---

[5]) Carathéodory, l. c. [2]) S. 255, Satz 11.

e Mengen *ohne gemeinsame Punkte* sind, und M die Vereinigungs-
nge von M_1 und M_2 bedeutet, so gilt die Gleichung

$$\omega(M) = \omega(M_1) + \omega(M_2).$$

II. Sie ist *totalstetig*, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$
art, daß für jede im Gebiete G gelegene meßbare Menge M, deren
ß kleiner als δ ist, die Ungleichung $\omega(M) < \varepsilon$ besteht. (Dies ist eine
lere Form des Hilfssatzes 6.)

Eine derartige additive und totalstetige Mengenfunktion $\omega(M)$ be-
t aber nach einem bekannten Satz der Lebesgueschen Theorie die
den wichtigen Eigenschaften[6]):

I. Sie besitzt „fast überall" in G, d. h. in jedem Punkte z_0 von G,
hstens mit Ausnahme der Punkte einer Menge vom Maße Null,
en endlichen „Differentialquotienten" $D(z_0)$. Dies besagt, daß, wenn
$= M(z_0, r)$ das Innere eines kleinen in G gelegenen Kreises um z_0 mit
n Radius r bedeutet, der positive Bruch

$$\frac{\omega(M)}{\pi r^2}$$

h für $r \to 0$ einem bestimmten endlichen Grenzwert $D(z_0)$ nähert. —
r unsere spezielle Mengenfunktion $\omega(M)$ läßt sich übrigens unmittelbar
ekt beweisen, daß sie sogar in *jedem* Punkte z_0 des Gebietes G (und
ht nur mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null) einen
fferentialquotienten $D(z_0)$ besitzt, nämlich den Differentialquotienten
$(z_0) = \big(g(z_0)\big)^2$, wo $g(z_0)$ wie immer den Grenzwert

$$g(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0)|}{|h|}$$

deutet. Es sei z_0 irgendein fester Punkt im Gebiete G, und es sei
> 0 ein beliebig kleiner Wert. Für hinreichend kleine r wird jeder
nkt z auf der Kreisperipherie $|z - z_0| = r$ in einen Punkt ζ des Ge-
etes Γ abgebildet, welcher im Kreisringe

$$(1-\varepsilon) r g(z_0) < |\zeta - \zeta_0| < (1+\varepsilon) r g(z_0)$$

legen ist. Die Jordansche Kurve in Γ, welche dem Kreise $|z - z_0| = r$
G entspricht, verläuft also ganz in diesem Kreisringe. Hieraus folgt
er sofort, daß die meßbare Punktmenge M, welche der Kreisfläche
$- z_0| < r$ entspricht, also die Menge M, die aus den sämtlichen Punkten
Innern der erwähnten Jordanschen Kurve besteht, ein Maß $\omega(M)$
sitzt, das die Ungleichungen

$$\pi\big\{(1-\varepsilon) r g(z_0)\big\}^2 \leqq \omega(M) \leqq \pi\big\{(1+\varepsilon) r g(z_0)\big\}^2$$

[6]) Carathéodory, l. c. [2]) S. 496, Satz 1, 2.

befriedigt; es gelten also für alle hinreichend kleinen positiven r die Ungleichungen

$$(1-\varepsilon)^2\big(g(z_0)\big)^2 \leqq \frac{\omega(M)}{\pi r^2} \leqq (1+\varepsilon)^2\big(g(z_0)\big)^2,$$

und es existiert somit der Grenzwert

$$\lim_{r\to 0}\frac{\omega(M)}{\pi r^2}$$

und ist gleich $\big(g(z_0)\big)^2$.

II. Der Differentialquotient $D(z)=D(x+iy)$ ist eine (im Lebesgueschen Sinne) im zweidimensionalen Gebiete G summierbare Punktfunktion und es gilt für jede meßbare Menge M in G die Relation

$$\omega(M)=\iint_M D(z)\,d\sigma.$$

Mit anderen Worten, *eine additive totalstetige Mengenfunktion $\omega(M)$ ist gleich dem „Flächenintegral" ihres Differentialquotienten, erstreckt über die Menge M.*

Für unsere Mengenfunktion $\omega(M)$, wo der Differentialquotient $D(z)$ sogar überall in G (und nicht nur mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null) existiert und gleich $\big(g(z)\big)^2$ ist, erhalten wir also die Gleichung

$$\omega(M)=\iint_M \big(g(z)\big)^2\,d\sigma,$$

d. h. es gilt der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 7: *Es sei M eine beliebige meßbare Menge in G und $\mathfrak{M}$ die entsprechende (ebenfalls meßbare) Menge in Γ. Dann ist das Maß μ von $\mathfrak{M}$ durch das Flächenintegral*

$$\mu=\iint_M \big(g(z)\big)^2\,d\sigma$$

gegeben.

Wir beweisen schließlich den folgenden Satz, welcher das Ziel dieses Paragraphen bildet.

Hilfssatz 8: *Es sei q ein Quadrat, das (mit Einschluß des Randes) ganz in G liegt, und es bezeichne m den Flächeninhalt dieses Quadrates, während μ das Maß derjenigen Punktmenge im Gebiete Γ bezeichnet, welche dem Innern des Quadrates q entspricht. Dann ist der absolute Wert des komplexen Integrals $\int f(z)\,dz$ längs des Umfanges von q höchstens gleich $m+\mu$.*

Beweis: Wir dürfen offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweise annehmen, daß die Seiten von q der reellen bzw. der imaginären Achse parallel sind, also daß die Punkte $z=x+iy$ des Quadrates q durch Ungleichungen der Form $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ charakterisiert

sind, wobei $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$ ist. Dann lautet die zu beweisende Ungleichung

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(x+iy_1) - f(x+iy_2)\}dx + i\int_{y_1}^{y_2} \{f(x_2+iy) - f(x_1+iy)\}dy| \leqq m+\mu.$$

Aus Symmetriegründen genügt es offenbar nachzuweisen, daß

$$|\int_{y_1}^{y_2} \{f(x_2+iy) - f(x_1+iy)\}dy| \leqq \frac{m+\mu}{2}$$

ist. Wir werden sogar beweisen, daß

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x_2+iy) - f(x_1+iy)|dy \leqq \frac{m+\mu}{2}$$

ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Differenz $f(x_2+iy) - f(x_1+iy)$, wo $y_1 \leqq y \leqq y_2$ ist, und werden zunächst beweisen, *daß, wenn für ein* $y = y'$ *im Intervalle* $y_1 \leqq y \leqq y_2$ *die Funktion* $g(x+iy')$ *eine für* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *(im Lebesgueschen Sinne) summierbare Funktion von* x *ist, die Ungleichung*

$$|f(x_2+iy') - f(x_1+iy')| \leqq \int_{x_1}^{x_2} g(x+iy')dx$$

gilt; mit anderen Worten, diese Ungleichung gilt für jedes $y = y'$ im Intervalle $y_1 \leqq y \leqq y_2$, für welches die rechte Seite einen Sinn hat. Wir betrachten hierzu (unter der Annahme, daß $g(x+iy')$ für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ summierbar ist) die Funktion

$$h(x) = |f(x+iy') - f(x_1+iy')| \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

und bilden für einen kleinen (positiven oder negativen) Zuwachs Δx die Differenz $h(x+\Delta x) - h(x)$. Es ist hierbei (weil $||b-a| - |c-a|| \leqq |b-c|$ ist)

$$|h(x+\Delta x) - h(x)| \leqq |f(x+\Delta x+iy') - f(x+iy')|,$$

also

$$\left|\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right| \leqq \frac{|f(x+\Delta x+iy')-f(x+iy')|}{|\Delta x|}.$$

Diese Ungleichung lehrt sofort, daß in einem beliebigen Punkt x des Intervalles $x_1 \leqq x \leqq x_2$ jede der vier Hauptderivierten der Funktion $h(x)$ (d. h. der obere und untere Differentialquotient von rechts und links) absolut genommen $\leqq g(x+iy')$ ist; denn es strebt ja für $|\Delta x| \to 0$ die rechte Seite der letzten Ungleichung gegen $g(x+iy')$. Es werde eine (beliebig ausgewählte) der vier Hauptderivierten von $h(x)$, etwa der obere rechte Differentialquotient, mit $h'(x)$ bezeichnet. Dieser Differential-

quotient $h'(x)$ ist in jedem Punkte x des Intervalles $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *endlich*, nämlich absolut genommen $\leqq g(x+iy')$, also (wie jede endliche Hauptderivierte) eine *meßbare* Funktion von x im Intervalle $x_1 \leqq x \leqq x_2$, und weil er dem absoluten Werte nach nicht größer ist als die positive *nach Voraussetzung* für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ summierbare Funktion $g(x+iy')$, ist er selbst *summierbar*. Hieraus folgt aber nach einem bekannten Satze der Lebesgueschen Theorie[7]), daß

$$h(x_2) = h(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} h'(x)\,dx,$$

also, weil $h(x_1) = 0$ ist, daß

$$h(x_2) = |f(x_2+iy') - f(x_1+iy')| = \int_{x_1}^{x_2} h'(x)\,dx$$

ist. Aus dieser Darstellung von $|f(x_2+iy') - f(x_1+iy')|$ durch ein Lebesguesches Integral folgt nunmehr sofort die Richtigkeit der obigen Ungleichung

$$|f(x_2+iy') - f(x_1+iy')| \leqq \int_{x_1}^{x_2} g(x+iy')\,dx;$$

denn es gilt ja im ganzen Intervalle $x_1 \leqq x \leqq x_2$ die Ungleichung $h'(x) \leqq g(x+iy')$. Wir wenden uns nunmehr zum Beweise des Hilfssatzes 8, d. h. zum Beweise der Ungleichung

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x_2+iy) - f(x_1+iy)|\,dy \leqq \frac{m+\mu}{2}.$$

Es ist

$$m = \iint_Q d\sigma, \qquad \mu = \iint_Q \big(g(x+iy)\big)^2\,d\sigma;$$

die erste Gleichung ist trivial, die zweite ist im Hilfssatze 7 bewiesen. Hieraus folgt

$$\frac{m+\mu}{2} = \iint_Q \tfrac{1}{2}\Big\{\big(g(x+iy)\big)^2 + 1\Big\}\,d\sigma,$$

also a fortiori, weil

$$0 < g(x+iy) \leqq \tfrac{1}{2}\Big\{\big(g(x+iy)\big)^2 + 1\Big\}$$

ist und $g(x+iy)$, als Wurzel der im Gebiete G meßbaren Funktion $\big(g(x+iy)\big)^2$, selbst in G *meßbar* ist,

$$\iint_G g(x+iy)\,d\sigma \leqq \frac{m+\mu}{2}.$$

Nun gilt aber, weil $g(x+iy)$ eine im Quadrate $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ summierbare Funktion des reellen Wertepaares (x, y) ist, nach einem

---

[7]) Carathéodory, l. c.[2]) S. 597, Satz 4.

fundamentalen Satz über die Reduktion eines Flächenintegrals auf ein Doppelintegral[8]) die Gleichung

$$\iint_{q} g(x+iy)\,d\sigma = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx.$$

Diese Gleichung ist folgendermaßen zu verstehen. Es existiert für jedes y im Intervalle $y_1 \leqq y \leqq y_2$, höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null, das Integral $\int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx$, und es ist die durch dieses Integral gegebene Funktion $J(y)$ (die also für $y_1 \leqq y \leqq y_2$, höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, definiert ist) eine summierbare Funktion von y, deren Integral $\int_{y_1}^{y_2} J(y)\,dy$ gleich dem Flächenintegral $\iint_{q} g(x+iy)\,d\sigma$ ist. Hieraus folgt nun die zu beweisende Ungleichung; denn aus der für jedes y im Intervalle $y_1 \leqq y \leqq y_2$, für welches das Integral $\int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx$ existiert, giltigen Ungleichung

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx \geqq |f(x_2+iy) - f(x_1+iy)|$$

ergibt sich sofort durch Integration nach y

$$\frac{m+\mu}{2} \geqq \iint_{q} g(x+iy)\,d\sigma = \int_{y_1}^{y_2} J(y)\,dy \geqq \int_{y_1}^{y_2} |f(x_2+iy) - f(x_1+iy)|\,dy.$$

Hiermit ist der Hilfssatz 8 bewiesen.

§ 3.

In § 1 haben wir den Beweis des Hauptsatzes auf den folgenden Satz zurückgeführt.

Satz A: *Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für eine beliebige endliche Anzahl in G gelegener und nicht übereinander greifender Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, deren Gesamtflächeninhalt kleiner als ε ist, die Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right| < \delta$$

besteht.

Mit Hilfe der Resultate des § 2 gelingt es nun unmittelbar den Satz A zu beweisen. Zu der gegebenen Zahl $\delta > 0$ bestimmen wir, was nach dem Hilfssatze 6 möglich ist, eine positive Zahl $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ derart, daß

[8]) Carathéodory, l. c.[2]) S. 632, Satz 4.

für jede in G gelegene meßbare Menge M vom Maße kleiner als ε die entsprechende Menge M im Gebiete Γ vom Maße $\omega(M) < \frac{\delta}{2}$ ist. Für dieses ε ist alsdann die Bedingung des Satzes A erfüllt. In der Tat ist nach dem Hilfssatze 8

$$\left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right| \leqq m_n + \mu_n,$$

wo m_n den Flächeninhalt von q_n bezeichnet, während μ_n das Maß derjenigen Punktmenge im Gebiete Γ angibt, welche dem Innern des Quadrates q_n entspricht, und hieraus folgt durch Summation

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right| \leqq \sum_{n=1}^{N} (m_n + \mu_n) = \sum_{n=1}^{N} m_n + \sum_{n=1}^{N} \mu_n < \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Hiermit ist der Satz A und damit der Hauptsatz bewiesen.

(Eingegangen am 28. Februar 1918.)

Die doppelte Bedingung für eine Rotationsfläche zweiten Grades.

Von

Rudolf Sturm in Breslau.

1. Für eine Fläche zweiten Grades:

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) = 0,$$

worin

$$\varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy,$$
$$\psi(x, y, z) = 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33}$$

ist und rechtwinklige Koordinaten zugrunde liegen, ist bekanntlich:

$$\Lambda(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \varrho, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11} - \varrho, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

die für die Transformation auf die Achsen (bzw. in den Spezialfällen auf eine andere kanonische Form) wichtige kubische Gleichung mit drei stets reellen Wurzeln a_0, a_1, a_2, welche bei den Mittelpunktsflächen den reziproken Halbachsenquadraten proportional sind.

Besitzt sie eine *Doppelwurzel*, $a_0 = a_1$, so handelt es sich, wofern die Flächengleichung reell vorausgesetzt wird, im allgemeinen um *eine Rotationsfläche* oder, falls diese Wurzel 0 ist, um *einen parabolischen Zylinder*. Diese letztere Möglichkeit einer *Nicht-Rotationsfläche* wird von Hesse[1]) nicht erwähnt; auch Gundelfinger, der Herausgeber der dritten Auflage, tut es nicht. Für eine Doppelwurzel ist — bei reellen Koeffizienten a_{00}, ... — notwendig, daß die *zweifache* Bedingung

$$\frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{b_{20}}{a_{20}} = \frac{b_{01}}{a_{01}} \tag{1}$$

erfüllt wird; b_{12}, b_{20}, b_{01} sind die Adjunkten der a_{12}, a_{20}, a_{01} in der

[1]) Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl., 19. Vorlesung.

Diskriminante $\Lambda(0)$ von φ; aber dafür ist vorausgesetzt, daß *keiner von diesen drei Koeffizienten gleich null ist*, was auch von Hesse und Gundelfinger nicht erwähnt wird. Ist einer null, so gelten zwei andere Bedingungen: die eine ist, daß noch ein zweiter null ist; und ist etwa $a_{12} = a_{20} = 0$, so ist die andere Bedingung: $(a_{00} - a_{22})(a_{11} - a_{22}) = a_{01}^2$. Damit hat man z. B. zu tun bei der Aufsuchung von Tangentialkegeln einer Fläche zweiten Grades, welche Rotationskegel sind.

2. Im Grunde ist das Vorhandensein einer Doppelwurzel eine einfache Bedingung: Verschwinden der Diskriminante der kubischen Gleichung $\Lambda(\varrho) = 0$; sie wird zweifach, weil Realität der Flächengleichung verlangt wird. Kummer zerlegt bekanntlich dazu diese Diskriminante in Quadrate, die einzeln null werden müssen, und Hesse gibt diese Untersuchung wieder[2]). Aber Kummer erhält statt zweier Quadrate, wie es erwünscht wäre, *sieben* Quadrate:

$$15\{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 + (a_{120} - a_{102})^2 + (a_{012} - a_{210})^2 + (a_{201} - a_{021})^2;$$

die sieben Gleichungen folgen aus der obigen Doppelgleichung (1) und sind also mit zwei Gleichungen äquivalent.

Für $a_{300} = 0$, $a_{030} = 0$, $a_{003} = 0$ ist das unmittelbar ersichtlich, denn $a_{300} = a_{20} b_{10} - a_{10} b_{20} = 0, \ldots$; das sind die drei in (1) enthaltenen Gleichungen. Für die vier übrigen erwähnt Hesse die Möglichkeit ihrer Ableitung aus (1), ohne sie jedoch auszuführen. Ich halte die Ausführung derselben nicht für überflüssig.

Es sei γ der gemeinsame Wert der drei gleichen Brüche in (1), so daß

$$\frac{a_{01} a_{20}}{a_{12}} - a_{00} = \frac{a_{12} a_{01}}{a_{20}} - a_{11} = \frac{a_{20} a_{12}}{a_{01}} - a_{22} = \gamma.$$

Dann ist

$$a_{00} - a_{11} = \frac{a_{01}(a_{20}^2 - a_{12}^2)}{a_{20} a_{12}},$$

$$a_{20}^2 - a_{12}^2 = \frac{a_{20} a_{12}}{a_{01}}(a_{00} - a_{11}) = (\gamma + a_{22})(a_{00} - a_{11});$$

$$b_{00} - b_{11} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 - a_{00} a_{22} + a_{20}^2$$
$$= -a_{22}(a_{00} - a_{11}) + a_{20}^2 - a_{12}^2 = (a_{00} - a_{11})\gamma,$$

$$b_{11} - b_{22} = (a_{11} - a_{22})\gamma, \quad b_{22} - b_{00} = (a_{22} - a_{00})\gamma.$$

Nun ist die Kummersche Größe

$$a_{120} - a_{102} = a_{12}(b_{11} - b_{00}) + b_{12}(a_{00} - a_{11})$$
$$+ b_{12}(a_{00} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{00}) = a_{12}\gamma(a_{11} - a_{00}) + \gamma a_{12}(a_{00} - a_{11})$$
$$+ \gamma a_{12}(a_{00} - a_{22}) + a_{12} \cdot \gamma(a_{22} - a_{00}) = 0.$$

---

[2]) Kummer, Journal für Mathematik, Bd. 26 (1843), S. 268; Hesse, a. a. O., 27. Vorlesung.

Ebenso ist

$$a_{012} - a_{210} = 0, \ldots;$$

$$a_{111} = a_{00}(b_{22} - b_{11}) + a_{11}(b_{00} - b_{22}) + a_{22}(b_{11} - b_{00}) =$$
$$= \gamma\{a_{00}(a_{22} - a_{11}) + a_{11}(a_{00} - a_{22}) + a_{22}(a_{11} - a_{00})\} = 0^3).$$

Die beiden Bedingungen des obigen Spezialfalls bewirken dasselbe.

3. Die transformierte Gleichung der Fläche ist:

$$a_0(x^2 + y^2) + a_2 z^2 + \psi_1(x, y, z) = 0;$$

der Kegel, der ihre unendlich ferne Kurve aus dem Anfangspunkte projiziert:

$$a_0(x^2 + y^2) + a_2 z^2 = 0$$

oder

$$a_0(x^2 + y^2 + z^2) + (a_2 - a_0) z^2 = 0;$$

er berührt also den konzentrischen isotropen Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ nach der absoluten Kurve (dem unendlich fernen Kugelkreis) doppelt: längs der Kanten in $z = 0$; folglich berühren sich auch die beiden unendlich fernen Kurven doppelt: in ihren in $z = 0$ gelegenen Punkten.

Der unendlich ferne Schnitt eines parabolischen Zylinders, bei dem $\gamma = 0$ ist, besteht aus zwei unendlich nahen Kanten, und die zweimal zwei unendlich nahen gemeinsamen Punkte kommen nicht durch eigentliche Berührung zustande.

4. Was bedeutet aber, wenn die Realität der Flächengleichung nicht verlangt wird, das Vorhandensein einer Doppelwurzel oder das Verschwinden der Diskriminante von $\Lambda(\varrho) = 0$ als *einfache Bedingung?*

Diese kubische Gleichung ergibt sich auch folgendermaßen mit anderer Bedeutung der Wurzeln. Auf unendlich ferne Punkte $(x, y, z, 0)$ beschränkt, sind $\varphi(x, y, z) = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ die Gleichungen der unendlich fernen Kurve der Fläche und der absoluten Kurve; folglich liefert $\Lambda(\varrho) = 0$ die Parameter der drei Geradenpaare ihres Büschels. Ihre Doppelpunkte bilden das gemeinsame Polardreieck desselben. Es ist vollständig reell, wenn es sich um reelle Gleichungen handelt, weil mindestens die eine eine reell-imaginäre Kurve darstellt, also die vier Schnitte imaginär sind[4]). Bei einer Fläche mit (endlichem) Mittelpunkte sind die Durchmesser nach ihnen zugleich konjugiert und rechtwinklig, also die Achsen der Fläche. Bei einer Rotationsfläche haben die Kurven ∞^1 gemeinsame Polardreiecke, eine Ecke fest im Berührungspol der doppelten Berührung,

---

[3]) Anschließend sei eine Vereinfachung zu Hesses Buch erwähnt. Die Formeln 28) auf S. 306 sind zu umständlich abgeleitet; sie ergeben sich durch einfache Subtraktion der linken Formeln 7) von 23).

[4]) Steiner-Schröter, *Vorlesungen*, 3. Aufl., Nr. 272; Sturm, Geometrische Verwandtschaften, Bd. II, Nr. 326.

die andern in zwei gemeinsam konjugierten Punkten auf der Berührungssehne; es gibt ∞^1 Tripel von Achsen, denen allen die Rotationsachse, nach dem Berührungspol gehend, gemeinsam ist.

Hat nun die kubische Gleichung eine Doppelwurzel, so haben zwei der Geradenpaare sich vereinigt; dazu ist Berührung der beiden Kurven erforderlich, und das doppelte Geradenpaar geht vom Berührungspunkte nach den beiden weiteren Schnittpunkten. Wenn nur Berührung in *einem* Punkte statthat, so muß, weil die absolute Kurve — mit reeller Gleichung — keine reellen Punkte besitzt, die andere Kurve und die Fläche eine imaginäre Gleichung haben, nicht etwa reell-imaginär mit reeller Gleichung sein. Zwei Kurven, welche beide reelle Gleichungen haben, haben mit einem imaginären Punkte auch den konjugiert imaginären gemein, und Berührung in dem einen zieht Berührung in dem andern nach sich. So ergibt sich *doppelte* Berührung; und die *Zweifachheit der Bedingung* im Falle der Realität der Flächengleichung ist für mich so anschaulicher dargetan als durch die algebraischen Überlegungen.

(Eingegangen am 28. Februar 1918.)

Einfacherer Beweis für die acht Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung.

Von

Rudolf Sturm in Breslau.

1. Für diesen Satz von den acht Schnittpunkten, der doch mehr den Elementen der analytischen Geometrie des Raumes angehört, ist die Heranziehung des allgemeinen Satzes der Algebra über die mnp Lösungssysteme von drei (unhomogenen) Gleichungen mit drei Unbekannten, von den Graden m, n, p, zu umständlich; zumal der Beweis desselben[1]) wohl nicht in jeder Beziehung befriedigend genannt werden kann.

Die Darstellung der (ganzen) symmetrischen Funktionen der Wurzel*paare* von zwei Gleichungen ist noch ein wunder Punkt. Salmon z. B. konstruiert die Gleichung mn^{ten} Grades in t, deren Wurzeln aus jenen Paaren x_i, y_i durch $t_i = \lambda x_i + \mu y_i$ entstehen, bildet für deren symmetrische Funktionen die Koeffizientenausdrücke und vergleicht die Faktoren der Potenzprodukte von λ, μ links und rechts. Aber ein solches Produkt hat sehr häufig nicht bloß eine symmetrische Funktion zum Faktor, sondern eine Summe von solchen Funktionen, und die Vergleichung gibt nur für diese, nicht für die einzelnen Funktionen den Koeffizientenausdruck.

Ferner, diese Ausdrücke haben Nenner; wenn λ, μ auch in diese eingehen — vermutlich nicht —, wie geschieht dann die Vergleichung, und welche Koeffizienten gehen in diese Nenner ein? Wahrscheinlich nur die der höchsten Aggregate der Gleichungen. Das sind Fragen, die vorher erledigt werden müssen, aber, soviel ich sehe, es noch nicht sind.

Besitzt man auch nur für eine dieser symmetrischen Funktionen der Wurzelpaare, selbst im einfachsten Falle, wo beide Gleichungen vom zweiten Grade sind, den Koeffizientenausdruck? Bei der Herstellung der

[1]) Salmon, Modern higher Algebra, 4. Auflage, Vorlesung VIII; H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Bd. I, Neuer Abdruck § 57; Kleine Ausgabe § 28; Serret-Wertheim, Handbuch der Algebra, Bd. I, 2. Teil, Kap. 5.

Resultante von drei Kegelschnittsgleichungen durch Einsetzung der Wurzelpaare von zweien in die dritte hat man es mit 125 symmetrischen Funktionen zu tun[2]); also ist das praktisch unausführbar.

2. Den Wunsch, den Satz von den acht Schnittpunkten einfacher zu beweisen, hat schon Hesse[3]) erfüllt, wenn auch auf einem Umwege, indem er zu den drei Flächengleichungen noch die einer Ebene hinzufügt, die Bedingung für diese Ebene aufsucht, daß sie mit den drei Flächen einen Punkt gemeinsam hat; die Fläche achter Klasse für die Ebene, deren Gleichung er erhält, besteht aus den acht Ebenenbündeln um die gesuchten Schnittpunkte. Aus der Theorie der Funktionaldeterminante (Vorlesung 8) benutzt er einen Satz für den Fall, daß von den k Funktionen mit k homogenen Veränderlichen $k-1$ im Grade übereinstimmen.

Ich werde im folgenden den einfacheren, auch von Hesse bewiesenen Satz für den Fall benutzen, daß alle denselben Grad haben:

Ein (nicht aus lauter Nullen bestehendes) Wertsystem, das alle k Funktionen zum Verschwinden bringt, bringt immer die Funktionaldeterminante, im genannten Falle aber auch ihre k Ableitungen zum Verschwinden. Damit erhält man die Resultante von drei Kegelschnittsgleichungen, *ohne symmetrische Funktionen*, weil die verschwindenden Ableitungen ebenfalls zweiten Grades sind — ein Vorzug dieses einfachen Falles; man kann aus den sechs Gleichungen zweiten Grades *linear* die Größen x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2 durch eine verschwindende Determinante R sechsten Grades eliminieren. Auch Hesse eliminiert ähnlich, aber aus elf Gleichungen.

3. Ich führe nun für diese — bekannte — Elimination noch eine wesentliche Vereinfachung ein, indem ich den Begriff der *Dimension* der Koeffizienten in einer Kurven- oder Flächengleichung als *Maßgrößen* benutze, der in unserer Zeit, glaube ich, nicht ausgiebig genug verwertet wird, während er vom Altertum bis Vieta eine große Rolle gespielt hat. Alle Glieder einer Gleichung (n^{ten} Grades) müssen dieselbe Dimension haben, daher die Koeffizienten der Glieder, die in den veränderlichen Koordinaten die Dimension i haben, die Dimension $n-i$, wofern die des höchsten Aggregats dimensionslos sind. Als „Gewicht" tritt diese Zahl in der Algebra auf; aber bei dieser rein algebraischen Auffassung ist die Konstanz dieser Zahl in allen Gliedern eines Koeffizientenausdrucks nicht selbstverständlich, wohl aber bei der Auffassung als geometrische Dimension.

---

[2]) Ein symbolischer Ausdruck für die Resultante, für unsern Zweck wohl nicht verwendbar und auch nicht elementar genug erhalten, findet sich in Clebsch-Lindemanns Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, S. 526, Formel (22).

[3]) Analytische Geometrie des Raumes. 3. Auflage, 9. Vorlesung.

Von der Resultante R brauche ich nicht die ausführliche Darstellung, sondern *nur ihre Dimension.*

Um sie noch besser hervorzuheben, nehme ich aus den Koeffizienten, welche die Dimension i haben, einen Dimensionsfaktor, die Potenz c^i der Maßeinheit c, heraus, schreibe also in einer Kegelschnittsgleichung $a_{13}c$, $a_{23}c$, $a_{33}c^2$ statt a_{13}, a_{23}, a_{33} (so daß a_{13}, a_{23}, a_{33} nun auch dimensionslos sind).

So geschrieben, lautet die Funktionaldeterminante von drei Kegelschnittsgleichungen:

$$J = \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}cz, & a_{21}x + a_{22}y + a_{23}cz, & a_{31}cx + a_{32}cy + a_{33}c^2z \\ b_{11}x + b_{12}y + b_{13}cz, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ c_{11}x + c_{12}y + c_{13}cz, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{vmatrix};$$

die Glieder mit x^3, y^3, x^2y, xy^2; x^2z, y^2z, xyz; xz^2, yz^2; z^3 haben ersichtlich die Dimensionsfaktoren c, c^2, c^3, c^4, und die Glieder mit x^2, y^2, xy; xz, yz; z^2 in $\frac{\partial J}{\partial x}$, $\frac{\partial J}{\partial y}$ die Faktoren c, c^2, c^3, in $\frac{\partial J}{\partial z}$ aber c^2, c^3, c^4.

Nun genügt es, in die Determinante R bloß diese Faktoren einzusetzen:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c, & c, & c^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & c, & c, & c^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & c, & c, & c^2 \\ c, & c, & c, & c^2, & c^2, & c^3 \\ c, & c, & c, & c^2, & c^2, & c^3 \\ c^2, & c^2, & c^2, & c^3, & c^3, & c^4 \end{vmatrix};$$

die drei letzten Kolonnen und dann die drei letzten Zeilen zeigen, daß *alle* Glieder den Faktor $c \cdot c \cdot c^2 \times c \cdot c \cdot c^2 = c^8$ haben, *die Resultante ist achter Dimension.*

4. Nun seien drei Flächen zweiter Ordnung gegeben, mit unhomogenen Gleichungen; wir schneiden mit $z = h$, z. B. die erste in dem Kegelschnitte:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{13}h + a_{14})x + 2(a_{23}h + a_{24})y + (a_{33}h^2 + 2a_{34}h + a_{44}) = 0;$$

die Koeffizienten erster und zweiter Dimension haben den Grad 1, 2 in h; also ist $R = 0$ achten Grades in h.

Es gibt acht Parallelebenen zur xy-Ebene, in denen die ausgeschnittenen Kegelschnitte einen gemeinsamen Punkt haben, der dann gemeinsamer Punkt der drei Flächen ist.

Ähnlich erhält man die vier Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten aus der Resultante von zwei quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten, diese als Längengröße auffassend.

(Eingegangen am 28. Februar 1918.)

Berichtigung.

Zu meiner Arbeit, „Über harmonische Funktionen und L-Formen", Bd. 1, S. 149—162.

S. 150, Z. 12 von unten ist statt $\sum_{\nu,\mu=1}^{n}$ zu setzen $\sum_{\nu,\mu=0}^{n}$,

S. 161, Z. 7 von oben ist statt $(g^{(n)}, G^{(n)})$ zu setzen $(2g^{(n)}, 2G^{(n)})$.

Zu dem von Herrn Fejér herrührenden Satz A ist zu bemerken, daß sich ein gleichfalls einfacher Beweis des Satzes aus einer von Stieltjes (De la transformation de la fonction périodique $A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$, Nieuw Archief voor Wiskunde IX (1882), S. 111 bis 116; Werke 1, S. 99—104) gegebenen Faktorenzerlegung der trigonometrischen Polynome sehr leicht ergibt. Auf die Stieltjessche Arbeit hat mich Herr Landau freundlichst aufmerksam gemacht.

Zu Satz VI vergleiche man: O. Toeplitz, Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Math. Annalen 70 (1911), S. 351—376; F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues, Paris 1913 (insb. S. 175—178).

Zu meiner Arbeit, „Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe", Bd. 1, S. 163—183.

S. 174, Z. 8. Die Angabe, Herr Landau habe die voranstehende Abschätzung von $|s_n^{(2k-1)}|$ für $\frac{1}{2} < k < 1$ bewiesen, muß dahin ergänzt werden, daß er sie, wie ich, für alle $k > \frac{1}{2}$ bewiesen hat (loc. cit. S. 252).

S. 176, in Formel (18) ist statt $\sin(n+1)\psi$ zu setzen: $\sin(n+1)\varphi$.

O. Szász.

(Eingegangen am 22. Mai 1918.)